УДК 517.55

Вестник СибГАУ
Т. 16, № 2. С. 310–316

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТИПА МЕЛЛИНА–БАРНСА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Т. В. Зыкова

Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий
Российская Федерация, 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26
E-mail: zykovatv@mail.ru

Интегралы Меллина–Барнса представляют гипергеометрические функции – самый обширный класс специальных функций. Данные интегралы применяются к вычислению групп монодромии A-гипергеометрических систем дифференциальных уравнений. Кроме того, интегралы Меллина–Барнса нашли широкое применение в теоретической физике, в частности, в задачах квантовой электродинамики. Отдельно следует подчеркнуть роль интегралов Меллина–Барнса в теории алгебраических уравнений. Представляет интерес задача исследования сходимости интегралов Меллина–Барнса в граничных точках их областей сходимости. Для интеграла Меллина–Барнса, представляющего решения алгебраических уравнений, эта задача была рассмотрена ранее. Интегральные преобразования Меллина для решения общей полиномиальной системы алгебраических уравнений исследовались в ряде современных работ, в которых прямое преобразование было вычислено с помощью линеаризации системы (замены переменной специального вида). Для системы полиномиальных уравнений специального вида доказана теорема, в которой получено интегральное представление типа Меллина–Барнса мономиальной функции вектор-решения системы с указанием множества сходимости. Доказательство состоит из двух частей. В первой части обосновывается представление функции вектор-решения интегралом типа Меллина–Барнса. Во второй части доказательства исследовано множество сходимости полученного интеграла, а именно, граничные точки области сходимости. Доказано, что ни одна граничная точка не будет принадлежать области сходимости, интеграл, представляющий решение полиномиальной системы специального вида, сходится в секториальной области.

Ключевые слова: интеграл Меллина–Барнса, алгебраическое уравнение (система), преобразование Меллина, множество сходимости, линеаризация системы.

Vestnik SibGAU
Vol. 16, No. 2, P. 310–316

ABOUT INTEGRATED REPRESENTATION LIKE MELLINA–BARNSA OF THE SOLUTION OF SYSTEM OF THE POLYNOMIAL EQUATIONS OF THE SPECIAL KIND

T. V. Zykova

Siberian Federal University, Institute of Space and Informatics Technologies
26, Kirenskogo Str., Krasnoyarsk, 660074, Russian Federation
E-mail: zykovatv@mail.ru

Mellin–Barnes integrals represent hyper geometrical functions – the most extensive class of special functions. These integrals are applied to calculation of groups of a monodromy of A-hyper geometrical systems of the differential equations. Besides, Mellin–Barnes integrals found a broad application in theoretical physics, in particular, in problems of quantum electrodynamics. Separately it is necessary to emphasize a role of integrals of Mellin–Barnes in the theory of the algebraic equations. The research problem of convergence of Mellin–Barnes integrals in boundary points of their areas of convergence is of interest. For integral of Mellin–Barnes submitting solutions of the algebraic equations this task it was considered earlier. Integrated Mellin transform for the decision of the general polynomial system of the algebraic equations was investigated in a number of modern works in which direct transformation was calculated by means of linearization of system (replacement of a variable of a special look). For system of the polynomial equations of a special look the theorem in which an integrated impression like Mellin–Barnes of monomial function a solution vector of system with the indication of a set of convergence is gained is proved. The proof consists of two parts. Function representation of a solution vector in the integral like Mellin–Barnes locates in the first part. In the second part of the proof the set of convergence of the received integral, namely boundary points of area of convergence is investigated. It is proved that any boundary point won't belong to convergence area, the integral submitting the decision of polynomial system of a special look meets in sectorial area.

Keywords: Mellin–Barnes integral, algebraic equation (system), Mellin transform, set of convergence, linearization of system.

Введение. Интегралы Меллина–Барнса являются обратными преобразованиями Меллина для отношений произведений конечного числа гамма-функций в композициях с линейными функциями. Частные случаи этих интегралов впервые появились в работах Б. Римана, связанных с теорией гипергеометрических функций. Позднее Х. Меллин развил их теорию [1], а Е. Барнс разработал метод получения асимптотических разложений для разных классов функций, определяемых степенными рядами и интегралами [2]. Отдельно следует подчеркнуть роль интегралов Меллина–Барнса в теории алгебраических уравнений. Впервые такое их применение было продемонстрировано Х. Меллином в работе 1921 года [3], где были найдены интегральные формулы для решения общего алгебраического уравнения. Интегральную формулу и неполную область сходимости Меллин привел без доказательства. Полное доказательство этой формулы с указанием истинной области сходимости было предъявлено И. А. Антиповой [4].

