

тами / Е. С. Семенкин, В. А. Лебедев. М. : МАКС-Пресс, 2002.

2. Семенкин, Е. С. Об эволюционных алгоритмах решения сложных задач оптимизации / Е. С. Семенкин, А. В. Гуменникова, М. Н. Емельянова, Е. А. Сопов // Вестн. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева : сб. науч. тр. / под ред. проф. Г. П. Белякова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Вып. 5. Красноярск, 2003. С. 14–23.

3. Сергиенко, Р. Б. Разработка турнирного метода перераспределения ресурсов между подпопуляциями в коэволюционном алгоритме / Р. Б. Сергиенко // Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии : сб. науч. тр. Кемерово : ИНТ, 2007. С. 401–404.

4. Michalewicz, Z. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems / Z. Michalewicz, M. Schoenauer // Evolutionary Computation, 1996. Vol. 34, №1. P. 1–32.

5. Рубан, А. И. Методы оптимизации : учеб. пособие / А. И. Рубан. Красноярск : НИИ ИПУ, 2001.

6. Ворожейкин, А. Ю. Адаптивные эволюционные алгоритмы решения сложных задач оптимизации : дисс. ... канд. техн. наук / А. Ю. Ворожейкин. Красноярск, 2008.

7. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. М. : Высш. образование, 2006.

8. Carr, G. C. Airline arrival prioritization in sequencing and scheduling [Electronic resours] / G. C. Carr, H. Erzberger, F. Neuman // Air Traffic Management R&D Seminar. Orlando, 1998. Access mode: <http://www.ctas.arc.nasa.gov/publications>. Title from a display.

9. Scheduling aircraft landings – the static case / J. E. Beasley, M. Krishnamoorthy, Y. M. Sharaiha, D. Abramson // Transportation Science. 2000. Vol. 34. P. 180–197.

10. Шилдт, Г. Теория и практика C++ / Г. Шилдт. СПб. : BHV-Санкт-Петербург, 1996

E. S. Semenkin, R. B. Sergienko

## COEVOLUTIONARY GENETIC ALGORITHM FOR SOLVING COMPLEX PROBLEMS OF CONSTRAINED OPTIMIZATION

*Coevolutionary algorithm of constrained optimization with automatic tuning of parameters is considered. The process of development and results of effectiveness investigation are described. The algorithm effectiveness is illustrated on the task of aircrafts' landing scheduling.*

*Keywords: genetic algorithm, constrained optimization, coevolution.*

УДК 519.682

О. И. Егорушкин, Д. А. Калугин-Балашов, К. В. Сафонов

## О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ НЕКОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ПОРОЖДАЮЩИХ КОНТЕКСТНО-СВОБОДНЫЕ ЯЗЫКИ

*Рассматриваются системы алгебраических (полиномиальных) уравнений над некоммутативным относительно умножения кольцом. Получено условие разрешимости таких систем в виде формальных степенных рядов, изучаются системы линейных алгебраических уравнений, для которых исследована возможность понижения порядка систем. Рассмотренные системы обобщают свойства систем уравнений, определяющих контекстно-свободные и линейные языки.*

*Ключевые слова: контекстно-свободные языки, системы алгебраических уравнений, некоммутативное кольцо, коммутативный образ, граф инцидентности*

Формальным языком  $L$  называют множество цепочек в алфавите  $\{x_1, \dots, x_n\}$  выделенных с помощью конечного набора правил. Выделенные цепочки, принадлежащие свободной полугруппе  $\{x_1, \dots, x_n\}^*$ , называются при этом либо словами (над алфавитом), либо правильно построенными предложениями (над словарем), либо грамматически правильными предложениями. Конечное множество правил, с помощью которых выделяются цепочки, называют грамматикой. Таким образом, формальный язык определяется совокупностью соответствующих правил и способом выделения цепочек с помощью этих правил.

Практически важный класс формальных языков образуют контекстно-свободные языки (кс-языки), поскольку они являются адекватным средством моделирования естественных языков, а также языков программирования [1–3]. Обозначим  $W = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{z_1, \dots, z_n\}$  свободную полугруппу с операцией умножения; ее элементами являются произвольные цепочки, составленные из элементов «расширенного» алфавита  $\{x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n\}$ .

