УДК 519.872

А. Е. Горбатенко, А. А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПОТОКА В УСЛОВИИ ПРЕДЕЛЬНО РЕДКИХ ИЗМЕНЕНИЙ ЕГО СОСТОЯНИЙ*

Рассмотрен полумарковский поток (SM-поток) в условии предельно редких изменений его состояний. В предлагаемом асимптотическом условии найдено распределение вероятностей числа событий, наступивших в SM-потоке за время t. Показано, что это распределение может быть многомодальным.

Ключевые слова: SM-поток, состояния потока, предельно редкие изменения состояний потока, метод дополнительной переменной, метод асимптотического анализа.

В данной статье рассматривается полумарковский поток (SM-поток, Semi-Markovian process), который является наиболее общей моделью потоков однородных событий [1].

Дадим определение полумарковского потока, для чего рассмотрим двумерный однородный марковский случайный процесс $\{\xi(n), \tau(n)\}$ с дискретным временем. Здесь $\xi(n)$ – эргодическая цепь Маркова с дискретным временем и матрицей $P = [p_{\nu k}]$ вероятностей перехода за один шаг [2]; процесс $\tau(n)$ принимает неотрицательные значения из непрерывного множества.

Далее определим марковскую переходную функцию $F(\nu, x, k, y)$ для процесса $\{\xi(n), \tau(n)\}$:

$$F(k,x;\nu,y) = P\left\{\xi(n+1)=k, \tau(n+1)<x \middle| \xi(n)=\nu, \tau(n)=y\right\}.$$

Будем рассматривать такие двумерные процессы $\{\xi(n), \tau(n)\}$, для которых выполняется следующее равенство:

$$F(\nu,x;k,y) = F(\nu,x;k),$$

т. е. $F(\nu, x, k, y)$ не зависит от значений y процесса $\tau(n)$.

Обозначим

$$F(k,x;\nu) = A_{\nu k}(x) = P\left\{\xi(n+1)=k, \tau(n+1)<x \middle| \xi(n)=\nu\right\}. \quad (1)$$

Матрицу $A(x)$ с элементами $A_{\nu k}(x)$ будем называть полумарковской.

Случайный поток однородных событий

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$$

будем называть полумарковским потоком, или SM-потоком, заданным матрицей $A(x)$, если для моментов t_n наступления его событий выполняется следующее равенство:

$$t_{n+1} = t_n + \tau(n+1).$$

В силу (1) матрица переходных вероятностей цепи Маркова $\xi(n)$ определяется равенством

$$P = A(\infty).$$

Эту цепь для полумарковского потока назовем вложенной цепью Маркова.

Для элементов полумарковской матрицы в общем случае имеет место мультипликативная форма, которую можно записать в виде

$$A_{\nu k}(x) = P\left\{\xi(n+1)=k, \tau(n+1)<x \middle| \xi(n)=\nu\right\} =$$

$$= P\left\{\tau(n+1)<x, \middle| \xi(n)=\nu, \xi(n+1)=k\right\} \times$$

$$\times P\left\{\xi(n+1)=k, \middle| \xi(n)=\nu\right\} = G_{\nu k}(x)\, p_{\nu k},$$

где $G_{\nu k}(x)$ – условная функция распределения длины интервала полумарковского потока при условии, что в начале этого интервала вложенная цепь Маркова приняла значение ν, а в его конце примет значение k. В силу равенства

$$A_{\nu k}(x) = G_{\nu k}(x)\, p_{\nu k} \quad (2)$$

матрицу $A(x)$ можно записать в виде произведения Адамара

$$A(x) = G(x) \cdot P \quad (3)$$

двух матриц $G(x)$ и P, и можно полагать, что полумарковский поток задан двумя матрицами $G(x)$ и P.

Состоянием полумарковского потока в момент времени $t_n < t \le t_{n+1}$ назовем состояние k его вложенной цепи Маркова, принятое в начале интервала (t_n, t_{n+1}).

