$$
\begin{cases}
\sum_k \varphi_{r,k} R_{r,1}\left(\Phi_{r,k}\right) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,1}\left(L_{r,1,k}\left(z_1\right)\right) - \\
- \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,1}\left(L_{r,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right) = \\
= \sum_k \varphi_{1,k} R_{1,r}\left(\Phi_{1,k}\right) - \sum_k l_{1,1,k} R_{1,r}\left(L_{1,1,k}\left(z_1\right)\right) - \\
- \ldots - \sum_k l_{1,n-1,k} R_{1,r}\left(L_{1,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right), \\
\sum_k \varphi_{r,k} R_{r,2}\left(\Phi_{r,k}\right) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,2}\left(L_{r,1,k}\left(z_1\right)\right) - \\
- \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,2}\left(L_{r,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right) = \\
= \sum_k \varphi_{2,k} R_{2,r}\left(\Phi_{2,k}\right) - \sum_k l_{2,1,k} R_{2,r}\left(L_{2,1,k}\left(z_1\right)\right) - \\
- \ldots - \sum_k l_{2,n-1,k} R_{2,r}\left(L_{2,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right), \\
\ldots \\
\sum_k \varphi_{r,k} R_{r,n}\left(\Phi_{r,k}\right) - \sum_k l_{r,1,k} R_{r,n}\left(L_{r,1,k}\left(z_1\right)\right) - \\
- \ldots - \sum_k l_{r,n-1,k} R_{r,n}\left(L_{r,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right) = \\
= \sum_k \varphi_{n,k} R_{n,r}\left(\Phi_{n,k}\right) - \sum_k l_{n,1,k} R_{n,r}\left(L_{n,1,k}\left(z_1\right)\right) - \\
- \ldots - \sum_k l_{n,n-1,k} R_{n,r}\left(L_{n,n-1,k}\left(z_{n-1}\right)\right).
\end{cases}
$$

Так как композиция L-операторов есть L-оператор, то полученная система является системой линейных алгебраических уравнений (над некоммутативным кольцом), ее порядок равен $n - 1$. Тем самым порядок системы понижен на единицу, исключена неизвестная z_n.

Библиографический список

1. Глушков, В. М. Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. Киев : Наукова думка, 1974.
2. Семенов, А. Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик / А. Л. Семенов // Доклады АН СССР. 1973. Т. 212. С. 50–52.
3. Сафонов, К. В. О возможности вычислительного распознавания контекстно-свободных языков / К. В. Сафонов // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10. № 4. С. 91–98.
4. Сафонов, К. В. О синтаксическом анализе и проблеме В. М. Глушкова распознавания контекстно-свободных языков Хомского / К. В. Сафонов, О. И. Егорушкин // Вестн. Том. гос. ун-та. Прил. 2006. № 17. С. 63–66.

O. I. Egorushkin, D. A. Kalugin-Balashov, K. V. Safonov

ON SYSTEM SOLVABILITY OF NON-COMMUTATIVE ALGEBRAIC EQUATIONS GERATED CONTEXT CONTEXT-FREE LANGUAGES

Systems of algebraic (polynominal) equations under non-commutative one relative to a multiplication ring are considered. The paper considers the solvability condition of such systems as formal power series, systems of linear algebraic equations. The reduction possibility of the system degree was investigated for such equations. The given systems generalize features of equation systems determining context-free and linear languages.

Keywords: context-free languages, system of algebraic equations, not-commutative ring, not-commutative image, incident graph.

УДК 519.866

П. Н. Победаш

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ НА ОСНОВЕ *Z*-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Предлагается приложение z-преобразования к асимптотическому анализу линейных многошаговых задач оптимального управления на примере двухкритериальной модели оптимизации реальных инвестиций предприятия с неограниченным количеством видов производимой продукции и/или спросом на нее на бесконечном горизонте планирования.

Ключевые слова: z-преобразование, двухкритериальная модель оптимального управления, планирование инвестиций.

В данной работе рассматривается задача, обобщающая задачу из работы [1] на случай двух критериев, которую сформулируем следующим образом. Предприятие имеет капитал K_0. При этом государственный орган (ГО) для реализации инвестиционного проекта (ИП) выделяет инвестиции не более величины I_0 на приобретение активных основных производственных фондов (ОПФ) n видов. Необходимо определить стоимость (количество) всех приобретаемых в моменты $t = 1, \ldots, T$ ОПФ каждого вида, при которых дисконтированные суммы собственных средств предприятия и его налоговых поступлений в ГО максимальны за все время действия ИП. При этом выполнены следующие основные предпосылки:

1) учитываются налоги, составляющие большую часть затрат предприятия: налог на добавленную стоимость (НДС), налог на прибыль (НП), налог на имущество (НИ), единый социальный налог (ЕСН) и отчисления в фонд оплаты труда (ФОТ);

2) предприятие имеет достаточные запасы сырья;

3) срок T действия ИП меньше сроков T_k службы единицы ОПФ каждого типа: $T < T_k \ (k = 1, ..., n)$;