Проблема сходимости интегралов Меллина–Барнса привлекала внимание специалистов на протяжении последнего столетия. В одномерном случае вопрос о сходимости был решен в серии статей и монографий: А. Диксон и Б. Феррар [5], Л. Слейтер [6], Г. Бейтмен и А. Эрдейи [7]. Шаги к решению этой проблемы в многомерном случае были сделаны Х. Меллином, Р. Бушманом и Х. Сриваставой [8], О. Н. Ждановым и А. К. Цихом [9]. Окончательно область сходимости многомерного интеграла Меллина–Барнса найдена М. Пассаре, А. Цихом и Л. Нильсон [10].

Представляет интерес задача исследования сходимости интегралов Меллина–Барнса в граничных точках их областей сходимости. Для интеграла Меллина–Барнса, представляющего решения алгебраических уравнений, эта задача рассмотрена в работах [11; 12]. Интегральные преобразования Меллина для решения общей системы алгебраических уравнений исследовались в ряде современных работ [13; 14], в которых прямое преобразование было вычислено с помощью линеаризации системы (замены переменной специального вида). В данной работе исследовано множество сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего решение полиномиальной системы уравнений специального вида.

Преобразование Меллина мономиальной функции решения общей полиномиальной системы. Рассмотрим приведенную систему n полиномиальных уравнений:

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0,\ i = 1,\ \ldots,\ n \tag{1}$$

с неизвестными $y = (y_1,\ \ldots, y_n) \in T^n$ и переменными коэффициентами $x_\lambda^{(i)}$, где $\Lambda^{(i)} \subset \mathbb{Z}_{\geq}^n$ – фиксированные конечные подмножества; $y^\lambda = y_1^{\lambda_1}\cdots y_n^{\lambda_n}$; $m_i \in \mathbb{Z}_+$; $i = 1,\ \ldots,\ n.$ Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$, и пусть $N = \#\Lambda$ – число коэффициентов в системе (1). Множество коэффициентов этой системы пробегает векторное пространство $C^\Lambda \cong C_x^N$, в котором координаты точек $x = \left(x_\lambda^{(i)}\right)$ индексируются элементами $\lambda\in\Lambda.$ В работе [15] для мономиальной функции

$$\frac{1}{y^\mu(-x)} := \frac{1}{y_1^{\mu_1}(-x)\cdots y_n^{\mu_n}(-x)},\ \mu_i > 0, \tag{2}$$

составленной из координат $y_j(-x)$ решения системы уравнений (1), было вычислено прямое преобразование Меллина, определяемое интегралом

$$M\left[\frac{1}{y^\mu(-x)}\right](z) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} \frac{1}{y^\mu(-x)} x^{z-I}\,dx, \tag{3}$$

где $x^{z-I} = x_1^{z_1-1}\cdots x_N^{z_N-1},\ dx = dx_1\cdots dx_N.$

Множество сходимости интеграла, представляющего функцию вектор-решения полиномиальной системы уравнений специального вида. Рассмотрим приведенную систему двух полиномиальных уравнений вида

$$y_i^{m_i} + x_i y^{\lambda^{(i)}} - 1 = 0,\quad i = 1,\ 2, \tag{4}$$

с двумя переменными коэффициентами x_1, x_2. Обозначим через $\tilde\Delta$ определитель матрицы

$$\tilde\Psi = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} - m_1 & \lambda_1^{(2)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} - m_2 \end{pmatrix}$$

и предположим, что $\tilde\Delta > 0.$ Введем векторы $\tilde\psi_1^\perp = \left(\lambda_1^{(2)}, m_1 - \lambda_1^{(1)}\right),\ \ \tilde\psi_2^\perp = \left(m_2 - \lambda_2^{(2)}, \lambda_2^{(1)}\right),$ ортогональные вектор-строкам матрицы $\tilde\Psi$.

Теорема. Мономиальная функция $\dfrac{1}{y^\mu(-x)}$, составленная из координат решения системы (4), представляется следующим интегралом Меллина–Барнса:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^2}\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{\Gamma\left(\dfrac{\mu_i}{m_i}+\dfrac{1}{m_i}\langle\tilde\psi_i, z\rangle\right)\Gamma(z_i)}{\Gamma\left(\dfrac{\mu_i}{m_i}+\dfrac{1}{m_i}\langle\psi_i, z\rangle + 1\right)}\right]\times \tag{5}$$

$$\times\ Q(z_1, z_2)x_1^{-z_1}x_2^{-z_2}\,dz_1 dz_2,$$

где полином

$$Q(z_1, z_2) = \frac{1}{m_1 m_2}\times$$

$$\times\left(\mu_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2^{(1)}z_1 + \mu_2\lambda_1^{(2)}z_2 - \tilde\Delta z_1 z_2\right),$$

а вектор $\gamma\in\mathbb{R}^2$ выбирается из открытого множества

$$U = \left\{u\in\mathbb{R}_+^2 : \mu_i + \langle\tilde\psi_i, u\rangle > 0,\ i = 1,\ 2\right\}. \tag{6}$$

Множество сходимости интеграла (5) в переменных $\theta = \arg x$ определяется неравенствами

$$|\theta_i| < \frac{\pi}{m_i}\left(m_i - \lambda_i^{(i)}\right),\quad \left|\left\langle\tilde\psi_i^\perp, \theta\right\rangle\right| < \frac{\pi}{m_i}\tilde\Delta,\quad i = 1,\ 2. \tag{7}$$

Доказательство. Идея доказательства представления мономиальной функции $\frac{1}{y^{\mu}(-x)}$ интегралом (5) в секториальной области, определяемой неравенствами (7), заимствована в работе [4], поэтому первая часть доказательства излагается кратко.

