

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПРИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОМ ПОЛИРОВАНИИ

Рассматривается задача моделирования двумерного электростатического поля при электрохимическом полировании на основе биполярного электрода. Проводится сравнительный анализ результатов численного моделирования в программном комплексе COSMOS/M и пакете математических вычислений Maple.

Ключевые слова: численное моделирование, электростатическое поле, электрохимическое полирование.

Электрохимическое полирование (ЭХП) широко применяется в производстве деталей летательных аппаратов и занимает ведущее место в доводочных операциях [1].

В прикладной электрохимии широко используется биполярный электрод (БПЭ), позволяющий улучшить равномерность распределения тока по электроду. Биполярный метод электрохимической обработки применяется при полировке труб, снятии заусенцев, прошивке отверстий, в технологических процессах травления, обезжиривания и др. [2].

При электрохимическом полировании проблема равномерности распределения тока по поверхности деталей является первостепенной. От характера распределения тока зависит качество поверхности, в том числе ее шероховатость [3; 4].

В качестве объекта исследования рассматривается электрическое поле, возникающее при доводке поверхности детали электрохимическим полированием на основе биполярного электрода. Задачами исследования являются создание численной двумерной модели распределения электростатического поля в межэлектродном зазоре (МЭЗ) и разработка алгоритма реализации численного решения в среде интегрированных пакетов конечно-элементных расчетов.

Исследованию электрических полей МЭЗ посвящен ряд работ. Одни исследователи выявляли распределение потенциала экспериментальным путем, т. е. непосредственным измерением или моделированием, другие пытались выполнить аналитическое решение. В этих работах описаны случаи с практически неизменными границами поля [4].

Сложность исследования электрического поля при электрохимической обработке заключается в изменении граничных условий, что приводит к необходимости упрощенного подхода, например, к введению понятия идеального процесса, обусловленного действием лишь одного поля [4].

При подаче потенциалов на электроды системы из анода, катода и разделяющего их электролита, в системе создается электрическое поле (рис. 1). При допущении, что электроды неполяризуемы, их форма и расстояние между ними неизменны во времени, электролит – однофазнопроводящая жидкость, свойства электролита неизменны во времени, возникающее поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла [5]. Для решения системы уравнений Максвелла широко используется метод конечных элементов (МКЭ) и его модификации. Наиболее распространенным методом решения задач электромагнитизма является переход от системы уравнений Максвелла к уравнениям второго порядка относительно напряженности электрического поля или напряженности магнитного поля [6].

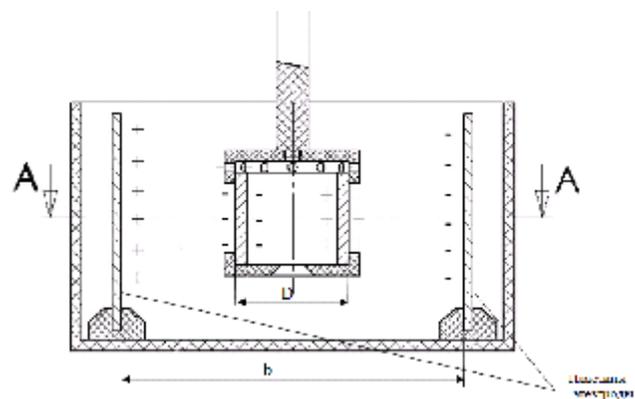


Рис. 1. Принципиальная схема электрохимического полирования

Уравнения Максвелла, используемые в конечно-элементном расчете, имеют следующий вид [6]:

$$\nabla \times H = J + \partial D / \partial t, \quad (1)$$

$$\nabla \times E = -\partial B / \partial t, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot D = \rho, \quad (4)$$

где H и E – напряженность магнитного и электрического полей соответственно; B , D – плотности магнитного и электрического потоков; J – плотность тока в проводнике; ρ – плотность электрического заряда; ∇ – оператор градиента.