Исследование полумарковского потока будем проводить в условии предельно редких изменений состояний (ПРИС) потока, при котором переход из одного состояния вложенной цепи Маркова в другое осуществляется крайне редко

Условие предельно редких изменений состояний полумарковского потока формализуется следующим равенством для матрицы $P(\delta)$ вероятностей переходов его вложенной цепи Маркова:

$$P(\delta) = I + \delta \cdot Q, \quad (4)$$

где δ – некоторый малый параметр ($\delta \to 0$); I – единичная диагональная матрица.

Матрица Q с элементами $q_{\nu k}$ аналогична матрице инфинитезимальных характеристик и имеет такие же свойства, т. е. при $k \neq \nu$ элементы матрицы $q_{\nu k} > 0$ и выполняются равенства

$$\sum_k q_{\nu k} = 0, \quad \sum_{k \neq \nu} q_{\nu k} = -q_{kk}.$$

Запишем полумарковскую матрицу для SM-потока в условии ПРИС:

– при $k = \nu$

$$A_{kk}(x,\delta) = P\left\{\xi(n+1)=k, \tau(n+1)<x \middle| \xi(n)=k\right\} = G_{kk}(x)\{1+\delta \cdot q_{kk}\};$$

– при $k \neq \nu$

$$A_{\nu k}(x,\delta) = P\left\{\xi(n+1)=k, \tau(n+1)<x \middle| \xi(n)=\nu\right\} = G_{\nu k}(x) \cdot \delta \cdot q_{\nu k}.$$

* Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Федерального агентства по образованию по проекту «Разработка методов исследования немарковских СМО и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

С другой стороны, подставляя (4) в мультипликативную форму записи (3) полумарковской матрицы, получим:

$$A(x,\delta) = G(x)\cdot\{I+\delta\cdot Q\}. \tag{5}$$

Обозначим через $m(t)$ число событий полумарковского потока, наступивших за время t на интервале $[0, t)$.

Процесс $m(t)$ является немарковским, поэтому необходимо его марковизировать методом дополнительных переменных. Для этого введем переменную $z(t)$ – длину интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в рассматриваемом SM-потоке.

Однако двумерный процесс $\{m(t), z(t)\}$ не является марковским, поэтому рассмотрим еще один случайный процесс $s(t)$ с кусочно-постоянными реализациями, непрерывными слева, определенный равенством

$$s(t) = \xi(n+1),$$

если $t_n < t \le t_{n+1}$. Этот процесс на интервале $(t_n, t_{n+1}]$ принимает и сохраняет то значение, которое вложенная цепь Маркова $\xi(n)$ принимает в начале следующего интервала [1].

Определенный таким образом трехмерный случайный процесс $\{s(t), m(t), z(t)\}$ с двумя дополнительными переменными $s(t)$ и $z(t)$ является марковским с непрерывным временем и для распределения вероятностей

$$P(s,m,z,t,\delta) = P\{s(t)=s, m(t)=m, z(t)<z\} \tag{6}$$

нетрудно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(s,m,z,t,\delta)}{\partial t} = \frac{\partial P(s,m,z,t,\delta)}{\partial z} - \\ -\frac{\partial P(s,m,0,t,\delta)}{\partial z} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\partial P(\nu,m-1,0,t,\delta)}{\partial z}A_{\nu k}(z), \tag{7}$$

при заданном начальном условии

$$\begin{cases} P(s,0,z,0,\delta) = R(s,z,\delta), \\ P(s,m,z,0,\delta) = 0, \quad m\ge 1, \end{cases} \tag{8}$$

где функция $R(s, z, \delta)$ – стационарное распределение двумерного марковского процесса $\{s(t), z(t)\}$.

