УДК 517.55

Вестник СибГАУ
2014. № 3(55). С. 172–176

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ КРАТНОГО СТЕПЕННОГО РЯДА С ПОМОЩЬЮ ОДНОМЕРНЫХ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

Е. И. Яковлев

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева
Российская Федерация, 660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31
E-mail:yei@nm.ru

В теории аналитических функций К. Вейерштрасса понятие аналитического элемента (степенного ряда в С, сходящегося в некотором круге) и его аналитического продолжения являются основными. Метод переразложения степенного ряда, предложенный Вейерштрассом, принципиально решающий задачу аналитического продолжения, оказался малоэффективным при конкретном применении. В работах Ж. Адамара, Г. Миттаг-Леффлера, Ле Руа, Линделефа были предложены так называемые методы суммирования, дающие хорошие результаты для аналитического продолжения степенного ряда в случае звездных областей комплексной плоскости. В дальнейшем в работах Н. У. Аракеляна было получено описание областей, в которых восстановление аналитического продолжения аналитического элемента возможно с помощью универсальных матричных методов суммирования, т. е. областей комплексной плоскости, в которых найдется по крайней мере одна бесконечная матрица, «суммирующая» все аналитические элементы с заданным центром. Эти области оказались спиральными относительно некоторой точки и были названы Аракеляном областями эффективной суммируемости.

Настоящая работа посвящена аналитическому продолжению кратного степенного ряда в класс областей, обобщающих спиральные. С помощью одномерных матричных методов суммирования степенного ряда строятся многомерные матричные методы суммирования для кратного степенного ряда, позволяющие строить аналитическое продолжение этого ряда в максимальную спиральную область, называемую (m,α)-звездой Миттаг-Леффлера функции f, определяемой этим рядом. При этом апробация построенных многомерных матричных методов суммирования кратного степенного ряда проводится с помощью одномерной геометрической прогрессии.

Ключевые слова: кратный степенной ряд, звезда Миттаг-Леффлера, главная звезда, аналитическое продолжение, суммирование кратного степенного ряда, матричные методы суммирования, спиральные области, области эффективной суммируемости.

Vestnik SibGAU
2014, No. 3(55), P. 172–176

ABOUT ANALYTICAL RESUMING MULTIPLE POWER SERIES BY USING ONE-DIMENSIONAL MATRIX METHODS OF SUMMATION

E. I. Yakovlev

Siberian State Aerospace University named after academician M. F. Reshetnev
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation
E-mail: yei@nm.ru

In the theory of analytic functions of K. Weierstrass the concept of the analytical element (power series in C converging in a circle) and its analytic continuation are the main. The method of power series expansion at another, series proposed by Weierstrass, fundamentally solves the problem of analytic continuation, proved ineffective in a particular application. In the works of Hadamard, Mittag-Leffler, Le Roy, Lindelof the so-called summation methods that give good results for the analytic continuation of power series in the case of the star domains of the complex plane have been proposed. In the works of Arakelian a description of the areas, in which the restoration of the analytic continuation of the analytical element with a fixed center is possible by using the universal matrix methods of summation is received. This work is about the analytical continuation of multiple power series in the class of fields of synthesis of spiral. Using one-dimensional matrix methods of summation of power series constructed multidimensional matrix methods of summation for multiple power series, which allows you to construct an analytic continuation of this number in the maximum spiral region called (m,a)-the star of the Mittag-Leffler function f defined by this row. This approbation built *multidimensional matrix methods of summation of multiple power series is carried out using one-dimensional geometric progression. That is the domains of the complex plane, there is at least one infinite matrix "summarizing" all analytic elements with a given center. These domains were spiral relative to some point and were named Arakelian domains efficient summability.*

Keywords: Multiple power series, star of Mittag-Leffler, the main star, analytic continuation, summation of multiple power series, matrix methods of summation, spiral domains, domains of efficient summability.