Рассмотрим играющую роль словаря конечное множество  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , состоящее из слов  $x_i$  языка и называемое терминальным множеством, а также  $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$  –

множество вспомогательных символов  $z_j$ , необходимых для задания грамматических правил, называемое нетерминальным множеством;  $W^* = (X \cup Z)^*$  – соответствующая свободная полугруппа относительно операции конкатенации. Дополним ее операцией формального сложения «+» мономов из множества  $W^*$  (вместо суммы можно взять объединение « $\cup$ », следуя работе [1]), а также коммутативной операцией умножения мономов на (целые) числа. Таким образом, можно рассматривать не только многочлены, но и формальные степенные ряды с числовыми (как правило, целыми) коэффициентами от некоммутативных переменных.

Кс-грамматика есть совокупность правил подстановки, которые каждому нетерминальному символу  $z_i$  ставят в соответствие некоторый моном от терминальных и нетерминальных символов:

$$z_i \rightarrow f_{i1}(x, z), \dots, z_i \rightarrow f_{iq}(x, z),$$

где  $z_1$  – особый, выделенный символ – начальный символ предложения (или программы). Правилам подстановки ставится в соответствие [3] система полиномиальных уравнений: каждому вспомогательному символу  $z_j$ , содержащемуся в левой части подстановки сопоставляется уравнение  $z_j = p_j(x, z)$ , где

$$p_j(x, z) = f_{j1}(x, z) + \dots + f_{jq}(x, z).$$

Таким образом, кс-грамматике соответствует система полиномиальных уравнений

$$z_j = p_j(x, z), j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

и кс-языком называется [3; 4] первая компонента  $z_j$  решения  $(z_1(x), \dots, z_m(x))$  этой системы полиномиальных уравнений, получаемого методом последовательных приближений:

$$z_i^{(k+1)} = p_i(x, z^{(k)}), z_i^{(0)} = 0, i = 1, \dots, m,$$

где  $z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \dots, z_m^{(k)})$ ,  $0$  – нулевой моном, такой, что  $0 \cdot u = u \cdot 0 = 0$  для любого монома  $u$ .

В результате итераций каждая компонента  $z_j$  выражается формальным степенным рядом, причем кс-язык и есть тот формальный степенной ряд, который представляет выделенный символ  $z_1$ :

$$z_1 = \sum_i \langle z_1, w_i \rangle w_i, \quad (2)$$

где  $\langle z_1, w_j \rangle$  – числовой коэффициент, с которым моном  $w_j$  от некоммутативных переменных входит в ряд  $z_1$ . Мономы  $w_j$  являются грамматически правильными предложениями, которые могут быть построены в данном языке из слов  $x_1, \dots, x_n$  этого языка, а весь ряд (2), т. е. формальная сумма всех правильных предложений, и является данным кс-языком. Построение системы уравнений (1) по грамматическим правилам языка приведено выше, причем условие того, что язык является контекстно-свободным, состоит также и в том, что многочлены  $p_j(x, z)$  не содержат мономов  $z_j$  и  $e$ , где  $e$  – пустая цепочка. Таким образом, существование и единственность решения системы (1) обеспечивается ее специфической структурой в совокупности с методом последовательных приближений.

Рассмотрим общий случай, а именно ассоциированную с контекстно-свободными языками произвольную систему алгебраических (полиномиальных) уравнений:

$$q_i(x, z) = 0, i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Решением этой системы назовем выражение символов  $z_i$  в виде формальных степенных рядов от  $x$ , подстановка которых в многочлены  $q_i(x, z)$  обращает их в нуль. Нас интересует, каковы условия, при которых система (3) имеет такое решение, и способ получения искомых рядов.

Поставим в соответствие формальному степенному ряду (многочлену) ряд (многочлен) с комплексными переменными, задав отображение терминальных  $x_i$  и нетерминальных  $z_i$  символов из множества  $X \cup Z$  в множество комплексных переменных, причем за нетерминальными переменными  $z_i$  оставляем прежние обозначения, а терминальные символы  $x_i$  отображаем в комплексные переменные  $z_i$  соответственно, тогда  $(x, z) \in C^{m+n}$ . Таким образом, получаем фиксированный гомоморфизм, который ставит в соответствие формальному ряду (2) его коммутативный образ – степенной ряд от комплексных переменных

$$ci(r) = \sum_k a_k z^k,$$

где

$$a_k z^k = a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

$$a_k = \sum_{\#x_1(w_i)=k_1, \dots, \#x_n(w_i)=k_n} \langle r, w_i \rangle,$$

символ  $\#c(d)$  означает число вхождений символа  $c$  в моном  $d$ . Коммутативный образ кс-языка является алгебраической функцией, голоморфной в некоторой окрестности нуля, как показывают оценки коэффициентов степенного ряда.