Обозначим функции

$$H(s,u,z,t,\delta) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum}P(s,m,z,t,\delta), \tag{9}$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица. Для этих функций из системы (7) и начальных условий (8) можно записать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(s,u,z,t,\delta)}{\partial t} = \dfrac{\partial H(s,u,z,t,\delta)}{\partial z} - \\ -\dfrac{\partial H(s,u,0,t,\delta)}{\partial z} + e^{ju}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{\partial H(\nu,u,0,t,\delta)}{\partial z}A_{\nu k}(z,\delta), \\ H(s,u,z,0,\delta) = R(s,z,\delta). \end{cases} \tag{10}$$

Обозначим

$$H(u,z,t,\delta) = \{H(1,u,z,t,\delta), H(2,u,z,t,\delta), ...\}$$

и введем матрицу $A(z, \delta)$ с элементами $A_{kv}(z, \delta)$, тогда из (10) получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,z,t,\delta)}{\partial t} = \dfrac{\partial H(u,z,t,\delta)}{\partial z} + \dfrac{\partial H(u,0,t,\delta)}{\partial z}\left\{e^{ju}A(z,\delta)-I\right\}, \\ H(u,z,0,\delta) = R(z,\delta), \end{cases} \tag{11}$$

где I – единичная матрица; вектор $R(z, \delta)$ определяет начальное условие задачи (11) с компонентами $R(s, z, \delta)$ и, как показано в [4], имеет вид

$$R(z,\delta) = \kappa_1(\delta) r\int_0^z \left(P(\delta) - A(x,\delta)\right)dx,$$

здесь r – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова $\xi(n)$, а величина $\kappa_1(\delta)$ определяется как

$$\kappa_1(\delta) = \frac{1}{rA(\delta)E},$$

где $A(\delta) = \int_0^{\infty}\left(P(\delta) - A(x,\delta)\right)dx.$

Найдем асимптотическое распределение вероятностей числа событий, наступивших в SM-потоке за время t, в условии предельно редких изменений состояний потока.

Обозначим

$$\lim_{\delta\to 0} H(u,z,t,\delta) = H(u,z,t). \tag{12}$$

В задаче (11), с учетом (12), выполним предельный переход при $\delta \to 0$. Тогда для $H(u, z, t)$ получим совокупность независимых задач Коши [3; 4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(u,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial H(u,z,t)}{\partial z} + \dfrac{\partial H(u,0,t)}{\partial z}\left\{e^{ju}A(z)-I\right\}, \\ H(u,z,0) = R(z), \end{cases} \tag{13}$$

где $\lim\limits_{\delta\to 0}P(\delta) = I$; $\lim\limits_{\delta\to 0}A(z,\delta) = A(z)$; $\lim\limits_{\delta\to 0}A(\delta) = A$; $\lim\limits_{\delta\to 0}\kappa_1(\delta) = \kappa_1$; $\lim\limits_{\delta\to 0}R(z,\delta) = R(z)$.

С учетом вида матрицы $A(z)$, получим из (12) совокупность независимых дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial H(s,u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(s,u,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial H(s,u,0,t)}{\partial z}\left\{e^{ju}G_{ss}(z)-1\right\}. \tag{14}$$

Начальные условия имеют вид

$$H(s,u,z,0) = R(s,z). \tag{15}$$

Решение задачи (14), (15) найдем, применяя преобразование Фурье–Стилтьеса:

$$\varphi(s,u,\alpha,t) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z}d_z H(s,u,z,t). \tag{16}$$

Функция $\varphi(s, u, б, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\varphi(s,u,\alpha,t)}{\partial t} = -j\alpha\varphi(s,u,\alpha,t) + \frac{\partial H(s,u,0,t)}{\partial z}\left\{e^{ju}G^*_{ss}(\alpha)-1\right\} \tag{17}$$

и начальному условию

$$\varphi(s,u,\alpha,0) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z}d_z H(s,u,z,0) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z}d_z R(s,z) = R^*(s,\alpha), \tag{18}$$

где $G^*_{ss}(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z}d_z G_{ss}(z).$