Задача аналитического продолжения степенного ряда является одной из классических и восходит еще к К. Вейерштрассу, соответствующая библиография имеется в [1]. Однако метод аналитического продолжения степенного ряда путем его переразложения достаточно трудоемок и нерационален. В дальнейшем более эффективные методы суммирования степенного ряда (аналитического продолжения с помощью матричных методов) были предложены Миттаг-Леффлером, Линделефом, Ле Руа и другими математиками (см., например, [2–5]). Для $n = 1$ в случае звездных областей достаточно подробная библиография имеется, например, в [6; 7], для случая спиральных областей – в [8; 9]. Одно из первых продолжений степенного ряда в спиральную область принадлежит, наверное, Линделефу [3]. Спустя более полувека, Аракеляну [8] удалось показать, что аналитическое продолжение однократного степенного ряда с помощью матричных методов суммирования возможно только в спиральные области. В случае многих переменных в работах [10–14] имеются различные методы суммирования кратного степенного ряда для звездных областей. В [15] предложен метод, позволяющий суммировать кратный степенной ряд в случае параболически звездных областей (см. ниже определение 1, при $\alpha = (0, ..., 0)$). В настоящей работе предлагаются методы суммирования кратного степенного ряда, позволяющего суммировать этот ряд в классе областей в C^n, естественным образом обобщающих как спиральные, так и звездные.

Обозначим $z = (z_1, ..., z_n)$ точки n-мерного комплексного пространства C^n, $k = (k_1, ..., k_n)$ – мультииндексы, $\| k \| = k_1 + ... + k_n$, $k! = k_1!...k_n!$, $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$, $R^n_> := \left\{ x \in R^n ; x_1 > 0, ..., x_n > 0 \right\}$; $Q^n_> := \left\{ x \in Q^n : x_1 > 0, ..., x_n > 0 \right\}$.

Пусть

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{\|k\| \ge 0} a_{k_1 ... k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n} \quad (1)$$

n-кратный степенной ряд, который сходится в некоторой окрестности U начала координат в C^n. Максимальная звездная область G, в которую голоморфно продолжается ряд (1), называется звездой Миттаг-Леффлера (или главной звездой) ряда (1) или функции $f(z)$.

Цель настоящей работы – получение аналитического продолжения ряда (1) в класс областей, обобщающих одновременно звездные и спиральные. Поэтому для дальнейшего изложения нам потребуется следующее.

Определение 1. Пусть $x \in R^n_>$, $\alpha \in R^n$. Множество G в C^n назовем (x,α)-спиральным относительно начала координат, если вместе с каждой точкой $z^0 = (z_1^0, ..., z_n^0)$ в множестве G содержится (x,α)-отрезок $L_{z_0}^{(x,\alpha)} := \{ z \in C^n : z_1 = z_1^0 t^{x_1(1+i\alpha_1)}, ..., z_n = z_n^0 t^{x_n(1+i\alpha_n)}, t \in [0,1] \} \subset G$.

Если функция $f(z)$ голоморфна в некоторой окрестности начала координат в C^n, то максимальную (x,α)-спиральную область G_f^x, в которую голоморфно можно продолжить функцию f, назовем (x,α)-спиральной звездой Миттаг-Леффлера функции f или просто (x,α)-звездой.

Понятие (x,α)-спиральной звезды Миттаг-Леффлера, естественно, шире понятия звезды Миттаг-Леффлера. Особенно наглядно это видно при $n = 1$ и $\alpha \ne 0$.

Пример 1. Главная звезда функции $f(z) = (1-z)^{-1}$ совпадает с комплексной плоскостью без луча $[1, \infty)$, а ее α-спиральная звезда Миттаг-Леффлера совпадает с множеством

$$M_\alpha := C \setminus \left\{ z \in C : z = t^{(1+i\alpha\ )}, t \in [1, \infty) \right\}.$$

В случае $\alpha \ne 0$ эти множества различны.

Если $\alpha = 0$, (x,α)-спиральные множества переходят в x-звездные. В случае одного переменного всякая $(x,0)$-звезда Миттаг-Леффлера совпадает с обычной звездой Миттаг-Леффлера или главной звездой данного степенного ряда, т. е. в случае одного переменного классы x-звездных и звездных множеств совпадают. В случае многих переменных это не так. В [8] приводится пример функции, у которой (1,2)-звезда не совпадает с главной звездой или (1,1)-звездой.

Понятие матричного метода суммирования для одномерного случая и соответствующий обзор литературы приведен в монографиях [6; 7; 12] и работах [8; 9], а для многомерного – в [10; 11].

Пусть $P = \{\tau\}$ – множество на вещественной оси, имеющее предельную точку τ_0 такую, что $\tau_0 \notin P$, и пусть

$$T_\tau(z) = \sum_{\|k\| \ge 0} c_k(\tau) z^k = \sum_{\|k\| \ge 0} c_{k_1 ... k_n}(\tau) z_1^{k_1} ... z_n^{k_n} \quad (2)$$

это степенной ряд, коэффициенты которого зависят от произвольного $\tau \in P$, сходящийся в C^n.