Имеет место следующая теорема.

*Теорема 1.* Если выполнено условие

$$J = \det\left(\frac{\partial(ci(q_i(0, 0)))}{\partial z_j}\right) \neq 0, \quad (4)$$

то система (3) имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, выражающих вектор-функцию  $z$  через компоненты вектора  $x$ .

Для доказательства заметим, что если формальные ряды  $z = z(x)$  удовлетворяют системе уравнений  $q(x, z) = 0$  то выполняется условие

$$ci(q(x, ci(z(x)))) = 0.$$

И хотя обратное неверно, условие (4) для якобиана  $J$  обеспечивает существование и единственность решения системы  $ci(q(x, z)) = 0$ ; обозначим это решение  $ci(z(x))$ . Учитывая, что условие (4) означает линейную независимость градиентов коммутативных образов многочленов, а также используя метод мономиальных меток, предложенный в [4], получаем, что это решение действительно является коммутативным образом некоторого решения исходной некоммутативной системы.

Далее, в силу невырожденности матрицы Якоби в начале координат, можно сделать линейную замену переменных  $z_j$ , в результате которой эта матрица становится единичной, что и приводит систему (3) к виду (1), в результате чего ее можно решать методом последовательных приближений. Искомые ряды равны линейной комбинации получаемых рядов.

Рассмотрим теперь системы линейных алгебраических уравнений над некоммутативным кольцом, тесно свя-

занные с линейными языками [1]. Возможные методы решения этих систем в виде рядов должны учитывать как некоммутативность переменных по умножению, так и отсутствие операции деления в кольце  $W$ . Нам понадобятся некоторые определения.

$L$ -операторами называются отображения  $L: W \rightarrow W$ , действие которых заключается в умножении элемента кольца  $W$  слева и справа на некоторые мономы  $l$  и  $r$ :  $L(z) = l \cdot z \cdot r \cdot L(z) = l \cdot z \cdot r$ .

Основные свойства  $L$ -операторов:

- 1)  $L(\alpha z_1 + \beta z_2) = L(\alpha z_1) + L(\beta z_2)$  – линейность;
- 2) если  $L_1(z) = l_1 z r_1$  и  $L_2(z) = l_2 z r_2$ , то  $L_1(L_2(z)) = L_1(l_2 z r_2) = l_1 l_2 z r_2 r_1 = L_3(z)$  – композиция  $L$ -операторов является  $L$ -оператором.

Уравнение  $f(z_1, \dots, z_m) = g(z_1, \dots, z_m)$  называется приведенным, если не существует такого  $L$ -оператора  $R$ , что  $f(z_1, \dots, z_m) = R(f_1(z_1, \dots, z_m))$  и  $g(z_1, \dots, z_m) = R(g_1(z_1, \dots, z_m))$ . Если уравнение не является приведенным, то его можно привести к эквивалентному, отбросив оператор  $R$ .

Система линейных алгебраических уравнений порядка  $n$  над некоммутативным кольцом имеет вид

$$\begin{cases} \sum_k l_{1,1,k} L_{1,1,k}(z_1) + \sum_k l_{1,2,k} L_{1,2,k}(z_2) + \dots + \\ + \sum_k l_{1,n,k} L_{1,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{1,k} \Phi_{1,k}, \\ \sum_k l_{2,1,k} L_{2,1,k}(z_1) + \sum_k l_{2,2,k} L_{2,2,k}(z_2) + \dots + \\ + \sum_k l_{2,n,k} L_{2,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{2,k} \Phi_{2,k}, \\ \dots \\ \sum_k l_{n,1,k} L_{n,1,k}(z_1) + \sum_k l_{n,2,k} L_{n,2,k}(z_2) + \dots + \\ + \sum_k l_{n,n,k} L_{n,n,k}(z_n) = \sum_k \varphi_{n,k} \Phi_{n,k}, \end{cases}$$

где  $l_{i,j,k}$ ,  $\varphi_{i,k}$  – действительные коэффициенты;  $L_{i,j,k}(z)$  –  $L$ -операторы;  $\Phi_{j,k}$  – мономы. Можно считать, что все уравнения системы являются приведенными.