1. Для простоты положим $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Начнем с описания секториальной области голоморфности функции

$$y\left(-x(\xi)\right) = y_1\left(-x(\xi)\right) y_2\left(-x(\xi)\right), \qquad (8)$$

где зависимость $x(\xi) = \left(x_1(\xi_1,\xi_2), x_2(\xi_1,\xi_2)\right)$ определена заменой переменных (линеаризацией) в системе [15], причем ветви радикалов $W_j^{\frac{1}{m_j}}$ выбраны условием их положительности при $\xi \in \mathbb{R}_+^2$. Рассмотрим функцию $y_i\left(-x(\xi)\right) = (1+\xi_i)^{\frac{1}{m_i}}$. Она голоморфна (как многозначная функция) вне прямой $L_i = \left\{\xi \in T^2 : 1+\xi_i = 0\right\}$, где $T^2 = \left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right)^2$. Более того, функция $y_i\left(-x(\xi)\right)$ голоморфна (и однозначна) в секториальной области S_{τ_i} над выпуклым множеством $\tau_i = \left\{\tau \in \mathbb{R}^2 : |\tau_i| < \pi\right\}$, где $\tau_i = \arg\xi_i$, $i = 1,\ 2$.

Следовательно, функция (8) голоморфна и однозначна в секториальной области S_τ над множеством $\tau = \left\{\tau \in \mathbb{R}^2 : |\tau_i| < \pi,\ i = 1,\ 2\right\}$. Заметим, что якобиан $\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)}$ линеаризации (в случае $n = N = 2$) обращается в нуль на множестве

$$\nabla_\xi = \left\{\xi \in T^2 : 1 + \frac{m_1 - \lambda_1^{(1)}}{m_1}\xi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{m_2 - \lambda_2^{(2)}}{m_2}\xi_2 + \frac{\tilde{\Delta}}{m_1 m_2}\xi_1\xi_2 = 0\right\}$$

(см. [15]). Оно при такой замене переходит в множество ветвления алгебраической функции $y(-x)$, т. е. дискриминантное множество ∇ системы уравнений (4). Полином переменных ξ_1, ξ_2, определяющий нулевое множество якобиана ∇_ξ, имеет положительные коэффициенты у всех мономов, поэтому существует выпуклое множество $\tau' \subset \tau \subset \mathbb{R}^2$, $0 \in \tau'$, такое, что в секториальной области $S_{\tau'}$ над каждой точкой $\tau \in \tau'$ расположен ортант $e^{i\tau}\mathbb{R}_+^2 = \left\{\xi = \left(r_1 e^{i\tau_1}, r_2 e^{i\tau_2}\right) : r_j > 0\right\}$, свободный от точек ∇_ξ.

Функции $(1+\xi_i)^{\frac{1}{m_i}}$, $i = 1,\ 2$, допускают выделение ветвей (со значением 1 при $\xi_i = 0$) в секториальной области S_τ. Следовательно, таким же свойством обладает отображение $x(\xi)$ и функция (8). Кроме того, функция $y(-x)$ голоморфно продолжается в область $S_{P^o} = x\left(S_{\tau'}\right)$ – образ секториальной области $S_{\tau'} \subset \mathbb{C}_\xi^2$ при отображении $x(\xi)$. Область S_{P^o} есть секториальная область над внутренностью выпуклого многоугольника P следующего вида

$$P = \left\{\theta \in \mathbb{R}^2 : |\theta_i| \le \frac{\pi}{m_i}\left(m_i - \lambda_i^{(i)}\right),\right.$$

$$\left.\left|\left\langle\tilde{\psi}_i^{\perp}, \theta\right\rangle\right| \le \frac{\pi}{m_i}\tilde{\Delta},\ i = 1,\ 2\right\}.$$

Итак, поскольку якобиан $\frac{\partial(x)}{\partial(\xi)}$ не обращается в нуль в $S_{\tau'}$, $x(\xi)$ отображает $S_{\tau'}$ на S_{P^o} локально биголоморфно. Тем самым для $x = x(\xi) \in S_{P^o}$ функция $y(-x)$, будучи представленной как $\prod_j \left(1+\xi_j\right)^{\frac{1}{m_j}}\Big|_{\xi = \xi^{-1}(x)}$, является голоморфной. В силу односвязности S_{P^o} она голоморфна, следовательно, голоморфна функция $\frac{1}{y(-x)}$.