Определение 2. Будем говорить, что матрица $T = \{c_k(\tau)\} = \{c_{k_1...kn}(\tau)\}$ или матричный метод T суммирует ряд (1) в области $\Omega(f \in H(\Omega))$, если:

1. Композиция Адамара рядов (1) и (2)

$$T_\tau f(z) = \sum_{\|k\|\geq 0} c_k(\tau) a_k z^k = = \sum_{\|k\|\geq 0} c_{k_1...kn}(\tau) a_{k_1...kn} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n} \quad (3)$$

при фиксированном $\tau \in P$ абсолютно сходится в некоторой полной, логарифмически выпуклой области, содержащей Ω.

2. Локально равномерно в Ω (равномерно на любом компакте из Ω) выполняется равенство

$$f(z) = \lim_{\tau\to\tau_0} T_\tau * f(z),\ \forall z \in \Omega. \quad (4)$$

Замечание. Можно рассматривать класс матричных методов T, которые при $\tau \in P$ не задают целую функцию, но выполняется условие 1. Это существенно расширит класс рассматриваемых методов, но вызовет определенные трудности при проверке условия 1. Если ряд (1) сходится в непустой окрестности 0 и матричный метод T при $\tau \in P$ задает целую функцию, тогда условие 1 не требует проверки, оно выполняется автоматически. Что и предполагается в настоящей работе.

В одномерном случае известны следующие матричные методы:

1. Спиральный вариант метода Миттаг-Леффлера

$$M(\tau) := \left\{ m_k(\tau) = \frac{1}{\Gamma(k(\tau(1+i\alpha)+1))}; \tau \in P := (0,1], \tau_0 = 0 \right\}.$$

2. Метод Ле Руа

$$L(\tau) := \left\{ L_k(\tau) = \frac{\Gamma(k\tau+1)}{\Gamma(k+1)}; \tau \in P := [0,1), \tau_0 = 1 \right\}.$$

3. Метод Линделефа

$$\Lambda(\tau) := \left\{ \Lambda_k(\tau) = k^{-k\tau}; k > 0, \tau \in P := [0,1), \tau_0 = 0 \right\}.$$

Более подробно о вышеприведенных методах суммирования можно узнать в [1, с. 247].

Для одномерного случая теорема Окада [6] позволяет апробировать каждый из матричных методов лишь на геометрической прогрессии. Если матричный метод суммирует геометрическую прогрессию в ее α-спиральной звезде Миттаг-Леффлера, то этот метод суммирует любую функцию в ее α-спиральной звезде Миттаг-Леффлера. Таким образом методы Ле Руа и Линделефа суммируют произвольную функцию в ее главной звезде, а спиральное обобщение метода Миттаг-Леффлера суммирует функцию в ее α-спиральной звезде Миттаг-Леффлера [8]. Для многомерного случая вариант теоремы Окада для случая звездных областей предложен в [13].

Там вместо функции $g(\lambda) = (1-\lambda)^{-1}$ в многомерном случае рассматривалась функция

$$\varphi(z) = (1 - z_1 - ... - z_n)^{-n} = = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\|k\|\geq 0} \frac{(\|k\| + n - 1)!\, z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}}{k_1! ... k_n!},$$

которая при $n = 1$ совпадает с g.

Использовать функцию φ для тестирования матричного метода не всегда удобно. Хотелось бы получить вариант теоремы Окада, который проверял бы матричный метод на геометрической прогрессии (одномерной), а позволял бы суммировать многомерные степенные ряды. Ниже предлагается теорема, которая частично решает эту проблему. Опишем класс одномерных методов суммирования, необходимых нам для построения многомерных методов.

Определение 3. Обозначим через S класс одномерных методов суммирования (полунепрерывных матричных методов)

$$T_\alpha = \left\{ T_k^\alpha(\tau), \tau \in P \right\}$$

со следующими свойствами:

1. Функция

$$\Phi_\tau(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k^\alpha(\tau) \lambda^k$$

является целой для произвольного $\tau \in P, \lambda \in C$.

