

А. Ю. Власов, Ю. В. Захаров, Н. В. Филенкова

ИЗГИБ УПРУГОЙ КОНСОЛИ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ: ПОРОГОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НАГРУЗОК*

Рассмотрен практически значимый случай потери устойчивости консоли при изгибе в поле центробежных сил – случай общего перемещения действующей сосредоточенной нагрузки. Получены точные решения задачи в геометрически нелинейной постановке для пороговых нагрузок и стрелы прогиба консоли. Определены случаи возможных переходов между формами консоли, отличающимися числом точек перегиба.

Ключевые слова: консоль, центробежная сила, формы изгиба, устойчивость.

Задачи, связанные с изгибом консоли в поле центробежных сил, актуальны при разработке конструкций лопастей вертолетов, лопаток турбин и других конструкций, в том числе и применяемых в космосе, где присутствуют гибкие элементы консольного типа, находящиеся одновременно под действием растягивающей и сжимающей нагрузок.

Ранее задачи изгиба для консоли с сосредоточенной на конце массой в плоскости вращения и в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения, рассматривались в работе [1], где при условии малости прогибов на основе решения линейных уравнений получена зависимость эффективного коэффициента жесткости от приведенной растягивающей нагрузки. Решение в геометрически нелинейной постановке применительно к расчету изгиба консоли в механизме центробежного регулятора скорости вращения вала дано в работе [2], где точные выражения для стрелы прогиба были определены через три эллиптических параметра Попова – эллиптический модуль и два значения эллиптических амплитуд на концах консоли. Изгибно-крутильные пространственные колебания стержня с учетом кориолисовых сил инерции при условии малости прогиба рассмотрены в работе [3].

Стремительное усложнение конструкций и исполнительных механизмов, основанных на геометрически нелинейном изгибе составных элементов, применение современных конструкционных материалов, а также ограничения, накладываемые условиями эксплуатации, приводят к необходимости исследования устойчивости нагруженной конструкции. Цель данной работы – дать аналитический метод расчета гибких элементов консольного типа при пространственном изгибе в поле центробежных сил.

Для практического применения можно выделить два вида нагружения консоли в поле центробежных сил, приводящих к двум различным вариантам изгиба.

Первый вариант – нелинейный изгиб в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения. Он рассмотрен в работе [4], где получены точные аналитические решения, зависящие от одного параметра.

Второй вариант – нелинейный изгиб в плоскости вращения, обусловленный растягивающей центробежной и изгибающей следящей нагрузкой, направленной перпендикулярно свободному концу консоли, ранее не рассматривался. Однако этот вариант в определенном приближе-

нии моделирует, например, изгиб лопасти в плоскости вращения, если набегающий на нее поток перпендикулярен ее оси.

Изучение статически равновесных форм изгиба консоли в поле центробежных сил после потери устойчивости, а также пороговых значений нагрузок; является актуальным и в связи с различными механическими и биомеханическими задачами требует дополнительного рассмотрения. Исследуем обозначенные выше варианты нагружения консоли и определим условия существования равновесных форм изгиба с точками перегиба и без них, а также значения пороговых нагрузок, при которых возможно существование таких статически равновесных форм.

Схемы нагружения консоли. Уравнения изгиба стержней хорошо известны. Наиболее подробно теория изгиба гибких стержней изложена в монографии [2]. В данной статье теорию изгиба стержней рассмотрим для случая больших геометрических нелинейностей, в основном следуя работам [1; 2; 5].

Введем систему координат. Пусть x, y – декартовы координаты в плоскости изгиба стержня; l – криволинейное расстояние от начала координат вдоль линии стержня до рассматриваемой точки; $\theta = \theta(l)$ – угол наклона касательной в текущей точке к линии стержня; $d\theta/dl$ – кривизна этой кривой. Покажем возможные схемы нагружения консоли при вращении, а также необходимые для дальнейших выкладок обозначения действующих сил и характеристик упругой кривой (рис. 1).