Решение дифференциального уравнения (17) имеет вид

$$\varphi(s,u,\alpha,t) = e^{-j\alpha t}\times \\ \times\left\{R^*(s,\alpha) + \int_0^t e^{j\alpha\tau}\frac{\partial H(s,u,0,\tau)}{\partial z}\left(e^{ju}G^*_{ss}(\alpha)-1\right)d\tau\right\}. \tag{19}$$

А так как

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(s,u,\alpha,t) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha z}d_z H(s,u,z,\infty) = 0,$$

то, устремив t в равенстве (19) в бесконечность, получим

$$0 = R^*(s,\alpha) + \int_0^{\infty} e^{j\alpha\tau}\frac{\partial H(s,u,0,\tau)}{\partial z}\left(e^{ju}G^*_{ss}(\alpha)-1\right)d\tau.$$

Из этого равенства найдем преобразование Фурье по τ от функции $\frac{\partial H(s,u,0,\tau)}{\partial z}$:

$$\int_0^\infty e^{j\alpha\tau}\frac{\partial H(s,u,0,\tau)}{\partial z}d\tau = R^*(s,\alpha)\left(1-e^{ju}G_{ss}^*(\alpha)\right)^{-1}.$$

Выполним обратное преобразование Фурье:

$$\frac{\partial H(s,u,0,\tau)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha\tau}R^*(s,\alpha)\left(1-e^{ju}G_{ss}^*(\alpha)\right)^{-1}d\alpha.$$

Равенство (19), с учетом полученного преобразования, запишем в виде

$$\varphi(s,u,\alpha,t) = e^{-j\alpha t}\Big\{R^*(s,\alpha)+$$

$$+\int_0^t e^{j\alpha\tau}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jy\tau}R^*(s,y)\left(1-e^{ju}G_{ss}^*(y)\right)^{-1}dy\left(e^{ju}G_{ss}^*(\alpha)-1\right)d\tau\Big\}. \quad (20)$$

Зная, что $H(s,u,\infty,t) = H(s,u,t) = \varphi(s,u,0,t)$, $R^*(s,0) = \kappa_1 r_s A_{ss}$, $G^*_{ss}(0) = 1$, получим выражение для функции $H(s, u, t)$:

$$H(s,u,t) = \kappa_1 r_s A_{ss} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t e^{-jy\tau}d\tau R^*(s,y)\left(1-e^{ju}G_{ss}^*(y)\right)^{-1}dy\left(e^{ju}-1\right). \quad (21)$$

С учетом того, что

$$\int_0^t e^{-jy\tau}d\tau = \frac{1}{jy}\left(1-e^{-jyt}\right)$$

и

$$R^*(s,y) = \int_0^\infty e^{jyz}d_zR(s,z) =$$

$$= \kappa_1 r_s\int_0^\infty e^{jyz}d\int_0^z\left(1-G_{ss}(x)\right)dx = \frac{\kappa_1 r_s\left(G_{ss}^*(y)-1\right)}{jy},$$

равенство (21) запишем в виде

$$H(s,u,t) = \kappa_1 r_s A_{ss} +$$

$$+\frac{\kappa_1 r_s}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\left(1-G_{ss}^*(y)\right)\left(1-e^{ju}G_{ss}^*(y)\right)^{-1}dy\left(e^{ju}-1\right). \quad (22)$$

Обозначим $h(u,t) = \sum_s H(s,u,t)$. Тогда

$$h(u,t) = \sum_s H(s,u,t) = 1 + \frac{\left(e^{ju}-1\right)\kappa_1}{2\pi}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\sum_s r_s\left(1-G_{ss}^*(y)\right)\left(1-e^{ju}G_{ss}^*(y)\right)^{-1}dy.$$

Зная, что

$$h(u,t) = \sum_s H(s,u,t) \approx \sum_s H(s,u,t,\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun}P(n,t),$$