4) на ОПФ каждого вида производится лишь один тип продукции. С учетом приведенных предпосылок сформулированная выше задача имеет вид двухкритериальной многошаговой задачи линейного программирования (МЗЛП), которую, согласно работе [2], назовем моделью $B1$:

$$x_k(t+1) = x_k(t) + u_k(t)$$
$$(k = 1, ..., n;\ t = 0, ..., T-1),$$
$$x_{n+1}(t+1) = -\sum_{k=1}^{n} x_k(t)/T_k + x_{n+1}(t) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n} u_k(t) \ (t = 0, ..., T-1)$$
$$x_{n+2}(t+1) = -\alpha_2 x_{n+1}(t) + x_{n+2}(t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{n} u_k(t) + u_{2n+1}(t) + u_{2n+2}(t) \ (t = 0), \qquad (1)$$
$$x_{n+2}(t+1) = \alpha_3 \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k(t)}{T_k} - \theta x_{n+1}(t) + x_{n+2}(t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{n} u_k(t) + \gamma \sum_{k=1}^{n} u_{n+k}(t) \ \ (t = 1, ..., T-1);$$
$$x_k(0) = 0 \ (k = 1, ..., n+2);$$
$$x_{n+2}(t) \ge 0 \ \ (t = 1, ..., T),$$
$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k(t)}{T_k} - \alpha_2 x_{n+1}(t) +$$
$$+(1-\beta)\sum_{k=1}^{n} u_{n+k}(t) \ge 0 \ \ (t = 1, ..., T-1);$$
$$u_{n+k}(t) \le \delta_k x_k(t) \ \ (k = 1, ..., n;\ t = 1, ..., T-1),$$
$$u_{2n+1}(0) \le I_0, \ u_{2n+2}(0) \le K_0,$$
$$u_k(t) \ge 0 \ \ (k = 1, ..., n;\ t = 0, ..., T-1),$$
$$u_{n+k}(t) \ge 0 \ \ (k = 1, ..., n;\ t = 1, ..., T-1),$$
$$u_{2n+1}(0) \ge 0, \ \ u_{2n+2}(0) \ge 0,$$
$$J = \{J_1, J_2\} \to \max, \qquad (2)$$

где $J_1 = -u_{2n+1}(0) - u_{2n+2}(0) +$

$$\sum_{t=1}^{T-1} \frac{\left[\alpha_3 \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k(t)}{T_k} - \theta x_{n+1}(t) + \gamma \sum_{k=1}^{n} u_{n+k}(t)\right]}{(1+r)^t} + \frac{\delta x_{n+1}(T)}{(1+r)^{T-1}},$$

$$J_2 = \sum_{t=T^2}^{T-1} \frac{\left[-\alpha_3 \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k(t)}{T_k} + \theta x_{n+1}(t) + \rho \sum_{k=1}^{n} u_{n+k}(t)\right]}{(1+r)^t}$$

– соответственно дисконтированная сумма собственных средств предприятия и налоговых поступлений в ГО; $u_k(t) \ (t = 0, ..., T-1)$, $u_{n+k}(t) \ \ (k = 1, ..., n;\ t = 1, ..., T-1)$, $u_{2n+1}(0)$ и $u_{2n+2}(0)$ – стоимость приобретаемых ОПФ, выручка от реализации продукции k-го типа, внешние и внутренние инвестиции соответственно; $x_k(t) \ (k = 1, ..., n)$, $x_{n+1}(t)$, $x_{n+2}(t) \ (t = 0, ..., T)$ – соответственно накопленная стоимость всех ОПФ k-го типа, остаточная стоимость всех ОПФ, текущие денежные средства предприятия в момент t; V_k, T_k, c_k и P_k – соответственно производительность, срок службы, стоимость единицы ОПФ и стоимость единицы продукции k-го типа; I_0, K_0 – суммы внешних и внутренних инвестиций, выделяемых на весь срок действия ИП; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – ставки НДС, НИ, НП и ЕСН соответственно (НДС включается в цену продукции, поэтому можно считать, что $\alpha_1 = 0$); β – доля выручки от реализации, выделяемая на ФОТ; $\theta = (1-\alpha_3)\alpha_2$, $\delta_k = P_k V_k / c_k \ (k = 1, ..., n)$, $\gamma = (1-\alpha_3)(1-\beta)$, $\rho = (1-\beta)\alpha_3 + \alpha_4\beta$, r – ставка доходности ИП; $\delta \ (0 \le \delta \le 1)$ – доля остаточной стоимости всех ОПФ на момент $t = T$ от ее балансовой стоимости, определяемая в общем случае экспертно.

Согласно исследованию [3], многокритериальная МЗЛП (ММЗЛП) (1), (2) равносильна однокритериальной задаче с условиями (1) и максимизацией свертки критериев $J(\mu) = \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2$, где $\mu \in M = \{(\mu_1; \mu_2) \in E^2 \mid \mu_i > 0 \ (i = 1, 2);\ \mu_1 + \mu_2 = 1\}$ – вектор параметров, E^2 – двумерное евклидово пространство. Поскольку $\mu_2 = 1 - \mu_1$, то, обозначая $\mu = \mu_1$, перейдем от ММЗЛП (1), (2) к эквивалентной ей однокритериальной задаче (1) при следующем условии:

$$J(\mu) = \mu J_1 + (1-\mu) J_2 \to \max \ (\mu \in (0; 1)). \qquad (3)$$

Для задачи (1), (3) имеет место лемма [2], аналогичная лемме из публикации [1].