Для доказательства представления мономиальной функции $\frac{1}{y(-x)}$ интегралом (8) нам необходимо констатировать еще одно ее важное свойство: на множестве S_{P^o} она удовлетворяет условию $\left|\frac{1}{y(-x)}\right| = O\left(\left|x^{-a}\right|\right)$ для всех $a \in U_1$, где U_1 – открытое множество (6) при $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Таким образом, применяя формулу обращения для многомерного преобразования Меллина (см. [4]), получаем представление функции $\frac{1}{y(-x)}$ в виде интеграла Меллина–Барнса вида (5) в секториальной области S_{P^o}.

2. Исследуем интеграл (5) на сходимость в граничных точках области S_{P^o}. Идея доказательства подробно изложена в работе [12]. Можно оценить модуль подынтегральной функции в (5) при $|\upsilon| \to \infty$ выражением вида

$$\prod_{j=1}^{2}\left[\frac{\left(|\upsilon_j|+1\right)^{\eta_j}\left(\left|\left\langle\tilde{\psi}_j, \upsilon\right\rangle\right|+1\right)^{\xi_j}}{\left(\left|\left\langle\psi_j, \upsilon\right\rangle\right|+1\right)^{\zeta_j}}\right]\tilde{Q}(u,\upsilon)\times$$

$$\times\, exp\left\{\left\langle\upsilon,\theta\right\rangle - \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(|\upsilon_j| + \frac{|\langle\tilde{\psi}_j,\upsilon\rangle|}{m_j} - \frac{|\langle\psi_j,\upsilon\rangle|}{m_j}\right)\right\}, \qquad (9)$$

где $\tilde{Q}(u,\upsilon)=|Q(z)|$, а показатели степеней определяются следующими формулами: $\eta_j = u_j - \frac{1}{2}$, $\xi_j = \frac{1}{m_j}\langle\tilde{\psi}_j, u\rangle + \frac{\mu_j}{m_j} - \frac{1}{2}$, $\zeta_j = \frac{1}{m_j}\langle\psi_j, u\rangle + \frac{\mu_j}{m_j} + \frac{1}{2}$, $j=1,2$.

Из вида выражения (9) следует, что сходимость интеграла (5) контролирует показатель экспоненты

$$\langle\upsilon,\theta\rangle - \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(|\upsilon_j| + \frac{|\langle\tilde{\psi}_j,\upsilon\rangle|}{m_j} - \frac{|\langle\psi_j,\upsilon\rangle|}{m_j}\right), \qquad (10)$$

степенной множитель

$$\prod_{j=1}^{2}\left[\frac{(|\upsilon_j|+1)^{\eta_j}\left(|\langle\tilde{\psi}_j,\upsilon\rangle|+1\right)^{\xi_j}}{\left(|\langle\psi_j,\upsilon\rangle|+1\right)^{\zeta_j}}\right], \qquad (11)$$

а также функция $\tilde{Q}(u,\upsilon)$, отличная от константы в случае интеграла, представляющего решение системы уравнений.

Если при фиксированном $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$ показатель экспоненты (10), зависящий от $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2)\in\mathbb{R}^2$, есть величина отрицательная, то экспоненциальный множитель (9) убывает и степенной множитель (11), и функция $\tilde{Q}(u,\upsilon)$ не могут нарушить сходимость интеграла. Эта ситуация будет иметь место при $\theta\in P^o$. Напротив, неограниченное возрастание показателя экспоненты (10) для какого-либо направления $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2)$ говорит о том, что для выбранного $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ интеграл будет расходиться, так как степенной множитель (11) и функция $\tilde{Q}(u,\upsilon)$ не смогут «погасить» рост экспоненциального множителя.

Пусть $\theta\in\partial P$. Если матрица Ψ, составленная из показателей системы (4), не содержит нулевых элементов, то P представляет собой восьмиугольник на рис. 1. Вершины восьмиугольника P имеют координаты $K_1\left(-\pi\frac{m_1-\lambda_1^{(1)}}{m_1}, \pi\frac{m_2-\lambda_2^{(2)}}{m_2}\right)$, $K_2\left(\pi\frac{m_1-\lambda_1^{(1)}}{m_1}, -\pi\frac{m_2-\lambda_2^{(2)}}{m_2}\right)$, $K_3\left(-\pi\frac{\lambda_2^{(1)}}{m_2}, \pi\frac{m_2-\lambda_2^{(2)}}{m_2}\right)$, $K_4\left(-\pi\frac{\lambda_2^{(1)}}{m_2}, \pi\frac{m_2-\lambda_2^{(2)}}{m_2}\right)$, $K_5\left(\pi\frac{m_1-\lambda_1^{(1)}}{m_1}, -\pi\frac{\lambda_1^{(2)}}{m_2}\right)$, $K_6\left(-\pi\frac{m_1-\lambda_1^{(1)}}{m_1}, \pi\frac{\lambda_1^{(2)}}{m_2}\right)$, $K_7\left(\pi\left(1-\frac{\lambda_2^{(1)}}{m_2}-\frac{\lambda_1^{(1)}}{m_1}\right), \pi\left(1-\frac{\lambda_1^{(2)}}{m_1}-\frac{\lambda_2^{(2)}}{m_2}\right)\right)$, $K_8\left(-\pi\left(1-\frac{\lambda_2^{(1)}}{m_2}-\frac{\lambda_1^{(1)}}{m_1}\right), -\pi\left(1-\frac{\lambda_1^{(2)}}{m_1}-\frac{\lambda_2^{(2)}}{m_2}\right)\right)$, стороны будем обозначать $[K_iK_j]$. Множество точек относительной внутренности стороны $[K_iK_j]$ будем обозначать (K_iK_j).