Составляющие уравнения имеют следующий вид:

$$B = \mu(B)(H + H_c), \quad (5)$$

$$J = \sigma \cdot E, \quad (6)$$

$$D = \varepsilon \cdot E, \quad (7)$$

где σ – электропроводность; μ – магнитная проницаемость; ε – диэлектрическая постоянная; H_c – коэрцитивность постоянного магнита.

При двумерном расчете плотность потока B выражена как функция векторного потенциала A :

$$B = \nabla \cdot A, \quad (8)$$

где A удовлетворяет условию уникальности

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (9)$$

Подставляя уравнения (8) и (5) в уравнения (1) и (2) и сокращая частную производную по времени $\partial A/\partial t$, получают следующее [6]:

$$\nabla \times (v(B) \nabla \times A) = J + \nabla \times H_c, \quad (10)$$

$$\nabla \times E = \nabla \times (\partial A/\partial t), \quad (11)$$

где v – удельное магнитное сопротивление, $v = (1/\mu)$.

Уравнение (11) предполагает

$$E = \partial A/\partial t - \nabla \phi, \quad (12)$$

где ϕ – сокращенный электрический скалярный потенциал.

Объединение этого уравнения с составляющим уравнением (1–6) приводит к следующему:

$$J_e = -\sigma(\partial A/\partial t + \nabla \phi). \quad (13)$$

Полная плотность тока в уравнении (10) может состоять из токов источника J_s и вихревых токов J_e , поэтому уравнение (10) можно записать в следующем виде [6]:

$$\nabla \times (v(B) \nabla \times A) + \sigma \partial A/\partial t + \sigma \nabla \phi = J_s + \nabla \times H_c. \quad (14)$$

Для двумерных моделей в плоскости xu единственные ненулевые компоненты A и $V\phi$ – это z -компоненты, являющиеся функциями только от x и y , и не изменяются по направлению z . Таким образом, это уравнение принимает следующую скалярную форму:

$$\partial/\partial x (v \partial A/\partial x) + \partial/\partial y (v \partial A/\partial y) - \sigma \partial A/\partial t = -J_s - \partial H_{cy}/\partial x + \partial H_{cx}/\partial y. \quad (15)$$

В случае осесимметричности, если принять z за азимутальное направление, единственным ненулевым компонентом A будет азимутальный. В этом случае уравнение (15) принимает следующую скалярную форму:

$$\partial/\partial x (v \partial A/\partial x + vA/x) + \partial/\partial y (v \partial A/\partial y) - \sigma \partial A/\partial t = -J_s + \partial H_{cy}/\partial x - \partial H_{cx}/\partial y. \quad (16)$$

В осесимметричном случае x и y соответствуют радиальному и осевому компонентам цилиндрических координат [6].

Для решения поставленной задачи использована программа GEOSTAR и модуль ESTAR для моделирования электрических полей в двух- и трехэлектродных ячейках. GEOSTAR выполняет функции пре- и постпроцессора для системы COSMOS/M. Геометрические возможности GEOSTAR базируются на методе смешанных граничных представлений и параметрических кубических уравнениях. Теория, используемая в ESTAR, основана на применении теории потенциальных функций к уравнениям Максвелла. Двухмерный и осесимметричный расчеты в ESTAR основаны на уравнениях (15) и (16), уравнения (1)–(14) выступают в качестве исходных данных [6].

Моделируется реальная схема электрохимического полирования цилиндрической трубки, установленной симметрично относительно двух плоских электродов (рис. 1). После цикла обработки полярность подключения электродов меняют на противоположную, либо поворачивают деталь на 180° относительно ее оси. Особенностью схемы является то, что обрабатываемая деталь играет роль биполярного электрода, т. е. на ее поверхности одновременно протекают анодные и катодные реакции. Ток к обрабатываемой детали подводится через электролит сразу по всей ее поверхности. Такое решение токоподво-

да исключает структурные изменения металла и прижоги, исчезает погрешность обработки [7].

Для понимания явлений, протекающих на биполярном электроде, в работе [2] рассмотрена причина, вызывающая одновременное протекание катодной и анодной реакций на ее поверхности. Физическая природа этого явления связана с появлением поверхностных зарядов разных знаков при протекании тока через границу неоднородных сред (рис. 2).