Лемма. Для оптимальных значений переменных $u^*_{n+k}(t)$ и $x^*_k(t) \ (k = 1, ..., n;\ t = 1, ..., T-1)$ модели (1), (3) справедливо равенство

$$u^*_{n+k}(t) = \delta_k x^*_k(t) \ (k = 1, ..., n;\ t = 1, ..., T-1). \qquad (4)$$

Здесь и далее * обозначены оптимальные значения переменных и критериев. Условие (4) означает следующее: в оптимуме выручка от реализации в модели (1), (3) (а значит, и в задаче (1), (2)) равна стоимости произведенной по каждому виду продукции.

Рассмотрим задачу двухкритериальной оценки ИП, описанного моделью (1), (2), когда продажа ОПФ предприятием не предполагается, т. е. $\delta = 0$. Для применения z-преобразования к анализу модели (1), (3), доопределим управления, $u_k(t) \ (k = 2n+1, 2n+2;\ t = 1, ..., T-1)$ до вектора постоянной размерности $n + 2$ (поскольку переменные $u_{n+k}(t) \ (k = 1, ..., n;\ t = 1, ..., T-1)$ можно исключить согласно (4)), полагая отсутствующие переменные равными нулю, т. е. дополняя указанную задачу условиями $u_{2n+1}(t) \le 0$, $u_{2n+1}(t) \ge 0$; $u_{2n+2}(t) \le 0$, $u_{2n+2}(t) \ge 0 \ (t = 1, ..., T-1)$. Учитывая (4) и начальные условия, запишем ее ограничения и критерии единообразно, перейдя к МЗЛП:

$$x_k(t+1)=x_k(t)+u_k(t)$$
$$(k=1,\ldots,n;\ t=0,\ldots,T-1),$$
$$x_{n+1}(t+1)=-\sum_{k=1}^{n}x_k(t)/T_k+x_{n+1}(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\ \ (t=0,\ldots,T-1)$$
$$x_{n+2}(t+1)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k x_k(t)-\theta x_{n+1}(t)+x_{n+2}(t)-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}u_k(t)+u_{2n+1}(t)+u_{2n+2}(t)\ (t=0,\ldots,T-1);$$
$$x_k(0)=0\ \ (k=1,\ldots,n+2);\qquad(5)$$
$$x_{n+2}(t+1)\ge 0\ \ (t=0,\ldots,T-1),$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_k x_k(t)-\alpha_2 x_{n+1}(t)\ge 0\ \ (t=0,\ldots,T-1),$$
$$u_{2n+1}(t)\le I_0,\ u_{2n+2}(t)\le K_0\ \ (t=0);$$
$$u_{2n+1}(t)\le 0,\ u_{2n+2}(t)\le 0\ (t=1,\ldots,T-1),$$
$$u_k(t)\ge 0\ \ (k=1,\ldots,n;\ 2n+1,\ 2n+2;\ t=0,\ldots,T-1);$$
$$\overline{J}(\mu)=\mu\overline{J}_1+(1-\mu)\overline{J}_2\to\max\ (\mu\in(0;1)),$$

где $$\overline{J}_1=\sum_{t=0}^{T-1}\frac{\left[\sum_{k=1}^{n}\gamma_k x_k(t)-\theta x_{n+1}(t)-u_{2n+1}(t)-u_{2n+2}(t)\right]}{(1+r)^t};$$

$$\overline{J}_2=\sum_{t=0}^{T-1}\frac{\left[\sum_{k=1}^{n}\omega_k x_k(t)+\theta x_{n+1}(t)\right]}{(1+r)^t};\qquad \gamma_k=\alpha_3/T_k+\gamma\delta_k;$$

$\omega_k=-\alpha_3/T_k+\rho\delta_k$; $\sigma_k=(1-\beta)\delta_k-1/T_k$ $(k=1,\ldots,n)$. По построению для целевых критериев $J(\mu)$ и $\overline{J}(\mu)$ соответственно задач (1), (3) и (5) имеет место неравенство: $J(\mu)\le\overline{J}(\mu)$. В частности,

$$J^*(\mu)\le\overline{J}^*(\mu)\ (\mu\in(0;1)).\qquad(6)$$

Полагая $z = 1 + r > 1$, перейдем в задаче (5) к пределу при $T\to\infty$. В силу предпосылки (3), $T\to+\infty\Rightarrow T_k\to+\infty$, откуда следует, что $\gamma_k\to\gamma\delta_k$, $\omega_k\to\rho\delta_k$, $\sigma_k\to(1-\beta)\delta_k$ $(k=1,\ldots,n)$. Применяя к последней МЗЛП z-преобразование и учитывая формулу $Z(x(t+1))=z\left[X(z)-x(0)\right]$, получим двухпараметрическую (по параметрам μ и z) статическую задачу линейного программирования (ЗЛП):

