Силовые линии электрического тока распределяются наиболее равномерно по всей поверхности обрабатываемой детали, обращенной к катоду, когда ширина плоского электрода в три и более раз больше наружного диаметра детали, что ведет к равномерной обработке поверхности. При других рассматриваемых случаях – равномерность обработки не достигается из-за возникновения краевых эффектов.

Результаты численного моделирования подтверждают технологические возможности метода ЭХП с БПЭ по обработке полых цилиндрических деталей.

Мспользование численного моделирования электростатических полей в МЭЗ в условиях ЭХП позволяет существенно сократить время и затраты при разработке новых технологических процессов.

Библиографический список

1. Воробей, В. В. Теоретические основы проектирования технологических процессов ракетных двигателей. Технология производства жидкостных ракетных двигателей / В. В. Воробей, В. Е. Логинов. М. : Дрофа, 2007.

2. Мороз, И. И. Биполярный метод электрохимической обработки и некоторые его технологические возможности // И. И. Мороз, В. Ф. Орлов, Б. И. Чугунов // Электронная обработка материалов. 1982. № 6. С. 19–23.

3. Экслер, Л. И. Классификация параметров шероховатости / Л. И. Экслер // Технологические методы повышения качества поверхности деталей машин : сб. ст. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. С. 140–147.

4. Вдовенко, В. Г. Эффективность электрохимической обработки деталей : моногр. / В. Г. Вдовенко. Красноярск : Изд-во Краснояр. гос. ун-та, 1991.

5. Monk, P. A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations / P. Monk // Numer. Math. 1992. Vol. 63. P. 243–261.

6. COSMOS Advanced Modules. Part 2 ESTAR / Low Frequency Electromagnetic Analysis. 1996.

7. Пат. Российская Федерация, 7C25F3/16. Способ электрохимического полирования / Шестаков И. Я., Бабкина Л. А. № 2229543 ; заявл. 15.07.2002 ; опубл. 27.05.2004, Бюл. № 15. Приоритет от 15.07.2002.

8. Мурашев, Д. А. Математическое моделирование электрических полей в системах с биполярным электродом : автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Д. А. Мурашов. Саратов : Саратов. гос. техн. ун-т, 2006.

9. Шестаков, И. Я. О возможностях электрохимического полирования / И. Я. Шестаков, Л. А. Бабкина, А. Н. Жмурко // Решетневские чтения : материалы VII Всерос. научн.-практ. конф. ; Сиб. гос. аэрокосм. ун-т. Красноярск, 2003.

L. A. Babkina, I. Ya. Shestakov, A. S. Kvasov

NUMERICAL MODELING BY TWO-DIMENSIONAL ELECTROSTATIC FIELDS AT ELECTROCHEMICAL POLISHING

Modeling problem of the two-dimensional electrostatic field at electrochemical polish is considered. Comparative analysis of results of numerical modeling is executed in the programs COSMOS/M and Maple.

Keywords: numerical modeling, electrostatic field, electrochemical polish.

УДК 519.876

И. М. Митасов, А. Н. Завьялкин

МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОФАКТОРНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Задача определения значений параметров многофакторной регрессионной модели обычно решается методом наименьших квадратов (НК) и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Эта система может быть вырожденной в силу зависимости векторов значений факторов. Вырожденность приводит к срыву вычислительного процесса. Предлагается метод определения параметров на основе проектирования вектора значений моделируемого показателя на линейное пространство независимых векторов значений факторов.

Ключевые слова: метод, факторы, модель, выборка, проектирование.

В задачах многофакторного регрессионного анализа обычно в рамках одной вычислительной процедуры рассматривается множество многофакторных регрессионных моделей, среди которых выбирается оптимальная в смысле некоторого критерия. При этом решается множество систем линейных алгебраических уравнений. Некоторые из этих систем имеют вырожденную матрицу, что приводит к срыву вычислительного процесса.

Необходимость решения систем уравнений с квадратной матрицей является следствием необходимого условия минимума целевой функции метода НК. Фундаментальная интерпретация метода НК состоит в том, что оптимальное решение представляет собой проекцию вектора значений моделируемого показателя на линейное пространство векторов значений факторов. Эта проекция всегда существует и единственна, в отличие от решения системы линейных алгебраических уравнений.