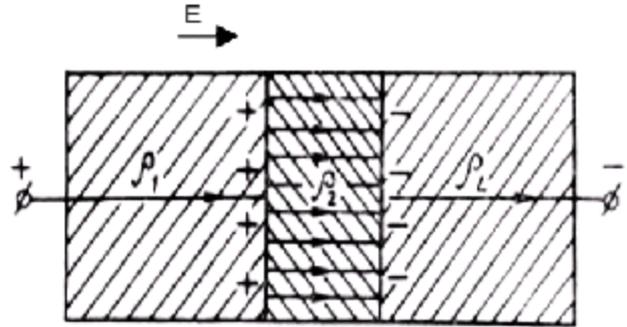


Рис. 2. Стационарное электрическое поле в проводнике, состоящем из участков с разным удельным сопротивлением ($\rho_2 > \rho_1$) [2]

Скачок нормальной составляющей напряженности электрического поля, происходящий при протекании тока через границу сред с разным удельным сопротивлением [2]

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_1 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right),$$

где $E_{1,2}$ – нормальная составляющая электрического поля; $\rho_{1,2}$ – удельное сопротивление среды.

Поверхностная плотность появляющихся зарядов равна

$$\sigma = \varepsilon_0 E_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right),$$

где ε – диэлектрическая проницаемость.

В случае $\rho_2 \gg \rho_1$ плотность зарядов $\sigma = \varepsilon_0 E_2 = \varepsilon_0 \rho_2 j_2$.

Если электрический ток течет из среды с меньшим удельным сопротивлением в среду с большим удельным сопротивлением, то поверхность раздела заряжается положительно, а при обратном направлении тока – отрицательно. Стационарные заряды на границе двух сред возникают вследствие скопления здесь заряженных частиц при установлении стационарного режима и затем непрерывно обновляются в процессе прохождения тока. Так как биполярный электрод находится внутри электрического поля и силовые линии проходят через него, то его поверхность несет положительные и отрицательные заряды. Соответственно протекают катодные и анодные электрохимические реакции [2].

Исследованию распределения тока по биполярному электроду в технической электрохимии посвящен ряд работ [2; 4; 8]. Основное внимание в этих работах уделяется изучению распределения тока по биполярному электроду.

Электростатическое поле исследовалось на модели, исходная схема которой показана на рис. 3. Здесь область, ограниченная точками (1, 2, 3, 4) соответствует сечению А–А (рис. 1) и представляет собой электропроводящую среду (в ЭХП – электролит); линии 12, 13, 14, 15, 7, 8, 5, 6 –

поверхности электродов; линии 9–10–11, 16–17–18 – поверхности обрабатываемой детали. По линиям 12–13, 14–15, 7–8, 5–6 моделируемая область имеет приложенные нагрузки в виде электрического напряжения, граничный потенциал вдоль этих линий будет равен: $\varphi_{12-13} = +16$ В; $\varphi_{7-8} = 0$ В. Для конечно-элементного разбиения расчетной области модели выбран плоский треугольный элемент.

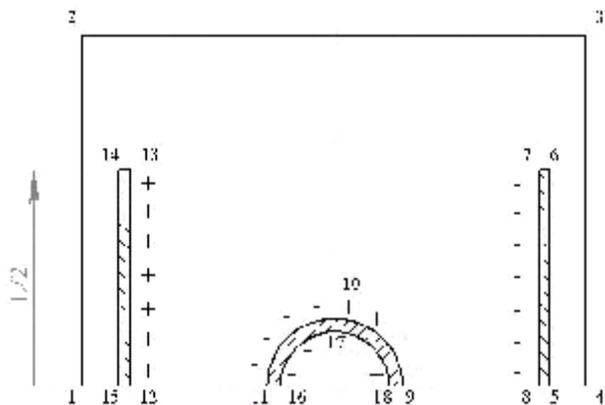


Рис. 3. Исходная схема для расчета в программе COSMOS/M

В процессе моделирования двумерного электростатического поля при электрохимическом полировании рассмотрены случаи, когда ширина плоского электрода (L) в три и более раз больше наружного диаметра детали (D), сопротивление единичного поперечного сечения электролита (R) равно или больше поляризационного сопротивления (r).