$$zX_k(z)=X_k(z)+U_k(z)\ (k=1,\ldots,n),$$
$$zX_{n+1}(z)=X_{n+1}(z)+\sum_{k=1}^{n}U_k(z),$$
$$zX_{n+2}(z)=\gamma\sum_{k=1}^{n}\delta_k X_k(z)-\theta X_{n+1}(z)+$$
$$+X_{n+2}(z)-\sum_{k=1}^{n}U_k(z)+U_{2n+1}(z)+U_{2n+2}(z),$$
$$zX_{n+2}(z)\ge 0,$$
$$(1-\beta)\sum_{k=1}^{n}\delta_k X_k(z)-\alpha_2 X_{n+1}(z)\ge 0,\qquad(7)$$
$$U_{2n+1}(z)\le I_0,\ U_{2n+2}(z)\le K_0;$$
$$U_k(z)\ge 0\ \ (k=1,\ldots,n;\ 2n+1,\ 2n+2);$$
$$\overline{J}(\mu,z)=\mu\overline{J}_1(z)+(1-\mu)\overline{J}_2(z)\to\max\ (\mu\in(0;1);\ z>1),$$

где $\overline{J}_1(z)=\gamma\sum_{k=1}^{n}\delta_k X_k(z)-\theta X_{n+1}(z)-U_{2n+1}(z)-U_{2n+2}(z)$,

$\overline{J}_2(z)=\rho\sum_{k=1}^{n}\delta_k X_k(z)+\theta X_{n+1}(z)$,

$U_j(z)=\sum_{t=0}^{\infty}u_j(t)z^{-t}$ $(j=1,\ldots,n;\ 2n+1,\ 2n+2)$ и $X_k(z)=\sum_{t=0}^{\infty}x_k(t)z^{-t}$ $(k=1,\ldots,n+2)$ – z-изображения управляющих и фазовых переменных задачи (5), $\overline{J}(\mu,z)=\lim_{T\to\infty}\overline{J}(\mu)$, причем при $T\to+\infty$ по построению $\overline{J}^*(\mu)\le\overline{J}^*(\mu,z)$ $(\mu\in(0;1))$, откуда в силу выражения (6) получим

$$J^*(\mu)\le\overline{J}^*(\mu,z)\ (\mu\in(0;1);\ z>1).\qquad(8)$$

Выражая из уравнений в ЗЛП (7) переменные $X_k(z)$ $(k=1,\ldots,n+2)$, имеем

$$X_k(z)=\frac{U_k(z)}{z-1}\ (k=1,\ldots,n),$$
$$X_{n+1}(z)=\frac{\sum_{k=1}^{n}U_k(z)}{z-1},$$
$$X_{n+2}(z)=$$
$$=\frac{\sum_{k=1}^{n}(\gamma\delta_k-\theta-z+1)U_k(z)+(z-1)(U_{2n+1}(z)+U_{2n+2}(z))}{(z-1)^2}.$$

Подставляя последние формулы в оставшиеся выражения указанной задачи и учитывая, что $z = 1 + r > 1$, запишем параметрическую статическую задачу, совпадающую с приведенной в работе [2] и эквивалентную модели $ZB1$:

$$\sum_{k=1}^{n}(\theta+r-\gamma\delta_k)U_k(z)-r(U_{2n+1}(z)+U_{2n+2}(z))\le 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n}(\theta-\gamma\delta_k)U_k(z)\le 0,$$
$$U_{2n+1}(z)\le I_0,\ U_{2n+2}(z)\le K_0,$$
$$U_k(z)\ge 0\ (k=1,\ldots,n;\ 2n+1,\ 2n+2),\qquad(9)$$
$$\overline{\overline{J}}(\mu,z)=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k U_k(z)-\mu[U_{2n+1}(z)+$$
$$+U_{2n+2}(z)]\to\max\ (\mu\in(0;1))$$

где $\varphi_k=[1-2\mu]\theta+[\mu\gamma+(1-\mu)\rho]\delta_k$ $(k=1,\ldots,n;\ \mu\in(0;1))$.

Заметим, что в указанной работе ММЗЛП (1), (2) получена формально из более общей модели A, отличающейся от нее дополнительным ограничением

$$u_{n+k}(t)\le q_k(t+1)\ \ (k=1,\ldots,n;\ t=T^2,\ldots,T-1),\qquad(10)$$

при условиях

$$q_k(t+1)\to+\infty$$
$$(k=1,\ldots,n;\ t=T^2,\ldots,T-1);\qquad(11)$$
$$T^1=T^2=1.$$

Здесь $q_k(t+1)$ $(k=1,\ldots,n;\ t=T^2,\ldots,T-1)$ – прогнозный спрос на продукцию k-го типа в момент $t + 1$, T^1 и T^2 – моменты окончания инвестирования и начала производства. При этом, согласно работе [2], в модели ZA, полученной после применения z-оператора к задаче A, появляются агрегированные ограничения

$$U_{n+k}(z) \le Q_k(z),\; U_{n+k}(z) \le \frac{\delta_k U_k(z)}{z-1}\; (k=1,\dots,n), \quad (12)$$