2. Матричный метод T_α суммирует геометрическую прогрессию

$$g(\lambda) = (1-\lambda)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$$

всюду в ее α-спиральной звезде Миттаг-Леффлера $G^\alpha_{(1-\lambda)^{-1}}$. То есть локально равномерно выполняется равенство

$$(1-\lambda)^{-1} = \lim_{\tau\to\tau_0} T_\tau * (1-\lambda)^{-1},\ \forall \lambda \in G^\alpha_{(1-\lambda)^{-1}}.$$

Произвольному матричному методу из класса S и $\forall x \in Q^n_>$ можно поставить в соответствие многомерный матричный метод по правилу

$$T_{(x;\alpha)} := \left\{ T^\alpha_{<k,m>}(\tau), \tau \in P \right\}, \quad (5)$$

где $m = (m_1, ..., m_n)$ – первая целочисленная точка с положительными координатами, лежащая на луче, выходящем из нуля и проходящем через точку x.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть функция f задана кратным степенным рядом (1), сходящимся в окрестности нуля в C^n; $x \in Q^n_>$; $G_f^{(x,\alpha)}$ – ее $(x_1, ..., x_n;\ \alpha_1, ..., \alpha_n)$-спиральная звезда Миттаг-Леффлера, и многомерный метод $T_{(x;\alpha)}$

построен по одномерному методу T_α из класса S по формуле (5). Тогда всюду в $G_f^{(x,\alpha)}$ метод $T_{(x;\alpha)}$ локально равномерно суммирует функцию *f*. То есть справедлива формула

$$f(z)=\lim_{\tau\to\tau_0} F^{\tau}_{(x;\alpha)}(z),\ \forall z\in G_f^{(x,\alpha)},$$

где

$$F^{\tau}_{(x;\alpha)}(z)=\sum_{\|k\|\geq 0} T^{\alpha}_{<k,m>}(\tau)a_{k_1\dots kn}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},\tau\in P$$

это композиция Адамара ряда (1) и ряда

$$T^{\tau}_{(x;\alpha)}(z)=\sum_{\|k\|\geq 0} T^{\alpha}_{<k,m>}(\tau)z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n},\tau\in P.$$

Таким образом теорема справедлива для рациональных звезд Миттаг-Леффлера. Построить продолжение в случае произвольных звезд помогает следующее предложение.

Предложение. Для произвольного компакта *K* из ее $(x;\alpha)$ – спиральной звезды Миттаг-Леффлера $G_f^{(x,\alpha)}$ существует рациональная звезда $G_f^{(y,\alpha)}$, содержащая компакт *K*.

С помощью теоремы удобно конструировать многомерные матричные методы по одномерным. Приведем пример матричного метода суммирования, который строится с помощью одномерного метода и суммирует кратные ряды в звезде Миттаг-Леффлера.

Пример 2. Спиральный аналог метода Миттаг-Леффлера. $P=(0,1];\tau_0=0,$

$$T^{\alpha}(\tau)=\left\{c_k^{\alpha}(\tau)=c^{\alpha}_{k_1\dots k_n}(\tau),\tau\in P\right\}=$$
$$=\left\{\left(\Gamma(<k,m>\tau(1+i\alpha)\right)^{-1}\right\},$$

где Γ – гамма-функция Эйлера; $m\in N^n$. Опираясь на теорему, достаточно заметить, что метод $T^{\alpha}(\tau)$ суммирует геометрическую прогрессию в ее α-спиральной звезде.

К сожалению, суммировать такие методы могут кратные степенные ряды в спиральных звездах только с «когерентной» мнимой частью, т. е. при $\alpha_1=\dots=\alpha_n=\alpha$. С другой стороны, теорема позволяет восстанавливать функцию по ее значениям на достаточно «тонких» и даже дискретных множествах во всей спиральной звезде Миттаг-Леффлера.

Доказательство теоремы. Покажем регулярность метода. Так как одномерный метод регулярен и любой компакт из единичного круга лежит в α-спиральной звезде Миттаг-Леффлера функции $g(\lambda)=(1-\lambda)^{-1}$, то для любых $\delta>0;r_0\in(0,1)$ найдется окрестность $U(\tau_0)$ точки τ_0 такая, что $\forall\tau\in U(\tau_0)$ имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(T_k^{\alpha}(\tau)-1)\lambda^k\right|<\delta;\forall|\lambda|<r_0<1.$$

Отсюда, воспользовавшись неравенствами Коши, получим

$$\left|(T_l^{\alpha}(\tau)-1)\right|<\frac{\delta}{r_0^{\,l}};\forall l=0,1,2\dots$$