В работе предлагается метод вычисления проекции на основе известного метода ортогонализации Грамма–Шмидта, который позволяет построить максимальное количество ортогональных векторов из заданной системы векторов значений факторов и вычислить проекцию вектора значений моделируемого показателя на линейное пространство полученных ортогональных векторов. Параметры модели вычисляются из решения системы линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей.

Линейная многофакторная модель регрессионного анализа имеет следующий вид:

$$y = \langle A, X \rangle + c\,, \tag{1}$$

где y – моделируемый скалярный показатель; A – вектор параметров модели; X – вектор факторов; c – скалярный параметр модели.

Построение модели (1) заключается в определении значений параметров A, c на основе выборки V следующего вида:

$$V = \left\{ y^i,\, X^i;\, i = \overline{1,m} \right\}, \tag{2}$$

где m – количество наблюдений значений характеристик y, X.

В силу выражения (1) возникает следующая система уравнений, связывающая значения показателя y и факторов $\left\{ x_j;\ \ j = \overline{1,n} \right\}$:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j + cE\,, \tag{3}$$

где n – количество факторов; Y – вектор значений показателя y; X_j – вектор значений j-го фактора; E – вектор с компонентами $\left\{ e_i = 1;\, i = \overline{1,m} \right\}$.

В системе (3) количество уравнений $m >> n + 1$, система обычно не имеет решения и поэтому, согласно методу НК, рассматривается следующая оптимизационная задача:

$$S(A^{\text{опт}}, c^{\text{опт}}) = \min_{A,c} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^i + c - y^i \right)^2 . \tag{4}$$

Решением задачи (4) является ортогональная проекция $Y^{\text{опт}}$ вектора Y на линейное пространство векторов $\{E, X_j\}$. Компоненты вектора $Y^{\text{опт}}$ определяются следующим образом

$$y^{i,\text{опт}} = \sum_{j=1}^{n} a_j^{\text{опт}} x_j^i + c^{\text{опт}} .$$

Требуется вычислить $a_j^{\text{опт}}, c^{\text{опт}}$ на основе выборки V статистических данных.

Решение задачи. Рассматривается система векторов $E, X_1, X_2, ..., X_n$. Метод Грамма–Шмидта позволяет из этой системы векторов получить систему ортогональных векторов $\{Z_j; j = 1, n^*\}$ по следующим формулам:

$$\begin{cases} Z_1 = E, \\ Z_j = X_{j-1} - \sum\limits_{l=1}^{j-1} \dfrac{\langle X_{j-1}, Z_l \rangle}{\langle Z_l, Z_l \rangle} Z_l\,, \\ j = \overline{2, n^*}\,;\ n^* \le n+1. \end{cases} \tag{5}$$

Значение n^* определяется в процессе построения системы векторов $\{Z_j\}$. Если при вычислении вектора Z_k получается нулевой вектор, то вектор X_{k-1} исключается из рассмотрения и вместо него рассматривается вектор X_k. При этом общее количество ортогональных векторов уменьшается на единицу.

Вектор Z_k признается нулевым, если выполнено следующее условие:

$$\sum_{i=1}^{m} \left| z_k^i \right| < \varepsilon\,,$$

где $\varepsilon > 0$ – малая величина, например, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Метод Грамма–Шмидта позволяет следующее:

1. Получить ортогональную систему векторов $Z_1, Z_2, ..., Z_{n^*}$, $n^* \le n+1$. Вектор E всегда входит в эту систему в качестве исходного вектора.

2. Определить подсистему линейно независимых векторов $\left\{ E, X_{j_1}, X_{j_2}, ..., X_{j_{n^*-1}} \right\}$, на основе которых строится система ортогональных векторов $\{ Z_1, Z_2, ..., Z_{n^*} \}$ по формулам (5).

Система ортогональных векторов $\{Z_j\}$ определяет линейное пространство размерности n^*. Вектор $Y^{\text{опт}}$ является проекцией вектора Y на это линейное пространство и может быть представлен в виде следующего разложения по ортогональному базису:

$$Y^{\text{опт}} = \sum_{j=1}^{n^*} b_j Z_j\,. \tag{6}$$

Вектор Y всегда можно представить в виде следующей суммы:

$$Y = Y^{\text{опт}} + Y^*,$$

где вектор Y^* ортогонален линейному пространству образованному системой векторов $\{Z_j\}$.