где $Q_k(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{t=T^2}^{\infty} q_k(t+1)z^{-t}\quad (k=1,\dots,n)$. Первое из них в силу условия (11) примет вид $U_{n+k}(z) \le +\infty\ (k=1,\dots,n)$, и исключается как избыточное, а второе, являющееся единственным ограничением на переменные $U_{n+k}(z)\ \ (k=1,\dots,n;\ z>1)$ сверху, в оптимуме выполняется как равенство, поскольку целевая функция в *ZA* максимизируется, а ее коэффициенты при указанных переменных положительны:

$$U^*_{n+k}(z) = \frac{\delta_k U^*_k(z)}{z-1}\quad (k=1,\dots,n). \quad (13)$$

Указанное выше совпадение ЗЛП (9) с задачей из монографии [2] подтверждает правильность выводов, полученных в отмеченной работе формальным многократным предельным переходом согласно 1-го из условий (11). При этом рассмотренный выше подход является более строгим (поскольку не использует указанного предельного перехода, а значит, не требует обоснования его правомерности). Отметим, что, если не учитывать «динамические» соотношения (4) (достаточно рутинное доказательство которых приведено в том же источнике), то получим ЗЛП, в которой, в отличие от задачи *ZA*, отсутствует 1-е из неравенств (12). Учитывая «статические» равенства (13), вновь получим ЗЛП (9). Авторская методика из указанной монографии [2] может рассматриваться в качестве правдоподобных и простых наводящих рассуждений (требующих последующего обоснования), позволяющих трактовать задачи (1), (2) и (9) как частные предельные случаи при условиях (11) моделей *A* и *ZA* соответственно. Решение *z*-задачи (9), найденное там же, определяется следующей теоремой.

Теорема 1. Если найдется такой номер $k_0 \in \{1,\dots,n\}$, что $\delta_{k_0} = \max\limits_{k=1,\dots,n} \delta_k$, причем $\frac{\theta}{\gamma} \le \delta_{k_0} < \frac{\theta+r}{\gamma}$, то в ЗЛП (9) существует нетривиальное решение

$$U_{k_0}(z) = r(I_0+K_0)/(\theta+r-\gamma\delta_{k_0});$$

$$U_{n+k_0}(z) = \delta_{k_0}(I_0+K_0)/(\theta+r-\gamma\delta_{k_0}),$$

$$U_k(z)=0;\ U_{n+k}(z)=0\ (k=1,\dots,n;\ k\ne k_0);$$

$$U_{2n+1}(z)=I_0,\ U_{2n+2}(z)=K_0,$$

которому в пространстве критериев соответствует единственная ненулевая Парето-точка с координатами
$$\overline{\overline{J}}{}^*_1(z) = \left(\frac{2\gamma\delta_{k_0}-2\theta-r}{\theta+r-\gamma\delta_{k_0}}\right)[I_0+K_0];\ \overline{\overline{J}}{}^*_2(z) = \left(\frac{\theta+\rho\delta_{k_0}}{\theta+r-\gamma\delta_{k_0}}\right)[I_0+K_0]$$
для всех значений μ, задаваемых соотношениями
$$\left[\begin{array}{l}\delta_{k_0} \ge (2\theta+r)/(2\gamma),\ \ \mu\in(0;1)\\ \delta_{k_0} < (2\theta+r)/(2\gamma),\ \mu\in(0;(\theta+\rho\delta_{k_0})/[3\theta+r+(\rho-2\gamma)\delta_{k_0}]).\end{array}\right.$$
При этом оптимальное значение свертки $\overline{\overline{J}}{}^*(\mu,z)$ в указанной ЗЛП равно
$$\overline{\overline{J}}{}^*(\mu,z) = \left(\frac{\theta+\rho\delta_{k_0}+[(2\gamma-\rho)\delta_{k_0}-3\theta-r]\mu}{\theta+r-\gamma\delta_{k_0}}\right)[I_0+K_0].$$

Не нарушая общности, можно полагать, что в теореме 1 номер $k_0=1$ (добившись этого соответствующей перенумерацией). Тогда, обозначая

$$\overline{U_{2k-1}}(z)=U_k(z);\ \overline{U_{2k}}(z)=U_{n+k}(z)\ (k=1,\dots,n);$$

$$V_1(z)=U_{2n+1}(z);\ V_2(z)=U_{2n+2}(z) \quad (14)$$

и переходя формально к пределу при $n\to\infty$, переформулируем указанную теорему в следующем виде.

Теорема 2. Если $\delta_1 = \max\limits_{k=1,\dots}\delta_k$ таково, что

$$\frac{\theta}{\gamma} \le \delta_1 < \frac{\theta+r}{\gamma}, \quad (15)$$

то в ЗЛП (9) даже при неограниченном количестве видов продукции существует нетривиальное решение

$$\overline{U_1}(z) = r(I_0+K_0)/(\theta+r-\gamma\delta_1);$$

$$\overline{U_2}(z) = \delta_1(I_0+K_0)/(\theta+r-\gamma\delta_1);$$

$$\overline{U_k}(z) = 0\ (k=3,\dots);$$

$$V_1(z)=I_0,\ V_2(z)=K_0,$$

которому в пространстве критериев соответствует единственная ненулевая Парето-точка с координатами

$$\begin{aligned}\overline{\overline{J}}{}^*_1(z) &= \left(\frac{2\gamma\delta_1-2\theta-r}{\theta+r-\gamma\delta_1}\right)[I_0+K_0];\\ \overline{\overline{J}}{}^*_2(z) &= \left(\frac{\theta+\rho\delta_1}{\theta+r-\gamma\delta_1}\right)[I_0+K_0]\end{aligned} \quad (16)$$