Сопротивление поперечного сечения электролита $\frac{1}{R} = \chi \cdot b$, где χ – удельная электропроводность (табличные значения [7]); b – межэлектродное расстояние.

Для рассматриваемых случаев обработка ведется в нейтральном водном растворе солей при плотности тока $i = 0,2 \dots 10$ А/см²; для достижения напряжения U до 16 В; материал электродов должен быть устойчив при подаче анодного потенциала; материал образца – медь; $D = 47$ мм; $L = 150$ мм; $b = 140$ мм; $\chi = 24,73$ 1/Ом·м для 5М NaCl [7]; анодное поляризационное сопротивление $r_a \approx 0,014$ Ом; ка-

тодное поляризационное сопротивление $r_k \approx 0,4$ Ом (по анодным и катодным поляризационным кривым [7]).

$$\frac{1}{R} = \chi \cdot b = 24,73 \cdot 0,014 = 0,346 \quad (R \gg 3 \text{ Ом});$$

$$r = 2r_a + 2r_k = 0,828 \text{ Ом, т. е. } R > r.$$

Также рассмотрены случаи, когда ширина плоского электрода меньше наружного диаметра детали $L/D < 3$, сопротивление единичного поперечного сечения электролита равно или больше поляризационного.

В результате расчетов установлено распределение напряженности электрического поля в исследуемой области, на основании этого получено распределение плотности тока по обрабатываемой поверхности (рис. 4, 5).

Значения потенциалов в узлах конечно-элементной сетки (рис. 5, б) по обрабатываемой поверхности (рис. 5, а) приведены в таблице.

Неравномерность распределения потенциала по поверхности обрабатываемой детали составляет $\approx 0,78\%$.

Наиболее равномерное распределение по всей поверхности обрабатываемой детали, обращенной к катоду, потенциалов и силовых линий электрического тока происходит, когда ширина плоского электрода в три и более раз больше наружного диаметра детали $L/D \geq 3$ (рис. 4, 5).

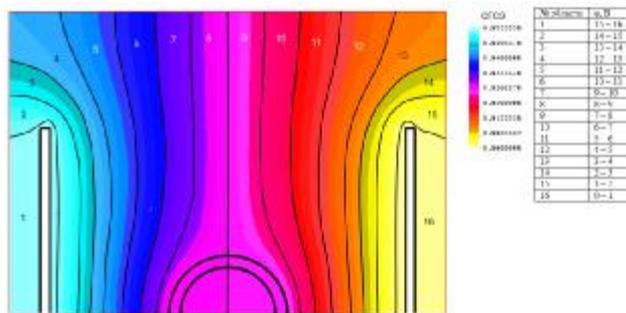


Рис. 4. Картина распределения потенциалов при $L/D \geq 3$ (ESTAR)

В рассматриваемых случаях, когда ширина плоского электрода в три и более раз меньше наружного диаметра детали $L/D < 3$, возникают краевые эффекты и происхо-

Таблица

Номер конечно-элементного узла	Значение потенциала, ф	
	СГСЭ	СИ
229	0,026 46	7,938
230	0,026 46	7,938
231	0,026 47	7,941
232	0,026 47	7,941
233	0,026 48	7,944
234	0,026 49	7,947
235	0,026 51	7,952
236	0,026 52	7,956
237	0,026 54	7,962
238	0,026 56	7,968
239	0,026 58	7,974
240	0,026 60	7,980
241	0,026 62	7,986
242	0,026 65	7,995
243	0,026 67	8,000

дит неравномерное распределение потенциалов по поверхности обрабатываемой детали.

Для сравнения результатов численного моделирования был использован конечно-разностный метод.