Он может вырождаться в шестиугольник, если один из показателей $\lambda_2^{(1)}$ или $\lambda_1^{(2)}$ равен нулю. Если $\lambda_2^{(1)}=\lambda_1^{(2)}=0$, то система (4) распадается на два уравнения, и эту ситуацию мы не рассматриваем. Проведем доказательство для случая, когда P – восьмиугольник. В других случаях оно будет аналогичным.

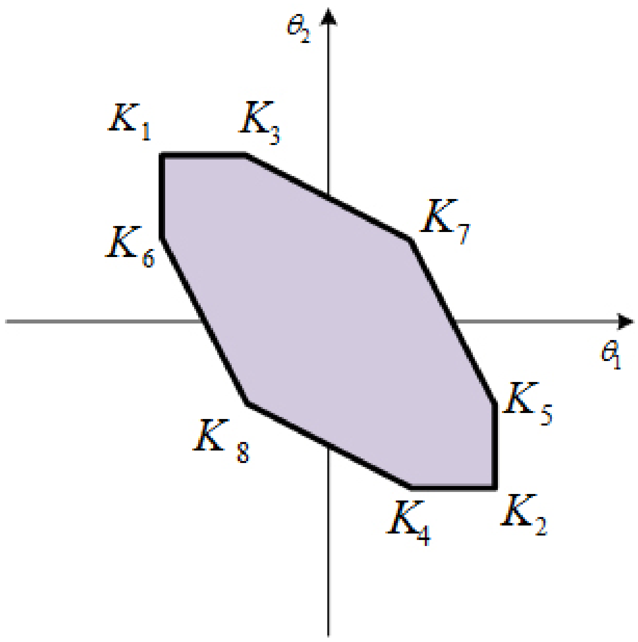

Рис. 1. Восьмиугольник P

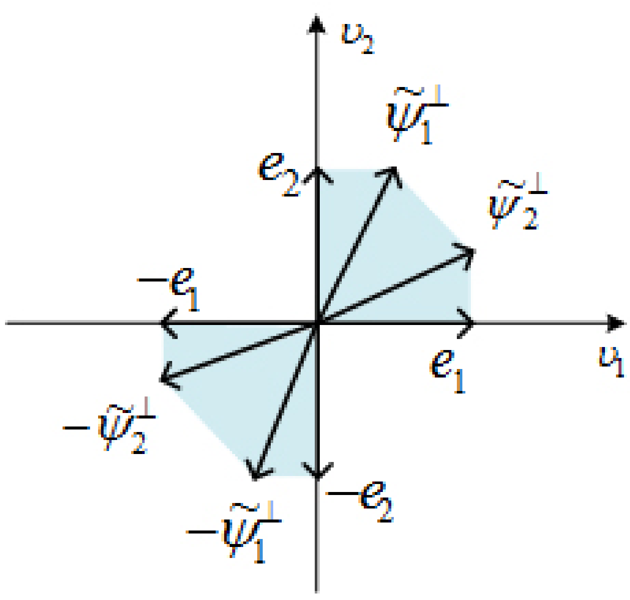

Рис. 2. Множество Σ

Как отмечалось ранее, поведение подынтегральной функции в (5) во многом зависит от размерности множества направлений υ, на которых показатель экспоненты в оценке (9) обращается в нуль при фиксированном θ. Объединение таких множеств по всем $\theta \in \partial P$ обозначим Σ. Это множество состоит из одномерных конусов $\sigma_1^{\pm}(e_i) := \left\{ r e_i \in \mathbb{R}^2, r \geq 0 \right\}$, $\sigma_1^{\pm}(\tilde{\psi}_i^{\perp}) := \left\{ r\tilde{\psi}_i^{\perp} \in \mathbb{R}^2, r \geq 0 \right\}$, $j = 1, 2$ и двумерных конусов

$$\sigma_2^{\pm}(e_1, \tilde{\psi}_2^{\perp}) := \left\{ r_1 e_1 + r_2 \tilde{\psi}_2^{\perp} \in \mathbb{R}^2, r_j \geq 0 \right\},$$

$$\sigma_2^{\pm}(\tilde{\psi}_1^{\perp}, e_2) := \left\{ r_1 \tilde{\psi}_1^{\perp} + r_2 e_2 \in \mathbb{R}^2, r_j \geq 0 \right\},$$

$$\sigma_2^{\pm}(\tilde{\psi}_1^{\perp}, \tilde{\psi}_2^{\perp}) := \left\{ r_1 \tilde{\psi}_1^{\perp} + r_2 \tilde{\psi}_2^{\perp} \in \mathbb{R}^2, r_j \geq 0 \right\}.$$