Тогда коэффициенты b_j в формуле (6) выражаются через заданный вектор Y по формулам

$$b_j = \langle Y, Z_j \rangle / \langle Z_j, Z_j \rangle, \quad j = \overline{1, n^*}\,. \tag{7}$$

Подставляя формулу (7) в (6), для вычисления ортогональной проекции получаем следующее

$$Y^{\text{опт}} = \sum_{j=1}^{n^*} \frac{\langle Y, Z_j \rangle}{\langle Z_j, Z_j \rangle} Z_j\,.$$

Для вычисления оптимальных значений параметров A, c рассмотрим систему линейно независимых векторов $\left\{ E, X_{j_1}, X_{j_2}, ..., X_{j_{n^*-1}} \right\}$. Эти векторы принадлежат линейному пространству Z, образованному векторами $Z_1, Z_2, ..., Z_{n^*}$, вектор $Y^{\text{опт}} \in Z$. Тогда следующая система уравнений всегда имеет единственное решение

$$cE + \sum_{k=1}^{n^*-1} a_{j_k} X_{j_k} = Y^{\text{опт}}\,, \tag{8}$$

где параметры $a_j \notin \left\{ a_{j_k};\ \ k = \overline{1, n^*-1} \right\}$ равны нулю. Система уравнений (8) определяет оптимальные значения параметров A, c, ее решение можно найти, например, методом Гаусса.

Результаты решения модельной задачи. Рассмотренный алгоритм решения задачи реализован [1] в виде программы на языке программирования общего назначения C++Builder 6.0.

Рассматривалась следующая модельная задача:

$$X_1 = E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В результате расчетов в соответствии с изложенным алгоритмом получены следующие результаты (табл. 1, 2):

Таблица 1

Количество и номера независимых факторов

Количество факторов	Номера факторов		
3	1	2	4

Таблица 2

Ортогональные векторы Z_1, Z_2, Z_3

Z_1	Z_2	Z_3
1	–1	0,9
1	1	–2,4
1	3	1,3
1	–3	0,2

Значение вектора $Y^{\text{опт}}$ – проекции вектора Y на линейное пространство ортогональных векторов Z_1, Z_2, Z_3

$$Y^{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 3{,}337\,349 \\ 5{,}933\,735 \\ 7{,}265\,060 \\ 1{,}463\,855 \end{pmatrix}.$$

Значение вектора параметров модели (1)

$$\begin{pmatrix} c \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}310\,241 \\ 1{,}207\,831 \\ 0 \\ -0{,}180\,723 \end{pmatrix}.$$

Полученное решение совпадает с решением нормальной системы уравнений сформированной на основе векторов $\{E, X_1, X_3\}$.

Таким образом, в работе предложен и обоснован алгоритм вычисления параметров многофакторной регрессионной модели методом проектирования вектора значений показателя на пространство линейно независимых векторов значений факторов. Этот алгоритм не приводит к срыву вычислительного процесса в отличие от обычного решения системы нормальных уравнений.

Также рассмотрены результаты применения программной реализации алгоритма на модельной задаче.

Библиографический список

1. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М. : Наука, 1977.

2. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. М. : Наука, 1966.

3. Митасов, И. М. Автоматизированная система вычисления параметров линейной многофакторной регрессионной модели методом проектирования / И. М. Митасов, А. Н. Завьялкин. М. : ОФАП. Свидетельство № 11400 от 12.09.2008.

I. M. Mitasov, A. N. Zavyalkin

PROJECTING METHOD IN PROBLEM OF PARAMETERS CALCULATING OF REGRESSIVE MULTIFACTOR-MODEL

The problem of the parameters values determination of the regressive multifactor-model is usually solved by the method of the least squares (LS) and it comes to solve the system of the linear algebra-equations. This system may be degenerative due to the dependence of the factors values vectors . The degeneration leads to fall of the calculating process. In this work there is suggested a method for the definition of parameters on the basis of projecting a vector of the values of the index simulated on a linear space of the independent vectors of the factors values.

Keywords: method, factors, model, sample, projecting.