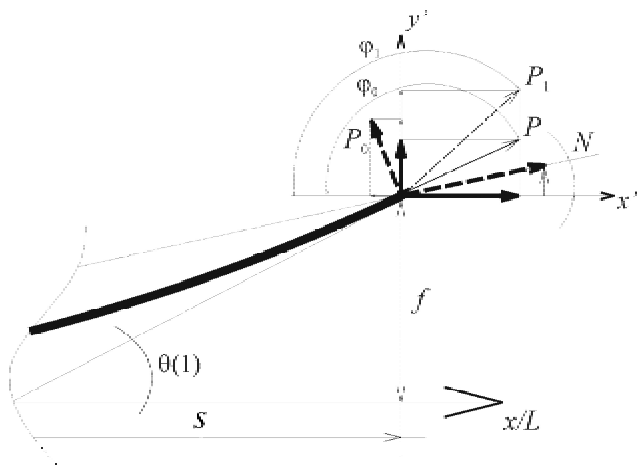


Рис. 1. Схемы нагружения консоли

*Работа поддержана программой Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/735.

Схема нагружения, показанная сплошными линиями, определяет изгиб в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения. Пунктирными линиями отмечен изгиб в плоскости вращения. Через φ_0 , φ_1 обозначены углы приложения результирующих сил P и P_1 в системе координат x' , y' ; P_0 , N – соответственно сжимающая и растягивающая компоненты результирующих нагрузок; f – прогиб конца консоли; α – угол отклонения растягивающей составляющей N ; θ – угол между осью Ox и касательной к оси стержня в случае, если за положительный отсчет углов выбрано направление против часовой стрелки. Заметим, что составляющая P_0 в случае изгиба в плоскости вращения сохраняет постоянный угол с касательной, приведенной к концу консоли, т. е. является следящей.

В случае изгиба в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения, проекция результирующей силы P_{x2} совпадает с растягивающей силой N и имеет неизменное направление. В случае изгиба в плоскости чертежа растягивающая сила N поворачивается, и линия ее действия проходит через начальное сечение консоли.

Общий случай постановки задачи. Опишем решение задачи изгиба стержня, основываясь на работах [5; 6]. Пусть тонкий стержень, изначально прямой, закрепленный на левом конце и свободный либо закрепленный на правом, подвергается действию (сжатию под произвольным углом) внешней нагрузки, сосредоточенной на правом конце стержня. Изначальное неизогнутое положение стержня – вдоль оси Ox . Левый закрепленный конец стержня расположен в начале координат. Изгиб происходит с выпучиванием вверх.

Уравнение равновесия стержня приведем к уравнению нелинейного маятника:

$$EI \frac{d^2\theta}{dl^2} - P_x \sin \theta + P_y \cos \theta = 0. \quad (1)$$

Для упрощения уравнения введем угол наклона φ_0 направления сосредоточенной силы P к оси Ox . Для изучения возможных вариантов изгиба стержня рассмотрим угол направления силы φ_0 , изменяющийся в пределах от 0 до $\pi/2$. Величины P и φ_0 считаются известными. В результате получим

$$P_x = -P \cos \varphi_0, P_y = P \sin \varphi_0. \quad (2)$$

Подставим выражения (2) в уравнение (1):

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{P}{EI} \sin(\theta + \varphi_0) = 0.$$

Введем безразмерную длину $t = l/L$, изменяющуюся в пределах от 0 до 1 (здесь L – длина консоли), и сделаем замену $\gamma = \theta + \varphi_0$. Введем обозначение для собственного числа $q^2 = PL^2/EI$, где E – модуль Юнга; I – момент инерции стержня, и получим уравнение для угла γ типа уравнения нелинейного маятника:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + q^2 \sin \gamma = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения хорошо известно из [2; 5]:

$$\gamma(t) = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qt + F_1, k)],$$

$$d\gamma(t)/dt = 2kq \operatorname{cn}(qt + F_1, k),$$

где функции sn и cn – эллиптические синус и косинус Якоби. Модуль эллиптических функций k и параметр F_1

играют роль констант интегрирования, и их связь с действующей силой P и углом приложения φ_0 определяется по граничным условиям каждого конкретного случая изгиба стержня.