и раскладывая в ряд правую часть полученного равенства по степеням экспоненты e^{ju}, можно записать следующее асимптотическое равенство:

$$h(u,t) \approx \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum}P(m,t) =$$

$$= 1 + \frac{\left(e^{ju}-1\right)\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\sum_s r_s\left(1-G_{ss}^*(y)\right)\sum_{m=0}^{\infty}e^{jum}G_{ss}^{*\,n}(y)dy =$$

$$= 1 - \frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\sum_s r_s\left(1-G_{ss}^*(y)\right)dy +$$

$$+\frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\sum_s r_s\left(1-G_{ss}^*(y)\right)^2\sum_{m=1}^{\infty}e^{jum}G_{ss}^{*\,m-1}(y)dy.$$

Тогда асимптотическое распределение вероятностей $P_1(m, t)$ числа m событий, наступивших в SM-потоке за время t, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} P_1(0,t) = 1 - \frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\sum_s r_s\left(1-G_{ss}^*(y)\right)dy, \\ P_1(m,t) = \frac{\kappa_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}\left(1-e^{-jyt}\right)\sum_s r_s\left(1-G_{ss}^*(y)\right)^2\sum_{m=1}^{\infty}e^{jum}G_{ss}^{*\,m-1}(y)dy, \end{cases} \quad (23)$$

где $P_1(m,t) \approx P(m,t)$.

Итак, выше нами были получены формулы, позволяющие найти асимптотическое распределение числа событий, наступивших в SM-потоке за время t. Это распределение также было найдено в допредельной ситуации методом интегральных преобразований [1]. Остается выяснить, насколько результаты, полученные с помощью метода асимптотического анализа, близки к результатам, полученным в допредельной ситуации. Для этого нужно найти величину

$$\Delta = \max_n\left|\hat{F}(n,t) - F(n,t)\right|,$$

где $\hat{F}(n,t)$ – функция распределения, полученная с помощью асимптотического анализа; $F(n, t)$ – функция распределения для допредельной ситуации, полученная в [1].

Пусть

$$Q = \begin{Bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{Bmatrix},$$

$$G(x) = \begin{Bmatrix} 1-e^{-5x} & 1-e^{-2x} & 1-e^{-10x} \\ 1-e^{-4x} & 1-e^{-x} & 1-e^{-9x} \\ 1-e^{-6x} & 1-e^{-3x} & 1-e^{-8x} \end{Bmatrix}, t = 6.$$

При заданных параметрах получим следующие значения отклонение результатов, полученных методом асимптотического анализа и в [1] для допредельной ситуации:

δ	0,001	0,000 5	0,000 1	0,000 05	0,000 01
Δ	0,042 7	0,021 6	0,004 2	0,002 1	0,000 3

Распределения вероятностей числа событий в потоке, наступивших за время $t = 6$ и полученных с помощью асимптотического анализа и в допредельной ситуации, показаны ниже (рис. 1–3).

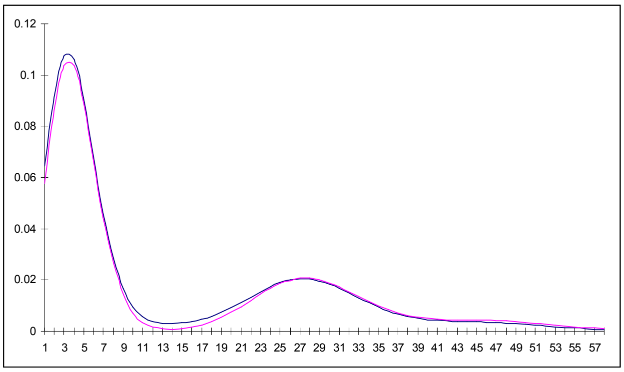

Рис. 1. Распределения вероятностей числа событий SM-потока при $\delta = 0{,}001$

Таким образом, получены асимптотические распределения вероятностей числа событий, наступивших в SM-потоке за время t. При уменьшении параметра δ меняется отклонение результатов асимптотического анализа от найденных в допредельной ситуации и при $\delta \le 0{,}000\,1$ оно составляет менее 1 %. Также следует отметить, что полученное распределение является многомодальным.

