УДК 539.374

С. И. Сенашов, В. И. Бурмак

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ*

Построено новое точное решение уравнений плоского напряженного состояния, описывающее сжатие пластического слоя жесткими плитами, которые сближаются с постоянным ускорением.

Ключевые слова: пластичность, плоское напряженное состояние, точное решение.

Рассмотрим уравнения, описывающие плоское напряженное состояние в случае медленных нестационарных течений. Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial \tau}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau^2=3k^2, \tag{2}$$

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{2\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{2\sigma_y-\sigma_x}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}}{6\tau}=\lambda^{-1}, \tag{3}$$

где σ_x, σ_y, τ – компоненты тензора напряжений; k – постоянная пластичности; u, v – компоненты вектора скорости; l – некоторая положительная функция, определяемая по условию пластичности (2). Уравнения (1) – это условия равновесия, (3) – закон течения. Из (1)…(3) получаем

$$3\sigma_x=\lambda\left(2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\ 3\sigma_y=\lambda\left(2\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$6\tau=\lambda\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{4}$$

С учетом (4) уравнения (1)…(3) запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \frac{\lambda}{3}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x}+\frac{\partial \frac{\lambda}{6}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial \frac{\lambda}{6}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}+\frac{\partial \frac{\lambda}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y}=0,$$

$$3\sqrt{3}k\lambda^{-1}=\left(\begin{matrix}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-\\ -\left(2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\end{matrix}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Можно показать, что уравнения (5) допускают оператор

$$X=t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}$$

в смысле Ли. Поэтому решение уравнений (5) можно искать в виде

$$u=tu(x,y),\quad v=tv(x,y).$$

Решения такого вида могут быть использованы для описания движений с постоянным ускорением. В данной статье мы ограничимся решениями вида

$$u=tu(y),\quad v=tv(y). \tag{6}$$

Подставим (6) в (5), в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения u, v:

$$u+\frac{d}{dy}\frac{ku'}{\sqrt{4v'^2+u'^2}}=0,\ v+\frac{d}{dy}\frac{kv'}{\sqrt{4v'^2+u'^2}}=0. \tag{7}$$

Здесь штрих означает производную по переменной y.

Пусть $2v'=w\sin\theta,\ 2u'=w\cos\theta,$ тогда система (7) запишется в виде

$$u+k\frac{d}{dy}\cos\theta=0,\ v+2k\frac{d}{dy}\sin\theta=0. \tag{8}$$

Продифференцируем (8) по y и с учетом введенных выше обозначений получим

$$w\cos\theta+k\frac{\mathrm{d}^2}{dy^2}\cos\theta=0,\ w\sin\theta+4\mathrm{k}\frac{\mathrm{d}^2}{dy^2}\sin\theta=0. \tag{9}$$

Умножим первое уравнение (9) на $-\sin\theta,$ а второе – на $\cos\theta$ и сложим:

$$\theta''\left(4\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-3\theta'^2\sin\theta\cos\theta=0. \tag{10}$$

Пусть $\theta'=p(\theta)$, тогда $\theta''=p'p$ и уравнение (10) запишется в виде

$$p'\left(4\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-3p\sin\theta\cos\theta=0.$$

Интегрируя его, получим

$$p=\theta'=\frac{c}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}},$$

где c – произвольная постоянная. Следовательно,

$$cy=\int_0^\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^\theta\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}E\left(\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \tag{11}$$

где $E\left(\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ – эллиптический интеграл второго рода. Из формулы (11) следует, что $\theta=\theta(y)$ – монотонно возрастающая функция при $c>0.$ Поскольку

$$\theta'=\frac{c}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}},$$

то из формул (8) получаем

$$u=-k\frac{d}{dy}\cos\theta=\frac{ck\sin\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}},$$

* Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.», проект № 1121.

$$v = -2k\frac{d}{dy}\sin\theta = -\frac{ck\cos\theta}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}. \qquad (12)$$

Компоненты тензора напряжений в этом случае будут

$$\tau = k\cos\theta,$$

$$\sigma_y = 2k\sin\theta,\ \ \sigma_x = k\sin\theta. \qquad (13)$$

Дадим одну из возможных интерпретаций построенного решения (11)…(13). Пусть

$$y_1 = E\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \ y_2 = E\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

тогда

$$\tau(y_1) = k\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma_y(y_1) = \sqrt{2}k,\ \ u(y_1) = ck\frac{\sqrt{5}}{5},\ \ v(y_1) = -ck\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\tau(y_2) = -k\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma_y(y_2) = -\sqrt{2}k,\ u(y_2) = -ck\frac{\sqrt{5}}{5},\ v(y_2) = ck\frac{\sqrt{5}}{5}. \quad (14)$$

Это означает, что верхняя шероховатая жесткая плита, заданная уравнением $y = y_1$, движется вниз и вправо с постоянными ускорениями. На плите задано постоянное нормальное и касательное напряжения. Вторая плита (ее уравнение $y = y_2$), движется вверх и влево с постоянными ускорениями. На этой плите также заданы нормальное и касательное напряжения.

Замечание. Подобные решения можно построить и для описания сжатия трубы, стенки которой движутся с постоянным ускорением.

S. I. Senashov, V. I. Burmak

EXACT SOLUTIONS OF EQUATION OF PLASTICITY OF PLANE STRESS CONDITION

The article presents a new exact solution of equation of plane stress state, which describes compression of plastic layer with rigid sheet, which come close to constant acceleration.

Keywords: plasticity, plasticity of plane stress condition, exact solution.

УДК 538.911; 539.21

В. М. Ленченко, Ю. Ю. Логинов, А. В. Мозжерин

ЛАВИННОЕ УМНОЖЕНИЕ И ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В КРЕМНИЕВЫХ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Определены условия ускорения носителей тока в полупроводниках до ударно-ионизационных энергий в сильных электрических полях ограниченной протяженности. Описаны генерационно-рекомбинационные процессы лавинного умножения и излучательной рекомбинации в виде микроплазм, возникающих в обратно смещенных p–n-переходах солнечных элементов. Представлено физическое обоснование диагностики микродефектов в полупроводниках с помощью микроплазм.

Ключевые слова: микроплазмы, солнечные элементы, p–n-переход.

Солнечные элементы широко используются в качестве источников энергии, в том числе на энергетических платформах космических аппаратов. В обратно смещенных *p–n*-переходах, расположенных у поверхности полупроводника (как, например, в светодиодах и солнечных элементах), в предпробойных электрических полях наблюдаются светящиеся точки и пятна, названные в [1] микроплазмами. Микроплазменный пробой, происходящий в обратно смещенных *p–n*-переходах, сильно локализован, не превышает 1 мкм в диаметре и сопровождается свечением невысокой интенсивности [2]. Интенсивность этого свечения и количество микроплазм возрастают при увеличении прикладываемого к *p–n*-переходу напряжения.

Локализация микроплазм может быть вызвана резким возрастанием электрического поля в области свечения и увеличением коэффициентов лавинного умножения. Вероятнее всего это происходит в местах, где имеются неоднородности *p–n*-перехода. Такие неоднородности могут быть связаны с микродефектами, флуктуациями фронта легирования, дислокациями и др. В этих локальных областях может происходить уплотнение электрического поля $E > E_п$, где $E_п$ – пороговое поле для лавинного умножения носителей тока. Предполагается, что