В работе [8], посвященной разработке и исследованию аналитических и численных моделей электрических полей, возникающих в системах на основе биполярного электрода, получены следующие разностные схемы для вычисления распределения электрического поля:

$$U(x, y) = \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_r)U_r + (\varepsilon_0 + \varepsilon_l)U_l + (\varepsilon_0 + \varepsilon_t)U_t + (\varepsilon_0 + \varepsilon_b)U_b}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_r) + (\varepsilon_0 + \varepsilon_l) + (\varepsilon_0 + \varepsilon_t) + (\varepsilon_0 + \varepsilon_b)}, \quad (17)$$

$$U(x, y) = \frac{(\sigma_0 + \sigma_r)U_r + (\sigma_0 + \sigma_l)U_l + (\sigma_0 + \sigma_t)U_t + (\sigma_0 + \sigma_b)U_b}{(\sigma_0 + \sigma_r) + (\sigma_0 + \sigma_l) + (\sigma_0 + \sigma_t) + (\sigma_0 + \sigma_b)}, \quad (18)$$

где $U_r = U(x + h_x, y)$; $U_l = U(x - h_x, y)$; $U_t = U(x, y + h_y)$; $U_b = U(x, y - h_y)$; $U_0 = U(x, y)$; $\varepsilon_0 = \varepsilon(x, y)$; $\varepsilon_r = \varepsilon(x + h_x, y)$; $\varepsilon_l = \varepsilon(x - h_x, y)$; $\varepsilon_t = \varepsilon(x, y + h_y)$; $\varepsilon_b = \varepsilon(x, y - h_y)$; $\sigma_0 = \sigma(x, y)$; $\sigma_r = \sigma(x + h_x, y)$; $\sigma_l = \sigma(x - h_x, y)$; $\sigma_t = \sigma(x, y + h_y)$; $\sigma_b = \sigma(x, y - h_y)$; h – размер ячейки сетки.

При этом в ячейках сетки, соответствующих электродам, устанавливается постоянное напряжение, равное

напряжению моделируемого электрода; в ячейках, граничащих с проводниками, потенциал вычисляется по формуле (18), а в остальных ячейках поле вычисляется по формуле (17). Можно задавать различные конфигурации электродов и параметры электролита, решать задачу оптимизации параметров распределения поля [8].

Исходя из этих условий, нами реализована предложенная в [8] математическая модель двумерного электростатического поля применительно к электрохимическому полированию в пакете математических вычислений Maple. Для реализации численного решения в Maple разработан алгоритм расчета, заключающийся в следующем: задается исследуемая область; исследуемая область разбивается на конечно-разностную сетку; задаются численные значения для каждого моделируемого объекта области (определяется проводящая среда – задается электропроводность среды, 1/Ом·м; потенциал электродов, В); составляется матрица размером $n \times m$; выполняется расчет, используя разностные схемы (17) и (18).

В результате расчетов получены картины распределения электрических потенциалов в исследуемой области, плотности тока по поверхности обрабатываемой детали и силовых линий электрического тока.

Картины распределения потенциалов и силовых линий электрического тока в рассматриваемом случае, когда ширина плоского электрода в три и более раз больше наружного диаметра детали $L/D \geq 3$, распределяются почти равномерно по всей поверхности обрабатываемой