Выберем произвольную точку $z=(z_1,\dots,z_n)$ из области сходимости ряда (1). В силу свойств области сходимости ряда (1) найдется такое $r_0\in(0,1)$, что точка $z\,r_0^{-m}=(z_1r_0^{-m_1},\dots,z_nr_0^{-m_1})$ все еще будет лежать в области абсолютной сходимости ряда (1). Тогда $\forall\tau\in U(\tau_0)$ имеем

$$|f(z)-F^{\tau}_{(m;\alpha)}(z)|\leq\sum_{\|k\|\geq 0}|T^{\alpha}_{<k,m>}(\tau)-1|\left|a_{k_1\dots kn}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}\right|\leq$$

$$\leq\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|<k,m>=l}\frac{\delta}{r_0^{\,l}}\left|a_{k_1\dots kn}z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}\right|=$$

$$=\delta\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{|<k,m>=l}\frac{z_1^{k_1}}{r_0^{\,l}}\left|a_{k_1\dots kn}\right|\left|\frac{z_1}{r_0^{m_1}}\right|^{k_1}\dots\left|\frac{z_n}{r_0^{m_n}}\right|^{k_n}.$$

Последний ряд сходится, так как точка $z\,r_0^{-m}=(z_1r_0^{-m_1},\dots,z_nr_0^{-m_1})$ лежит в области абсолютной сходимости ряда (1). В силу произвольности δ убеждаемся в регулярности метода.

Для завершения доказательства теоремы, в силу теоремы Витали, достаточно показать равномерную ограниченность последовательности функций $F^{\tau}_{(m;\alpha)}(z)$ на произвольном компакте *K* из *G*. Обозначим через

$$D^{\delta}:=\bigcup_{z\in D}B(z,\delta),$$

где $B(z,\delta):=\left\{\varsigma\in C^n:|\varsigma-z|<\delta\right\}$ – δ-раздутие области *D*.

Пусть

$$A_{\alpha}:=\left\{\lambda\in C:\lambda=t^{(1+i\alpha)};\forall t\in[0,1]\right\},\delta>0$$

и A_{α}^{δ} – δ-раздутие A_{α} в объединении с $U_{3\delta}(0)$-кругом, с центром в 0, радиуса 3δ:

$$B_{\delta}^{j}:=\left\{zt^m=(zt^{m_1},\dots,zt^{m_n}):z\in U_{r_0}(z^{(j)}),\ t\in A_{\alpha}^{\delta}\right\}.$$

Так как *K* компактно лежит в *G* и *G* открыто и $(x;\alpha)$-спирально, то найдется *d* точек $z^{(1)},\dots,z^{(d)}:\delta>0$ и U_{r_0} такие, что

$$K\subset\subset\bigcup_{j=1}^{d}B_{\delta}^{j}\subset\subset G.$$

Теперь достаточно показать ограниченность $F^{\tau}_{(m;\alpha)}$ на B_{δ}^{j}. Справедлива интегральная формула

$$F^{\tau}_{(m;\alpha)}(z\lambda^m) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial A^{\delta}_{\alpha}} f(z_1 u^{m_1}, \ldots, z_n u^{m_n})\Phi_{\tau}\left(\frac{\lambda}{u}\right)\frac{du}{u} \quad (6)$$

при $\lambda \in A_\alpha$, $u \in \partial A^{\delta}_{\alpha}$, $z \in U_{r_0}(z^{(j)})$.

Действительно, так как $\partial A^{\delta}_{\alpha}$ – жорданов путь, а у подынтегральной функции особенности только в нуле, то стягивая его к нулю, разлагая функции в ряды и интегрируя, убеждаемся в истинности (6). При $\lambda \in A_\alpha$ и $u \in \partial A^{\delta}_{\alpha}$ точка $\frac{\lambda}{u}$ компактно лежит в α-спиральной звезде Миттаг-Леффлера $(1-\lambda)^{-1}$. Поэтому учитывая ограниченность функции *f* на B^{j}_{δ}, равномерная ограниченность $F^{\tau}_{(m;\alpha)}$ вытекает из стандартной оценки интеграла.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Biberbach L. Analytische Fortsetzung. Springer-Verlag, Berlin, 1955. 240 p.

2. Mittag-Leffler G. Sur la representation d'une branche uniforme d'une fonction monogene // Acta Math. 1905. No. 29. P. 101–182.

3. Lindelof E. Sur l'application de la th´erie des residues au prolomgement analytique des s´eries de Taylor // J. Math. Pures Appl. 1903. No. 9(5). P. 213–221.