Поставим граничные условия к уравнению равновесия (1). Защемление на левом конце стержня требует, чтобы

$$\theta(0) = 0.$$

На свободном конце должно выполняться условие равенства нулю момента сил:

$$d\theta(L)/dl = 0.$$

Для уравнения (3) эти условия запишутся в виде

$$\gamma(0) = \varphi_0, d\gamma(1)/dt = 0. \quad (4)$$

Уравнение равновесия стержня будет соответствовать (1), причем угол, под которым действует сила, в системе координат изменяется в пределах от 0 до π . В работах [5; 6] рассматривалось изменение этого угла в пределах от 0 до $\pi/2$. Угол, равный π , соответствует ситуации, когда стержень совпадает с осью Ox и деформация чистого изгиба исключена в связи с отсутствием перерезывающей составляющей нагрузки. Также исключено растяжение консоли, поскольку эта возможность в сформулированной модели не учитывается. Произвольность перемещения силы достигается за счет изменения компонент результирующей силы, что возможно при вращении консоли за счет увеличения растягивающей нагрузки при увеличении угловой скорости вращения.

В общем случае угол приложения результирующей силы в зависимости от результирующих проекций, когда за положительное направление при определении проекций выбрано направление вдоль консоли как ось Ox , можно представить в виде

$$\varphi_1 = \pi m - \arctg(P_{y2}/P_{x2}), m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Пороговые значения нагрузок при изгибе в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения. В случае изгиба в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения,

$$\varphi_0 = \pi/2 + \arctg(P_{x2}/P_{y2}), \quad (6)$$

где P_{y2} , P_{x2} – соответственно поперечная и продольная составляющие результирующей нагрузки, были получены пороговые значения нагрузки для случая изгиба консоли перпендикулярно плоскости вращения:

$$\frac{P}{P_c} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 (n-1)^2 K^2 \left(\cos\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \arctg\left(P_{y'}/P_{x'}\right) \right),$$

где $P_c = (\pi/2)^2 EI/L^2$ – эйлерова критическая сила; n – номер моды решения; $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, откуда

$$\left(\frac{P_{y'}}{P_c}\right)^2 + \left(\frac{P_{x'}}{P_c}\right)^2 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^4 (n-1)^4 K^4 \times \\ \times \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{P_{y'}}{\sqrt{P_{y'}^2 + P_{x'}^2}}} + \sqrt{1 - \frac{P_{y'}}{\sqrt{P_{y'}^2 + P_{x'}^2}}} \right) \right). \quad (7)$$

Соотношение (7) определяет конфигурации для действующих сил, при которых реализуются статически равновесные формы изгиба консоли при различном количестве точек перегиба, определяемых числом n . Зависи-

мость поперечной нагрузки от растягивающей нагрузки [4] в соответствии с выражением (7) характеризует формы изгиба консоли с двумя и тремя точками перегиба (рис. 2). Однако в работе [4] анализ показанных зависимостей не проводился.

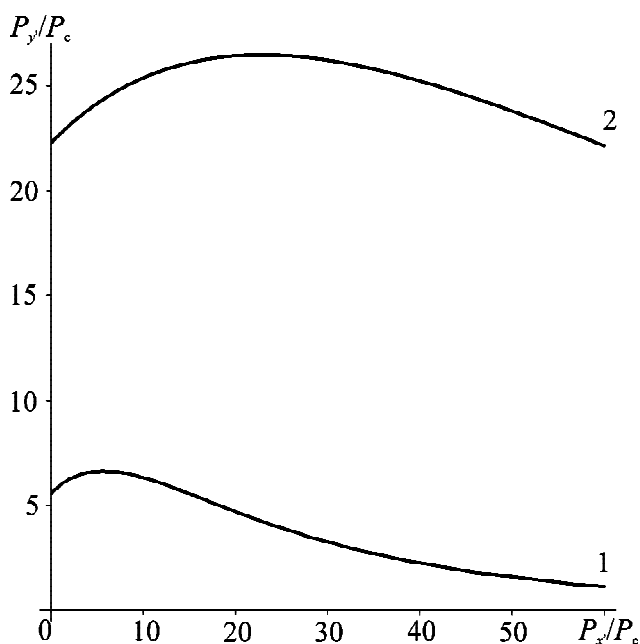


Рис. 2. Возможные значения пороговых нагрузок в соответствии с (2) для случая 1 (две точки перегиба) и 2 (три точки перегиба)

Рассмотрим рис. 2 более подробно. Анализ этого рисунка показывает, что равновесные формы изогнутой консоли, соответствующие определенному числу точек перегиба, возможны только при определенных значениях поперечной и растягивающей продольной нагрузок. Представленные зависимости также характеризуются тем, что при некоторых поперечных нагрузках переход от формы с одной точкой перегиба к форме с двумя точками перегиба возможен при двух значениях растягивающей составляющей: при фиксированной ненулевой растягивающей или поперечной составляющей нагрузки пороговое значение искомой другой составляющей нагрузки дается выражением (7); в случае отсутствия растягивающей нагрузки пороги для поперечной нагрузки принимают известные значения [5].