Для случая, когда P – восьмиугольник, множество Σ изображено на рис. 2. Если $\theta \in (K_1 K_3)$, то показатель экспоненты (10) обращается в нуль для всех $\upsilon \in \sigma_1^{+}(e_2)$ (и только для них). Для стороны (K_1K_6) соответствующим множеством зануления будет одномерный конус $\sigma_1^{-}(e_1)$. Для наклонных сторон (K_3K_7), $(K_7 K_5)$ показатель экспоненты (10) обращается в нуль в одномерных конусах $\sigma_1^{+}(\tilde{\psi}_1^{\perp})$ и $\sigma_1^{+}(\tilde{\psi}_2^{\perp})$ соответственно. Если $\theta = \left(-\pi \dfrac{m_1 - \lambda_1^{(1)}}{m_1}, \pi \dfrac{m_2 - \lambda_2^{(2)}}{m_2} \right)$ (вершина K_1), показатель экспоненты (10) обращается в нуль для всех $\upsilon \in \sigma_1^{+}(e_2) \cup \sigma_1^{-}(e_1)$. Для вершин K_3, K_7, K_5 такими конусами будут двумерные конусы $\sigma_2^{+}(\tilde{\psi}_1^{\perp}, e_2)$, $\sigma_2^{+}(\tilde{\psi}_1^{\perp}, \tilde{\psi}_2^{\perp})$, $\sigma_2^{+}(e_1, \tilde{\psi}_2^{\perp})$ соответственно. Для остальных сторон и вершин восьмиугольника картина будет симметричной (см. рис. 1, 2).

Требует детального исследования поведение интеграла (5) в окрестностях направлений $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2)$, на которых (10) обращается в нуль.

Рассмотрим сторону $[K_3 K_7]$ восьмиугольника P. Для других сторон рассуждения будут аналогичны. Зафиксируем точку $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (K_3 K_7)$. Конус $\sigma_1^{+}(\tilde{\psi}_1^{\perp})$ является гранью двумерного конуса $\sigma_2^{+}(\tilde{\psi}_1^{\perp}, e_2)$. Показатель экспоненты (10) для направлений υ из конуса $\sigma_2^{+}(\tilde{\psi}_1^{\perp}, e_2)$ примет вид

$$\frac{1}{\lambda_1^{(2)}} \left(\theta_2 - \pi \frac{m_2 - \lambda_2^{(2)}}{m_2} \right) \left\langle \tilde{\psi}_1, \upsilon \right\rangle,$$

причем $\dfrac{1}{\lambda_1^{(2)}} \left(\theta_2 - \pi \dfrac{m_2 - \lambda_2^{(2)}}{m_2} \right) < 0$ для $\theta_2 \in \left(\pi \left(1 - \dfrac{\lambda_1^{(2)}}{m_1} - \dfrac{\lambda_2^{(2)}}{m_2} \right), \pi \dfrac{m_2 - \lambda_2^{(2)}}{m_2} \right)$. С учетом оценки (9) исследование интеграла (5), при фиксированном $\theta \in (K_3 K_7)$, сводится к исследованию сходимости следующего интеграла:

$$const \iint\limits_{\sigma_2^{\pm}(\tilde{\psi}_1^{\perp}, e_2)} \frac{(\upsilon_1 + 1)^{\eta_1} (\upsilon_2 + 1)^{\eta_2} \left(\dfrac{1}{m_1} \left\langle \tilde{\psi}_1, \upsilon \right\rangle + 1 \right)^{\xi_1}}{\left(\dfrac{1}{m_1} \left\langle \psi_1, \upsilon \right\rangle + 1 \right)^{\zeta_1}} \times$$

$$\times \frac{\left(-\dfrac{1}{m_2} \left\langle \tilde{\psi}_2, \upsilon \right\rangle + 1 \right)^{\xi_2}}{\left(\dfrac{1}{m_2} \left\langle \psi_2, \upsilon \right\rangle + 1 \right)^{\zeta_2}} \times$$

$$\times \tilde{Q}(u, \upsilon) exp \left\{ \left(\theta_2 - \pi \frac{m_2 - \lambda_2^{(2)}}{m_2} \right) \left\langle \tilde{\psi}_1, \upsilon \right\rangle \right\} d\upsilon_1 d\upsilon_2. \quad (12)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Интеграл (12) расходится.