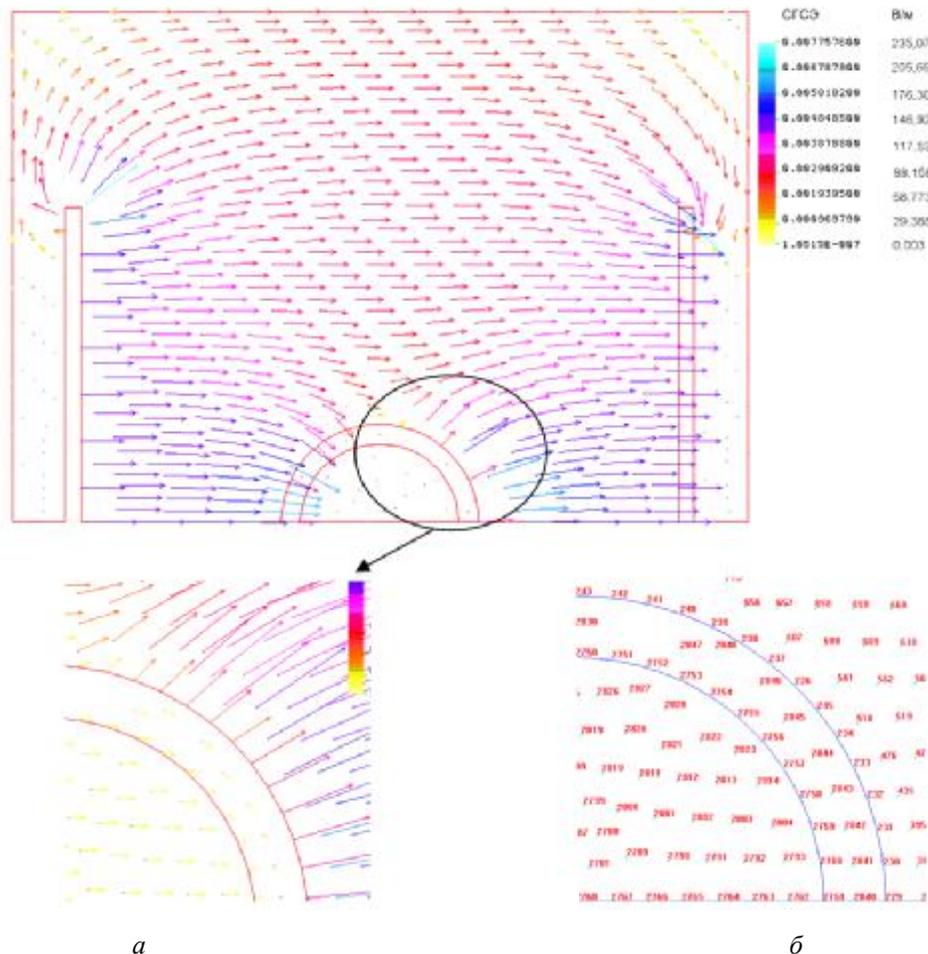


Рис. 5. Силовые линии электрического тока при $L/D \geq 3$ (ESTAR): а – увеличенный фрагмент; б – номера узлов сетки

детали, обращенной к катоду (рис. 6; 7, а). Неравномерность распределения потенциала по поверхности обрабатываемой детали составляет $\approx 1,28\%$ (рис. 7, б).

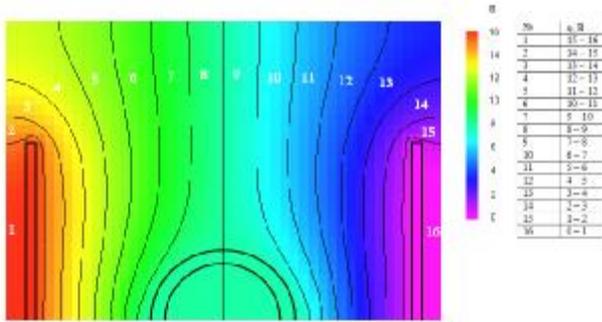


Рис. 6. Распределение электрических потенциалов при $L/D \geq 3$ (Maple)

В рассматриваемых случаях, когда ширина плоского электрода в три и более раз меньше наружного диаметра детали $L/D < 3$, возникают краевые эффекты, происходит неравномерное распределение потенциалов по поверхности обрабатываемой детали. Полученные картины качественно и количественно повторяют результаты моделирования в ESTAR методом конечных элементов.

Изменения распределения потенциала по обрабатываемой поверхности, полученные в результате численного моделирования методом конечных элементов и методом конечных разностей, сведены в графики (рис. 8).

Равномерность распределения плотности тока по обрабатываемой поверхности (рис. 7, б), учитывая линейную зависимость шероховатости поверхности от плотности тока, определяет качество поверхности, в том числе ее шероховатость. Влиять на распределение плотности тока по обрабатываемой поверхности можно, изменяя

геометрические параметры L и D , а также физико-химические свойства электролита.