4. Le Roy E. Sur les series divergentes et les functions d´efines par un d´evelopement de Taylor // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. 1990. No. 2. P. 317–430.

5. Peyerimhoff A. Lectures on Summability. Lecture Notes in Math., Springer Verlag Berlin, 1970. 113 p.

6. Hardy G. H. Divergent series. Oxford, Clarendon Press, 1949. 503 p.

7. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М. : Физматгиз, 1960. 474 с.

8. Аракелян Н. У. Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов // Матем. сб. 1984. Т. 124, № 5. С. 24–44.

9. Балашов С. К. О целых функциях вполне регулярного роста по кривым правильного вращения : дис. … канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1972. 107 с.

10. Мураев Э. Б. Эйлеровское и борелевское суммирования рядов, их обобщения и приложения : дис. … докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1992. 364 с.

11. Downarovich M. Analytic continuation of series of homogeneous polynomicals of n complex variables. Prace Mat., 1975. 17 с.

12. Рамис Ж.-П. Расходящиеся ряды и асимптотические теории. М. ; Ижевск : Инст. комп. исслед., 2002. 80 с.

13. Яковлев Е. И. Об аналитическом продолжении кратного степенного ряда с помощью *m*-однородных полиномов матричным методом в обобщенную звезду Миттаг-Леффлера // Вестник СибГАУ. 2013. Вып. 4(50). С. 87–92.

14. Arakelian N. H. Efficient harmonic continuation of the Laplace series // *J. Contemp. Mathemat. Anal.* 2012. Vol. 47, no. 3. P. 105–123.

15. Яковлев Е. И. Аналог теоремы Окада // Вестник КрасГУ. 2006. № 9. С. 111–113.

References

1. Biberbach L. *Analytische Fortsetzung*, Springer-Verlag, Berlin, 1955, 240 p.

2. Mittag-Leffler G. Sur la representation d'une branche uniforme d'une fonction monogene, *Acta Math.* 1905, no. 29, p. 101–182.

3. Lindelof E. Sur l'application de la th´erie des residues au prolomgement analytique des s´eries de Taylo. *J. Math. Pures Appl.* 1903, no. 9, p. 213–221.

4. Le Roy E. Sur les series divergentes et les functions d´efines par un d´evelopement de Taylor. *Ann. Fac. Sci. Univ.* Toulouse. 1990, no. 2, p. 317–430.

5. Peyerimhoff A. Lectures on Summability, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 1970, 113 p.

6. Hardy G. H. *Divergent series*. Oxford, Clarendon Press, 1949, 503 p.

7. Cooke R. G. *Infinite matrices and sequence spaces*. London, Macmillan, 1960, 473 p.

8. Arakelyan N. U. [On efficient analytic continuation of power series]. *Mathematics of the USSR-Sbornik,* 1984, vol. 124, no. 5, p. 24–44 (In Russ.)

9. Balashov S. C. *O celih funkciyah vpolne regulyarnogo rosta po krivim pravilnogo vrachjeniya. Dis. cand. phis.-mat. nauk* [On entire functions of completely regular growth along curves right rotation]. Rostov-na-Donu, 1972, 107 p.

10. Muraev E. B. *Eulerovscoe i borelevskoe summirovanie ryadov, ih obobshjeniya i prilojeniya. Dis. doct. phis.-mat. nauk.* [Euler and Borel summation of the series, their generalizations and applications. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Novosibirsk, 1992. 364 p.

11. Downarovich M. Analytic continuation of series of homogeneous polynomicals of n complex variables. Prace Mat., 1975. p. 17.

12. Ramis J.-P. *Raskhodyashchiyesya ryady i asimptoticheskiye teorii* [Divergent series and asymptotic theory]. Moscow–Ijevsk, Inst. comp. issl. Publ., 2002, 80 p.

13. Yakovlev E. I. [The analogue of theorem Okada]. *Vestnik SibGAU,* 2013, no. 4 (50), p.87–92. (In Russ.)

14. Arakelian N. H. Efficient harmonic continuation of the Laplace series, *J. Contemp. Mathemat. Anal*, 2012, Vol. 47, no. 3, p.105–123.

15. Yakovlev E. I. [About the analytic continuation of the multiple power series using m-homogeneous polynomial matrix method in the generalized star Mittag-Leffler]. *Vestnik KrasGU*, 2013, no. 9, p. 111–113. (In Russ).

Раздел
Part
2

Авиационная и ракетно-космическая техника

Aviation and Spacecraft Engineering