Доказательство леммы. В интеграле (12) сделаем замену переменных:

$$\begin{gathered} \upsilon_1 = \omega_1, \\ \left\langle \tilde{\psi}_1, \upsilon \right\rangle = \omega_2, \end{gathered} \quad (13)$$

якобиан которой равен ненулевой константе. В результате такой замены интеграл (12) примет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^2} \frac{L^{\eta_1} M^{\eta_2} \left(\dfrac{\omega_2}{m_1} + 1 \right)^{\xi_1} N^{\xi_2}}{V^{\zeta_1} R^{\zeta_2}} \times$$

$$\times \tilde{Q}_1(u, \omega) exp \left\{ \left(\theta_2 - \pi \frac{m_2 - \lambda_2^{(2)}}{m_2} \right) \omega_2 \right\} d\omega_1 d\omega_2, \quad (14)$$

где

$$L(\omega) = \omega_1 + 1, V(\omega) = \frac{\omega_2}{m_1} + \omega_1 + 1,$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\lambda_1^{(2)}} \left(\omega_2 - (\lambda_1^{(1)} - m_1) \omega_1 \right) + 1,$$

$$N(\omega) = \frac{1}{m_2 \lambda_1^{(2)}} \left(\tilde{\Delta} \omega_1 - (\lambda_2^{(2)} - m_2) \omega_2 \right) + 1,$$

$$R(\omega) = \frac{1}{m_2 \lambda_1^{(2)}} \left(\left(m_1 m_2 - \lambda_1^{(1)} m_2 - \tilde{\Delta} \right) \omega_1 + \lambda_2^{(2)} \omega_2 \right) + 1,$$

$$\tilde{Q}_1(u, \omega) = \tilde{Q}(u_1, u_2, \omega_1, \frac{1}{m_1 - \lambda_1^{(1)}} (\omega_2 - \lambda_1^{(2)}) \omega_1).$$

Представим интеграл (14) в виде повторного:

$$\int\limits_0^{\infty} I(\omega_2) \left(\frac{\omega_2}{m_1} + 1 \right)^{\xi_1} exp \left\{ \left(\theta_2 - \pi \frac{m_2 - \lambda_2^{(2)}}{m_2} \right) \omega_2 \right\} d\omega_2, \quad (15)$$

где

$$I(\omega_2) = \int\limits_0^{\infty} \frac{L^{\eta_1} M^{\eta_2} N^{\xi_2}}{V^{\zeta_1} R^{\zeta_2}} \tilde{Q}_1(u, \omega) d\omega_1. \quad (16)$$

Исследуем сходимость интеграла (16). Степень подынтегральной функции по переменной ω_1 в (16) равна

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\eta_j-\zeta_j\right)+\xi_2+2=-3-\left(\frac{1}{m_1}\langle\tilde{\psi}_1,u\rangle+\frac{\mu_1}{m_1}-\frac{1}{2}\right)+2=$$

$$=-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{m_1}\langle\tilde{\psi}_1,u\rangle+\frac{\mu_1}{m_1}\right)<-\frac{1}{2}. \qquad (17)$$

Здесь выражение в скобках больше нуля в силу условий (6). Степенной множитель $\tilde{Q}_1(u,\omega)$ дает существенный вклад (слагаемое, равное 2) в сумму (17), так как $degQ(z_1,z_2)=2$ при условии $\tilde{\Delta}>0$. Из неравенств (17) следует, что интеграл (16) расходится. Как следствие, расходится и интеграл (15). Лемма доказана.

Исследуем вершины восьмиугольника P. Точке K_1 соответствуют в множестве Σ два одномерных конусах $\sigma_1^+(e_2)$ и $\sigma_1^-(e_1)$. Поэтому, чтобы констатировать расходимость интеграла (5) в точке K_1, необходимо и достаточно исследовать эту точку в составе сторон $[K_1K_3]$ и $[K_1K_6]$. Аналогичным свойством обладает симметричная точка K_2.

Прообразы вершин K_3, K_7, K_5, K_4, K_8, K_6 восьмиугольника P также не входят в множество сходимости интеграла (5). Действительно, в этих точках зануление показателя экспоненты (10) происходит по всем направлениям $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2)$, принадлежащим двумерным конусам, которые были перечислены выше. Поэтому задача сводится к исследованию сходимости двойных интегралов от степенных функций по этим конусам. Эти интегралы расходятся, так как степенной множитель (11) и функция $\tilde{Q}(u,\upsilon)$ имеют суммарную степень по переменным υ_1,υ_2, равную -1.

Итак, мы можем сделать вывод: множество сходимости интеграла (5) есть секториальная область S_{p^o}, основание которой определяется неравенствами (7). Таким образом, теорема доказана.

Заключение. В данной работе получено интегральное представление типа Меллина–Барнса мономиальной функции вектор-решения системы полиномиальных уравнений специального вида с указанием множества сходимости.

Благодарности. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований № 15-31-20008-мол_а_вед, 14-01-00283-а.

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research № 15-31-20008-mol_a_ved, 14-01-00283-a.