Библиографические ссылки

1. Лопухова С. В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2008.
2. Назаров А. А., Терпугов А. Ф. Теория вероятностей и случайных процессов : учеб. пособие. Томск : НТЛ, 2006.
3. Назаров А. А., Моисеева С. П. Методы асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : НТЛ, 2006.
4. Горбатенко А. Е. Исследование квазиразложимого поумарковского потока // Теория вероятностей, математическая статистика и приложения : сб. материалов Междунар. науч. конф. Минск, 2010. С. 53–59.

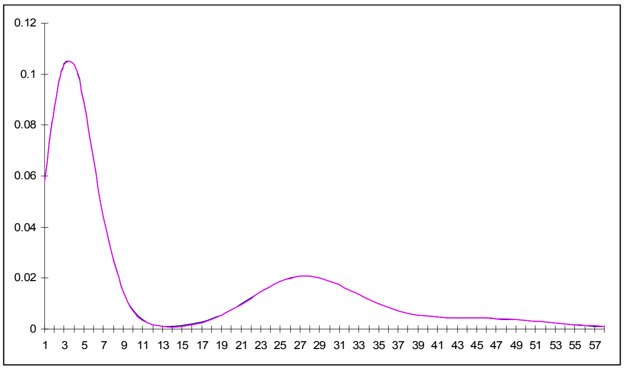

Рис. 2. Распределения вероятностей числа событий SM-потока при $\delta = 0{,}000\,1$

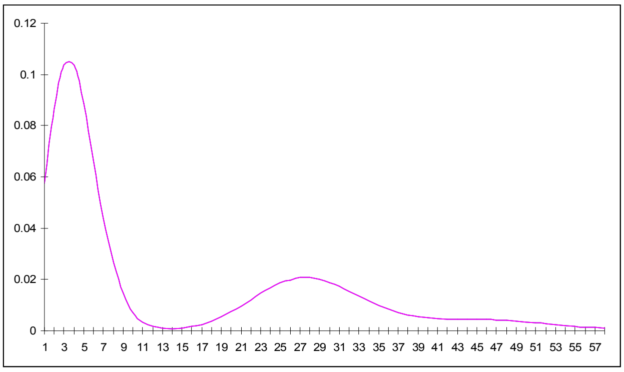

Рис. 3. Распределения вероятностей числа событий SM-потока при $\delta = 0{,}000\,01$

A. E. Gorbatenko, A. A. Nazarov

RESEARCH OF SEMIMARKOVIAN PROCESS IN CONDITIONS OF LIMIT RARE CHANGES OF ITS STATES

In this work the SM process in condition of limit rare changes of states of the process is considered. The offered asymptotic condition contains distribution of probabilities of number of events occurred in SM process for time t. It is demonstrated that this distribution can be multimodal.

Keywords: SM process, states of a flow, limit rare changes of flow states, method of additional variable, method of asymptotic analysis.

УДК 539.3:621.396.67

А. С. Евдокимов, Ю. И. Буянов, С. В. Пономарев, Г. В. Шипилов, В. И. Халиманович

СОВМЕСТНЫЙ РАСЧЕТ МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗОНТИЧНЫХ РЕФЛЕКТОРОВ

Рассмотрен вариант комплексной методики компьютерного моделирования трансформируемых рефлекторов космических аппаратов, позволяющий достичь лучших характеристик антенн.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, рефлектор, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, диаграмма направленности.

В настоящее время антенные системы широко используются в различных областях науки и техники, особенно в современной спутниковой связи, для которой требуются антенны с высокой точностью формы зеркала. Экспериментальная отработка таких изделий в наземных условиях требует больших материальных и временных затрат. Поэтому разработка компьютерного моделирования антенных конструкций приобретает все большую актуальность.

В работе М. В. Гряника и В. И. Ломана [1] были рассмотрены классификация развертываемых антенн и расчет характеристик излучения зеркальных антенн зонтич-