для всех значений μ, задаваемых соотношениями
$$\left[\begin{array}{l}\delta_1 \ge (2\theta+r)/(2\gamma),\ \ \mu\in(0;1)\\ \delta_1 < (2\theta+r)/(2\gamma),\ \mu\in(0;(\theta+\rho\delta_1)/[3\theta+r+(\rho-2\gamma)\delta_1]).\end{array}\right.$$
При этом предел оптимального значения свертки $\overline{\overline{J}}{}^*(\mu,z)$ в указанной задаче равен
$$\lim_{n\to\infty}\overline{\overline{J}}{}^*(\mu,z) = \left(\frac{\theta+\rho\delta_1+[(2\gamma-\rho)\delta_1-3\theta-r]\mu}{\theta+r-\gamma\delta_1}\right)[I_0+K_0].$$

Справедливы следующие теоремы, доказательство которых также приведено в монографии [2].

Теорема 3. В ЗЛП вида

$$f(x)=(c,x)\to\max;$$

$$g_j(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i+a_j \le 0\ (j=1,\dots,k) \quad (17)$$

решение существует тогда и только тогда, когда множество *X*, задаваемое ее ограничениями, не пусто и функция *f*(*x*) ограничена сверху на этом множестве.

Теорема 4. Оптимальное значение свертки $J^*(\mu)$ в проекте, описываемом моделью *A*, есть неубывающая функция от параметров T, n, T^1, $\gamma, \delta;\ \delta_k,\ q_k(t)\ (k\in\{1,\dots,n\};\ t\in\{T^2+1,\dots,T\});\ I_0, K_0$ и невозрастающая от T^2, θ и $r\ (T,n,T^1,T^2\in\{1,2,\dots\})$ при неизменных значениях остальных параметров и $\mu\in[0;1]$.

Отметим, что доказательство теоремы 3, предложенное в работе [2], не использует конечность числа переменных и ограничений задачи (17), задающих множество *X*. Поэтому данная теорема выполняется и в том случае, когда число переменных и/или неравенств бесконечно, т. е. полагаем в частности, что в указанной задаче $n\to\infty$ и/или $k\to\infty$.

Поскольку $\overline{\overline{J}}{}^*(\mu,z)=\overline{J}{}^*(\mu,z)\ (\mu\in(0;1);z>1)$, то при $n\to\infty$ из теоремы 2 и неравенства (8) получим условие, аналогичное следствию 3.5.1 из работы [2] для конечного *n*:

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{n\to\infty} J^*(\mu) \le$$
$$\le \left(\frac{\theta + \rho\delta_1 + [(2\gamma - \rho)\delta_1 - 3\theta - r]\mu}{\theta + r - \gamma\delta_1} \right) [I_0 + K_0], \quad (18)$$

из которого следует, что при условиях (15) и неограниченных n, T целевая функция $J(\mu)$ $(\mu \in (0;1))$ МЗЛП (1), (3) ограничена сверху. Поскольку управление (полученное перенумерацией исходных переменных указанной задачи, соответствующей заменам (14)) $\overline{u}_{2k-1}(t) = 0$ $(k = 1, ...; t = 0, ...)$; $\underline{u}_{2k-1}(t) = 0$ $(k = 1, ...; t = 1, ...)$; $v_{2n+1}(t) = 0$ $(t = 0)$, $v_{2n+2}(t) = 0$ $(t = 0)$ является допустимым при $T \to \infty$; $n \to \infty$, а задачи (1), (2) и (1), (3) эквивалентны, то по теореме 3 доказали следующую теорему.

Теорема 5. Если $\delta_1 = \max\limits_{k=1,...} \delta_k$ удовлетворяет условиям (15), то в ММЗЛП (1), (2) даже при неограниченном количестве видов продукции на бесконечном временном интервале существует нетривиальное решение, причем имеет место неравенство (18).

Для содержательной корректности предельного перехода при $n \to \infty$ в теореме 2 номер $k_0 \in \{1, ..., n\}$ должен перенумеровываться так, чтобы он не зависел от n.

При условиях (11) из теоремы 4 и теоремы Вейерштрасса о существовании предела ограниченной монотонной последовательности следует справедливость теоремы 5 и для модели A с конечным спросом и на конечном интервале времени. Более того, принимая во внимание, что предложенный в этой работе подход строго обосновывает правомерность предельного перехода согласно 1-го из условий (11) и получаемых с его помощью результатов, а значит, позволяет с формальной и экономической точки зрения интрепретировать модели $B1$ и $ZB1$ как частные асимптотические варианты моделей A и ZA соответственно при указанных условиях, из теоремы 5 получим следствие, являющееся по сути ее переформулировкой.

Следствие. Если $\delta_1 = \max\limits_{k=1,...} \delta_k$ удовлетворяет условиям (15), то в задаче A даже при неограниченном количестве видов продукции и неограниченном спросе в каждый момент времени в период производства и по каждому виду на бесконечном временном интервале существует нетривиальное решение, причем имеет место неравенство (18).