Библиографические ссылки

1. Mellin H. R. Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und der hypergeometrischen Funktionen // Acta Soc. Sci. Fennica. 1896. Vol. 21, No. 1. P. 1–115.

2. Barnes E. W. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series // Proc. London Math. Soc. 1907. Vol. 5, No. 2. P. 59–116.

3. Mellin H. R. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1921. Vol. 172. P. 658–661.

4. Antipova I. A. Inversion of many-dimensional Mellin transforms and solutions of algebraic equations // Sb. Math. 2007. Vol. 198, No. 4. P. 447–463.

5. Dixon A. L., Ferrar W. L. A class of discontinuous integrals // The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series). 1936. Vol. 7. P. 81–96.

6. Slater L. J. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge University Press, 1966. 143 p.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М. : Наука, 1973. 294 с.

8. Buschman R., Srivastava H. Convergence regions for some multiple Mellin-Barnes contour integrals representing generalized hypergeometric functions // Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 1986. Vol. 17, No. 5. P. 605–609.

9. Zhdanov O. N., Tsikh A. K. Studying the multiple Mellin-Barnes integrals by means of multidimensional residues // Sib. Math. J. 1998. Vol. 39, No. 2. P. 245–260.

10. Nilsson L. Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions // Doctoral Thesis, Department of Mathematics. Sweden : Stockholm University, 2009.

11. Антипова И. А., Зыкова Т. В. О множестве сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего решения тетраномиального алгебраического уравнения // Журн. СФУ. Сер. «Матем. и физ.». 2010. Т. 3, № 4. С. 475–486.

12. Зыкова Т. В. О сходимости интеграла Меллина–Барнса на границе его области сходимости // Вестник КемГУ. 2011. Т. 47, № 3/1. С. 199–202.

13. Антипова И. А. О мономиальной функции вектор-решения общей системы алгебраических уравнений // Вестник Красноярского госуниверситета. Серия «Физ.-мат. науки». 2005. № 1. С. 106–111.

14. Степаненко В. А. О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций // Вестник Красноярского госуниверситета. Серия «Физ.-мат. науки». 2003. № 2. С. 35–48.

15. Antipova I. A., Zykova T. V. Mellin transform for monomial functions of the solution to the general polynomial system // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2013. Vol. 6, No. 2. P. 150–156.

References

1. Mellin H. R. Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und der hypergeometrischen Funktionen. *Acta Soc. Sci. Fennica.* 1896, Vol. 21, No. 1, P. 1–115.

2. Barnes E. W. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series. Proc. London Math. Soc. 1907, Vol. 5, No. 2, P. 59–116.

3. Mellin H. R. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1921, Vol. 172, P. 658–661.

4. Antipova I. A. Inversion of many-dimensional Mellin transforms and solutions of algebraic equations. *Sb. Math.* 2007, Vol. 198, No. 4, P. 447–463.

5. Dixon A. L., Ferrar W. L. A class of discontinuous integrals. *The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series)*. 1936, Vol. 7, P. 81–96.

6. Slater L. J. Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge University Press. 1966, 143 p.

7. Beytmen G., Erdeyi A. *Vyshii transtsendentnye funktsii* [The highest transcendental functions]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 294 p.

8. Buschman R., Srivastava H. Convergence regions for some multiple Mellin-Barnes contour integrals representing generalized hypergeometric functions. *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.* 1986, Vol. 17, No. 5, P. 605–609.

9. Zhdanov O. N., Tsikh A. K. Studying the multiple Mellin-Barnes integrals by means of multidimensional residues. *Sib. Math. J.* 1998, Vol. 39, No. 2, P. 245–260.

10. Nilsson L. Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions. Doctoral Thesis, Department of Mathematics. Stockholm University. Sweden. 2009.

11. Antipova I. A., Zykova T. V. [On the Set of Convergence for Mellin-Barnes Integral Representing Solutions to the Tetranomial Algebraic Equation]. *Zhurnal Sibirskogo Federalnogo universiteta. Seriya matematika & fizika*. 2010, Vol. 3, No. 4, P. 475–486 (In Russ.).

12. Zykova T. V. [About convergence of Mellin-Barnes integral on border of his area of convergence]. *Vestnik KemGU*. 2011, Vol. 47, No. 3/1, P. 199–202 (In Russ.).

13. Antipova I. A. [About monomial function solution vector of the general system of the algebraic equations]. *Vestnik Krasnoyarskogo gosuniversiteta. Seriya fiz.-mat. nauki.* 2005, No. 1, P. 106–111 (In Russ.).

14. Stepanenko V. A. [About the solution of system of the algebraic equations from unknown by means of hyper geometrical functions]. *Vestnik Krasnoyarskogo gosuniversiteta. Seriya fiz.-mat. nauki.* 2003, No. 2, P. 35–48 (In Russ.).

15. Antipova I. A., Zykova T. V. Mellin transform for monomial functions of the solution to the general polynomial system. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* 2013, Vol. 6, No. 2, P. 150–156.

© Зыкова Т. В., 2015