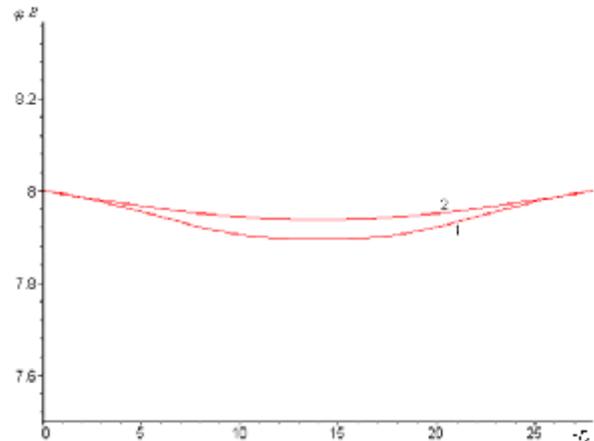


Рис. 8. Распределение электрического потенциала по обрабатываемой поверхности: 1 – кривая распределения электрического потенциала по обрабатываемой поверхности при $L/D \geq 3$, Maple; 2 – кривая распределения электрического потенциала по обрабатываемой поверхности при $L/D \geq 3$, ESTAR

Таким образом, в работе реализована предложенная в [9] математическая модель двумерного электростатического поля применительно к электрохимическому полированию. Численное моделирование электростатических полей в МЭЗ выполнено в среде интегрированного пакета конечно-элементных расчетов COSMOS/M (модуль ESTAR) и конечно-разностный расчет в Maple. Сравнительный анализ результатов численного моделирования в Maple и COSMOS/M показал расхождение $\approx 2\%$.

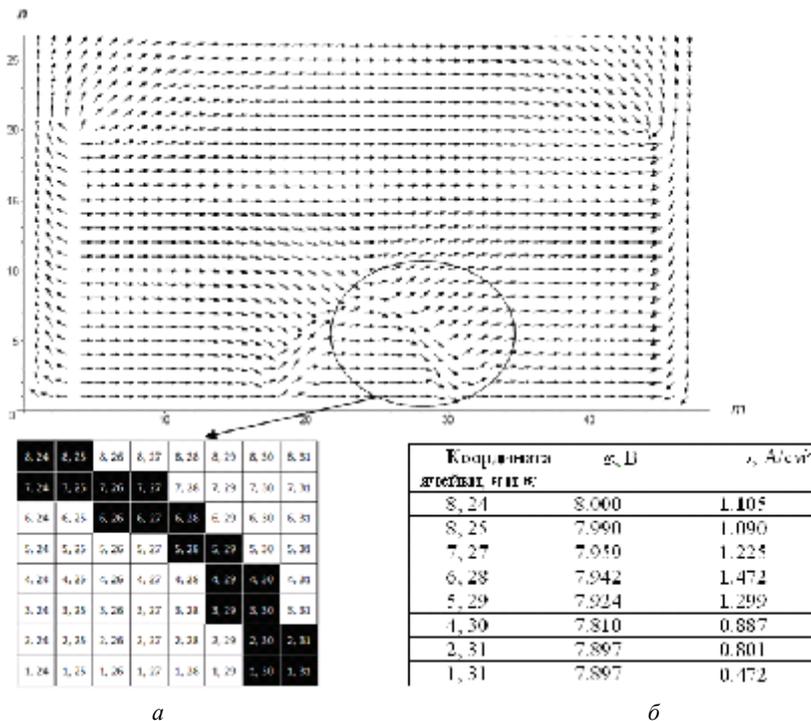


Рис. 7. Силовые линии электрического тока при $L/D \geq 3$ (Maple): а – увеличенный фрагмент (черным цветом выделены координаты ячеек, описывающих область поверхности детали); б – изменение распределения потенциалов и плотности тока по обрабатываемой поверхности

Силовые линии электрического тока распределяются наиболее равномерно по всей поверхности обрабатываемой детали, обращенной к катоду, когда ширина плоского электрода в три и более раз больше наружного диаметра детали, что ведет к равномерной обработке поверхности. При других рассматриваемых случаях – равномерность обработки не достигается из-за возникновения краевых эффектов.