Заметим, что теорема 5 (или следствие) носит содержательно парадоксальный характер: хотя основные экономические характеристики ИП, описываемого моделью $B1$ (или A) – число различных видов ОПФ, горизонт планирования (и спрос на продукцию) бесконечны, значение свертки ее критериев, соответствующее Парето-точке критериального пространства, является конечным при условиях (15) и любых значениях остальных параметров проекта. Согласно численных экспериментов, представленных в главе 2 работы [2], справедливо эмпирическое соотношение $J^*_i|_A \le J^*_i(z)|_{ZA}$ $(i = 1, 2; \mu \in (0;1))$, где $J^*_i|_A, J^*_i(z)|_{ZA}$ – значения i-го критерия в Парето-точке задач A и ZA соответственно, из которого в силу (16) следует, что даже при условиях теоремы 5 (следствия) координаты Парето-точек критериального пространства задачи A ограничены сверху:

$$J^*_1|_A \le \left(\frac{2\gamma\delta_1 - 2\theta - r}{\theta + r - \gamma\delta_1} \right) [I_0 + K_0];$$

$$J^*_2|_A \le \left(\frac{\theta + \rho\delta_1}{\theta + r - \gamma\delta_1} \right) [I_0 + K_0]$$

Этот же факт можно обосновать строго от противного, учитывая, что $\mu \in (0;1)$, вид свертки в (3) и условие (18). Содержательно указанный результат объясняется тем, что если максимальная фондоотдача ОПФ каждого вида (характеризующая их экономическую эффективность) заключена в диапазоне (15), то при условиях теоремы 5 (следствия) в проекте оптимизации реальных инвестиций предприятия, описываемом моделью $B1$ (A), даже в оптимуме целевые критерии ограничены сверху.

Отметим, что если не делать замен (14), то теорему 5 сложно интерпретировать полностью содержательно. Аналогично можно показать, что если в модели A отсутствует ограничение (10) для некоторого $k \in \{1, ..., n\}$; $t \in \{T^2, ..., T-1\}$, то в соответствующей z-задаче отсутствует 1-е из ограничений (12) для указанного номера k, что формально можно получить из упомянутого ограничения при $q_k(t) \to +\infty$, т. е. при $Q_k(z) \to +\infty$.

На основе z-преобразования можно дать более простой метод доказательства леммы. Допустим, что существуют $k \in \{1, ..., n\}$; $t \in \{1, ..., T-1\}$, при которых равенство (4) в оптимуме не выполняется, т. е. $u^*_{n+k}(t) < \delta_k x^*_k(t)$. Поскольку в ЗЛП оптимум достигается на границе допустимого множества, то последнее неравенство можно исключить, поскольку оно является строгим. Тогда, аналогично предыдущему замечанию, 2-е из условий (12) отсутствует, что противоречит (13), а значит, указанное строгое неравенство невозможно, откуда следует (4).

Библиографический список

1. Медведев, А. В. Параметрический анализ модели реальных инвестиций без ограничений на спрос с помощью дискретного принципа максимума / А. В. Медведев, П. Н. Победаш // Вестн. унив. комплекса. Вып. 4(18). Красноярск : НИИ СУВПТ, 2005. С. 186–196.

2. Медведев, А. В. Применение z-преобразования к исследованию многокритериальных линейных моделей регионального экономического развития : моногр. / А. В. Медведев ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2008.

3. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. М. : Наука, 1982.

P. N. Pobedash

ASIMPTOTICAL ANALYSIS OF THE TWO-CRITERION MODEL OF THE REAL INVESMENT ON THE BASIS OF THE *Z*-TRANSFORMATION

The application of the z-transformation approach for the analysis of the multicriteria linear optimal control problem is suggested. The z-transformation is applied to proof the decision of existing and receiving the sufficient conditions of the *regional investment projects non-efficiency on the example of two-criteria model of the regional economy without restriction of the product amount, demand and planning time-frame.*

Keywords: z-transformation, two-criterion model of optimal control, investment planning.

УДК 519.6

А. А. Кузнецов, А. К. Шлепкин, А. Н. Антамошкин

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ КОНЕЧНОСТИ БЕРНСАЙДОВОЙ ГРУППЫ $B(2,5)$[1]

Показано, что централизатор автоморфизма порядка 2 специального вида бернсайдовой группы $B_0(2,5)$ имеет порядок 5^{17}.

Ключевые слова: проблема Бернсайда.

Пусть $B(2,5)$ – двупорожденная бернсайдова группа периода 5, а $B_0(2,5)$ – максимальная универсальная конечная двупорожденная группа того же периода (порядок последней равен 5^{34} [1]). Вопрос о совпадении указанных групп на сегодняшний день является открытым [2].

В настоящей работе сделан первый шаг в попытке редуцирования проблемы совпадения групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ к проблеме совпадения двух групп, одна из которых имеет порядок существенно меньший, чем 5^{34}. Данная попытка основана на классическом результате В. П. Шункова, который был получен в 1972 г.: периодическая группа, содержащая инволюцию, централизатор которой конечен, локально конечна и почти локально разрешима [3].