Покажем, как исключать из данной системы одно неизвестное и одно уравнение. Исключаем, например, неизвестное  $z_n$ . Для каждого уравнения системы оставим все слагаемые с  $z_n$  в левой части, а все остальные слагаемые перенесем в правую часть, переписав систему в виде

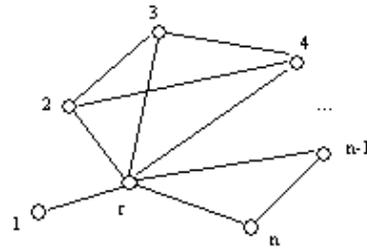
$$\begin{cases} \sum_k l_{1,n,k} L_{1,n,k}(z_n) = \\ = \sum_k \varphi_{1,k} \Phi_{1,k} - \sum_k l_{1,1,k} L_{1,1,k}(z_1) - \dots - \sum_k l_{1,n-1,k} L_{1,n-1,k}(z_{n-1}), \\ \sum_k l_{2,n,k} L_{2,n,k}(z_n) = \\ = \sum_k \varphi_{2,k} \Phi_{2,k} - \sum_k l_{2,1,k} L_{2,1,k}(z_1) - \dots - \sum_k l_{2,n-1,k} L_{2,n-1,k}(z_{n-1}), \\ \dots \\ \sum_k l_{n,n,k} L_{n,n,k}(z_n) = \\ = \sum_k \varphi_{n,k} \Phi_{n,k} - \sum_k l_{n,1,k} L_{n,1,k}(z_1) - \dots - \sum_k l_{n,n-1,k} L_{n,n-1,k}(z_{n-1}). \end{cases}$$

Построим граф с  $n$  вершинами,  $i$ -я вершина которого соответствует  $\sum_k l_{i,n,k} L_{i,n,k}(z_n)$ . Вершины  $i$  и  $j$  инцидентны, если существуют такие  $L$ -операторы  $R_{ij}$  и  $R_{ji}$ , что выполняется равенство

$$\begin{aligned} R_{ij} \left( \sum_k l_{i,n,k} L_{i,n,k}(z_n) \right) &= \\ &= R_{ji} \left( \sum_k l_{j,n,k} L_{j,n,k}(z_n) \right). \end{aligned}$$

При этих обозначениях и условиях имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Порядок  $n$  системы линейных алгебраических уравнений можно понизить до  $n-1$ , если существует такая вершина  $r$ , которая смежна всем остальным вершинам  $n$ . Каждому ребру, инцидентному вершине  $r$ , соответствует одно уравнение новой системы. Очевидно, что таких ребер будет  $n-1$ , следовательно, и порядок новой системы будет  $n-1$  (при выполнении условий теоремы для одной вершины граф инцидентности имеет вид, например такой, как на рисунке).



Граф инцидентности вершины  $r$

В случае выполнения условий теоремы 2 полученная система запишется в виде

$$\begin{cases} R_{r,1} \begin{pmatrix} \sum_k \varphi_{r,k} \Phi_{r,k} - \sum_k l_{r,1,k} L_{r,1,k}(z_1) - \\ - \dots - \sum_k l_{r,n-1,k} L_{r,n-1,k}(z_{n-1}) \end{pmatrix} = \\ = R_{1,r} \begin{pmatrix} \sum_k \varphi_{1,k} \Phi_{1,k} - \sum_k l_{1,1,k} L_{1,1,k}(z_1) - \\ - \dots - \sum_k l_{1,n-1,k} L_{1,n-1,k}(z_{n-1}) \end{pmatrix}, \\ R_{r,2} \begin{pmatrix} \sum_k \varphi_{r,k} \Phi_{r,k} - \sum_k l_{r,1,k} L_{r,1,k}(z_1) - \\ - \dots - \sum_k l_{r,n-1,k} L_{r,n-1,k}(z_{n-1}) \end{pmatrix} = \\ = R_{2,r} \begin{pmatrix} \sum_k \varphi_{2,k} \Phi_{2,k} - \sum_k l_{2,1,k} L_{2,1,k}(z_1) - \\ - \dots - \sum_k l_{2,n-1,k} L_{2,n-1,k}(z_{n-1}) \end{pmatrix}, \\ \dots \\ R_{r,n} \begin{pmatrix} \sum_k \varphi_{r,k} \Phi_{r,k} - \sum_k l_{r,1,k} L_{r,1,k}(z_1) - \\ - \dots - \sum_k l_{r,n-1,k} L_{r,n-1,k}(z_{n-1}) \end{pmatrix} = \\ = R_{n,r} \begin{pmatrix} \sum_k \varphi_{n,k} \Phi_{n,k} - \sum_k l_{n,1,k} L_{n,1,k}(z_1) - \\ - \dots - \sum_k l_{n,n-1,k} L_{n,n-1,k}(z_{n-1}) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Используя свойство линейности  $L$ -оператора, преобразуем эту систему к виду