Результаты численного моделирования подтверждают технологические возможности метода ЭХП с БПЭ по обработке полых цилиндрических деталей.

Использование численного моделирования электростатических полей в МЭЗ в условиях ЭХП позволяет существенно сократить время и затраты при разработке новых технологических процессов.

Библиографический список

1. Воробей, В. В. Теоретические основы проектирования технологических процессов ракетных двигателей. Технология производства жидкостных ракетных двигателей / В. В. Воробей, В. Е. Логинов. М. : Дрофа, 2007.
2. Мороз, И. И. Биполярный метод электрохимической обработки и некоторые его технологические возможности // И. И. Мороз, В. Ф. Орлов, Б. И. Чугунов // Электронная обработка материалов. 1982. № 6. С. 19–23.

3. Экслер, Л. И. Классификация параметров шероховатости / Л. И. Экслер // Технологические методы повышения качества поверхности деталей машин : сб. ст. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. С. 140–147.

4. Вдовенко, В. Г. Эффективность электрохимической обработки деталей : моногр. / В. Г. Вдовенко. Красноярск : Изд-во Краснояр. гос. ун-та, 1991.

5. Monk, P. A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations / P. Monk // Numer. Math. 1992. Vol. 63. P. 243–261.

6. COSMOS Advanced Modules. Part 2 ESTAR / Low Frequency Electromagnetic Analysis. 1996.

7. Пат. Российская Федерация, 7С25F3/16. Способ электрохимического полирования / Шестаков И. Я., Бабкина Л. А. № 2229543 ; заявл. 15.07.2002 ; опубл. 27.05.2004, Бюл. № 15. Приоритет от 15.07.2002.

8. Мурашев, Д. А. Математическое моделирование электрических полей в системах с биполярным электродом : автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Д. А. Мурашев. Саратов : Саратов. гос. техн. ун-т, 2006.

9. Шестаков, И. Я. О возможностях электрохимического полирования / И. Я. Шестаков, Л. А. Бабкина, А. Н. Жмурко // Решетневские чтения : материалы VII Всерос. научн.-практ. конф. ; Сиб. гос. аэрокосм. ун-т. Красноярск, 2003.

L. A. Babkina, I. Ya. Shestakov, A. S. Kvasov

NUMERICAL MODELING BY TWO-DIMENSIONAL ELECTROSTATIC FIELDS AT ELECTROCHEMICAL POLISHING

Modeling problem of the two-dimensional electrostatic field at electrochemical polish is considered. Comparative analysis of results of numerical modeling is executed in the programs COSMOS/M and Maple.

Keywords: numerical modeling, electrostatic field, electrochemical polish.

УДК 519.876

И. М. Митасов, А. Н. Завьялкин

МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОФАКТОРНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Задача определения значений параметров многофакторной регрессионной модели обычно решается методом наименьших квадратов (НК) и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Эта система может быть вырожденной в силу зависимости векторов значений факторов. Вырожденность приводит к срыву вычислительного процесса. Предлагается метод определения параметров на основе проектирования вектора значений моделируемого показателя на линейное пространство независимых векторов значений факторов.

Ключевые слова: метод, факторы, модель, выборка, проектирование.

В задачах многофакторного регрессионного анализа обычно в рамках одной вычислительной процедуры рассматривается множество многофакторных регрессионных моделей, среди которых выбирается оптимальная в смысле некоторого критерия. При этом решается множество систем линейных алгебраических уравнений. Не-

которые из этих систем имеют вырожденную матрицу, что приводит к срыву вычислительного процесса.

Необходимость решения систем уравнений с квадратной матрицей является следствием необходимого условия минимума целевой функции метода НК. Фундаментальная интерпретация метода НК состоит в том, что оп-