Пусть $\{1,2\}$ – образующие группы $B(2,5)$ и φ – автоморфизм порядка 2 данной группы следующего вида

$$\varphi: \begin{cases} 1 \to 2, \\ 2 \to 1. \end{cases}$$

Аналогичным образом (в тех же обозначениях образующих) можно определить автоморфизм φ_0 группы $B_0(2,5)$.

Пусть $C_{B(2,5)}(\varphi)$ и $C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)$ – централизаторы автоморфизмов φ и φ_0 в $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$, соответственно.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. $|C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)| = 5^{17}$.

Поскольку по приведенной выше теореме порядок $C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)$ значительно меньше порядка $B_0(2,5)$, авторы предлагают сравнивать $C_{B(2,5)}(\varphi)$ и $C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)$. Ясно, что если $C_{B(2,5)}(\varphi) \cong C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)$, то по упомянутому выше результату В. П. Шункова группа $B(2,5)$ будет конечна.

Доказательство. Как и в работе [1], будем представлять элементы группы $B_0(2,5)$ в виде нормальных коммутаторных слов. В качестве первых двух коммутаторов возьмем образующие группы $B_0(2,5)$, которые обозначим 1 и 2, а последующие с 3 по 34 коммутатор вычисляются рекурсивно через 1 и 2 [1].

В этом случае каждый элемент $g \in B_0(2,5)$ однозначно представляется множеством упорядоченных произведением базисных коммутаторов в определенных степенях

$$g = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots 34^{\alpha_{34}},$$

где $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 34)$.

Для доказательства теоремы необходимо найти в группе $B_0(2,5)$ такие элементы, что

$$\varphi_0(g) = \varphi_0(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdot \ldots 34^{\alpha_{34}}) = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots 34^{\alpha_{34}} = g. \qquad (1)$$

При помощи компьютерных вычислений, используя список соотношений для базисных коммутаторов из работы [1], был вычислен результат действия φ_0 на каждый базисный коммутатор.

$\varphi_0(1) = 2,$

$\varphi_0(2) = 1,$

$\varphi_0(3) = 3^4,$

$\varphi_0(4) = 5^4 10^4 13^1 14^4 15^1 17^1 18^1 19^1 20^3 21^4 23^1 24^1 25^4 26^1 27^4 28^4 31^3 32^3 33^3 34^1,$

$\varphi_0(5) = 4^4 9^3 11^1 12^4 13^2 16^1 17^3 18^3 20^1 21^1 22^4 23^4 25^1 27^1 30^3 31^3 32^3 34^1,$

$\varphi_0(6) = 8^4 14^4 17^1 20^4 21^2 22^3 24^3 25^1 26^1 28^3 29^3 30^1 31^4 32^1 33^2 34^4,$

$\varphi_0(7) = 7^4 9^3 10^4 11^1 12^2 13^2 14^4 16^4 17^4 18^1 19^1 21^1 22^1 23^1 24^1 25^3 26^3 28^4 29^2 30^4 32^2 33^3,$

$\varphi_0(8) = 6^4 11^3 15^4 16^2 19^2 20^3 21^3 23^1 27^4 29^2 30^3 32^1 33^3 34^3,$

$\varphi_0(9) = 10^3 12^2 13^3 14^2 15^4 16^1 17^4 18^1 19^3 20^4 21^2 22^1 23^1 24^1 25^3 27^4 28^3 29^4 30^2 31^1 32^3 33^3,$

$\varphi_0(10) = 9^2 11^2 12^3 13^3 16^4 17^4 18^3 20^3 22^4 24^3 25^2 27^1 29^2 30^1 31^1 32^3 33^3 34^3,$

$\varphi_0(11) = 14^3 17^2 18^4 20^4 21^1 22^4 24^2 25^1 27^4 28^4 30^3 31^1 32^3 34^4,$

$\varphi_0(12) = 13^3 15^2 16^3 18^2 19^4 20^4 21^1 23^3 24^4 25^2 27^1 29^1 30^4 31^3 32^2 33^2 34^3,$

$\varphi_0(13) = 12^2 15^3 16^4 17^4 18^1 19^3 20^3 21^3 22^4 24^4 25^1 26^1 27^3 29^1 30^1 32^1 33^4 34^1,$

$\varphi_0(14) = 11^2 15^3 16^3 20^4 21^3 24^3 27^4 30^1 32^3 33^1 34^1,$

$\varphi_0(15) = 17^3 20^1 22^2 24^1 26^4 27^4 29^1 30^2 31^1 32^3 33^1 34^1,$

$\varphi_0(16) = 17^4 18^4 20^2 21^1 22^2 24^4 27^2 28^4 29^2 31^1 32^3 33^4 34^2,$

$\varphi_0(17) = 15^2 19^3 20^4 21^1 23^3 24^3 25^3 27^4 29^4 30^3 32^1 33^2 34^3,$

$\varphi_0(18) = 15^3 16^4 19^3 21^4 24^3 25^2 27^1 30^3 31^4 32^1 33^2 34^3,$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента России (код проекта МК-2494.2008.1.), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/3023), а также РФФИ (код проекта 09-01-07177-а).