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_k \varphi_{r,k} R_{r,1}(\Phi_{r,k}) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,1}(L_{r,1,k}(z_1)) - \\
 & - \dots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,1}(L_{r,n-1,k}(z_{n-1})) = \\
 & = \sum_k \varphi_{1,k} R_{1,r}(\Phi_{1,k}) - \sum_k l_{1,1,k} R_{1,r}(L_{1,1,k}(z_1)) - \\
 & - \dots - \sum_k l_{1,n-1,k} R_{1,r}(L_{1,n-1,k}(z_{n-1})), \\
 & \sum_k \varphi_{r,k} R_{r,2}(\Phi_{r,k}) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,2}(L_{r,1,k}(z_1)) - \\
 & - \dots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,2}(L_{r,n-1,k}(z_{n-1})) = \\
 & = \sum_k \varphi_{2,k} R_{2,r}(\Phi_{2,k}) - \sum_k l_{2,1,k} R_{2,r}(L_{2,1,k}(z_1)) - \\
 & - \dots - \sum_k l_{2,n-1,k} R_{2,r}(L_{2,n-1,k}(z_{n-1})), \\
 & \dots \\
 & \sum_k \varphi_{r,k} R_{r,n}(\Phi_{r,k}) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,n}(L_{r,1,k}(z_1)) - \\
 & - \dots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,n}(L_{r,n-1,k}(z_{n-1})) = \\
 & = \sum_k \varphi_{n,k} R_{n,r}(\Phi_{n,k}) - \sum_k l_{n,1,k} R_{n,r}(L_{n,1,k}(z_1)) - \\
 & - \dots - \sum_k l_{n,n-1,k} R_{n,r}(L_{n,n-1,k}(z_{n-1})).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Так как композиция  $L$ -операторов есть  $L$ -оператор, то полученная система является системой линейных алгебраических уравнений (над некоммутативным кольцом), ее порядок равен  $n - 1$ . Тем самым порядок системы понижен на единицу, исключена неизвестная  $z_n$ .

**Библиографический список**

1. Глушков, В. М. Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. Киев : Наукова думка, 1974.
2. Семенов, А. Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик / А. Л. Семенов // Доклады АН СССР. 1973. Т. 212. С. 50–52.
3. Сафонов, К. В. О возможности вычислительного распознавания контекстно-свободных языков / К. В. Сафонов // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. № 4. С. 91–98.
4. Сафонов, К. В. О синтаксическом анализе и проблеме В. М. Глушкова распознавания контекстно-свободных языков Хомского / К. В. Сафонов, О. И. Егорушкин // Вестн. Том. гос. ун-та. Прил. 2006. № 17. С. 63–66.

O. I. Egorushkin, D. A. Kalugin-Balashov, K. V. Safonov

**ON SYSTEM SOLVABILITY OF NON-COMMUTATIVE ALGEBRAIC EQUATIONS GERATED CONTEXT CONTEXT-FREE LANGUAGES**

*Systems of algebraic (polynomial) equations under non-commutative one relative to a multiplication ring are considered. The paper considers the solvability condition of such systems as formal power series, systems of linear algebraic equations. The reduction possibility of the system degree was investigated for such equations. The given systems generalize features of equation systems determining context-free and linear languages.*

*Keywords: context-free languages, system of algebraic equations, not-commutative ring, not-commutative image, incident graph.*

УДК 519.866

П. Н. Победаш

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ НА ОСНОВЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

*Предлагается приложение z-преобразования к асимптотическому анализу линейных многошаговых задач оптимального управления на примере двухкритериальной модели оптимизации реальных инвестиций предприятия с неограниченным количеством видов производимой продукции и/или спросом на нее на бесконечном горизонте планирования.*

*Ключевые слова: z-преобразование, двухкритериальная модель оптимального управления, планирование инвестиций.*

В данной работе рассматривается задача, обобщающая задачу из работы [1] на случай двух критериев, которую сформулируем следующим образом. Предприятие имеет капитал  $K_0$ . При этом государственный орган (ГО) для реализации инвестиционного проекта (ИП) выделяет инвестиции не более величины  $I_0$  на приоб-