Обращает на себя внимание тот факт, что кривые для пороговых нагрузок имеют максимум, и поэтому при фиксированном значении поперечной нагрузки P_y могут быть два значения растягивающей нагрузки P_x , при которых возможны переходы от одной формы изгиба к другой.

Отметим, что конфигурации нагрузок, соответствующие форме изгиба без точки перегиба, могут быть любыми. Для формы с одной точкой перегиба возможны только те конфигурации, которые располагаются на кривой 1 и выше, для двух точек перегиба – на кривой 2 и выше. Таким образом, если мы выбираем конфигурацию сил для формы с одной точкой перегиба выше кривой 1, то возможны равновесные формы и для формы изгиба с одной точкой перегиба, и для формы с двумя

точками перегиба. Формы равновесия с двумя точками перегиба при некоторых значениях растягивающей составляющей нагрузки, когда конфигурация попадает в зону под максимумом, могут оказаться неустойчивыми и возможно, что через прощелкивание форма с двумя точками перегиба изменится в форму с одной точкой перегиба. В полученных решениях факт возможной неустойчивости определяется отсутствием решений для статической задачи. Реальный физический процесс перехода от формы с большим числом точек перегиба к формам с меньшим числом точек неясен, однако теоретически соотношение (7) показывает условия (необходимые нагрузки), от которых зависит этот переход. Также не исключается возможность обратного перехода от форм с меньшим числом точек к формам с большим числом точек, причем соотношение (2) позволяет выбрать оптимальные условия для реализации такого перехода. Например, при большой растягивающей нагрузке (кривая 1 рис. 2) необходима незначительная поперечная, возможно, импульсно приложенная нагрузка.

Изгиб в плоскости вращения. В данном случае необходимо ввести угол между направлением действующей силы N и осью Ox' , который позволит вычислить продольную растягивающую компоненту силы и добавку к заданной поперечной компоненте. Это возможно при постоянной угловой скорости вращения консоли.

Если обозначить угол между вектором N и осью Ox' через α , то выражения для компонент продольной и поперечной составляющих будут представлены выражениями

$$\begin{aligned} P_x &= N \cos \alpha - P_0 \sin \theta(1), \\ P_y &= P_0 \cos \theta(1) + N \sin \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Угол α определяется стрелой прогиба и проекцией s длины стержня на ось Ox' :

$$\alpha = \nu\pi + \arctg\left(\frac{f}{s}\right). \quad (9)$$

Если крайняя точка свободного конца консоли при изгибе находится в первом квадранте, то $\nu = 0$, если во втором квадранте, то $\nu = 1$.

Входящие в (9) величины f и s определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} f \equiv \frac{y(1)}{L} &= \frac{2k \operatorname{cn} F_1}{(pK(k) - F_1)} \cos \varphi_1 + \\ &+ \left(1 - \frac{2[pE(k) - E(\operatorname{am} F_1, k)]}{(pK(k) - F_1)}\right) \sin \varphi_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} s \equiv \frac{x(1)}{L} &= \frac{2k \operatorname{cn} F_1}{(pK(k) - F_1)} \sin \varphi_1 - \\ &- \left(1 - \frac{2[pE(k) - E(\operatorname{am} F_1, k)]}{(pK(k) - F_1)}\right) \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (11)$$

где $p = 1, 2, 3, \dots$, $E(\operatorname{am} u, k)$ – неполный эллиптический интеграл второго рода от эллиптической амплитуды Якоби.

Учитывая выражение для угла в случае изгиба в плоскости вращения $\varphi_1 = \pi m - \arctg(P_y/P_x)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, а также полученные в работе [6] соотношения для нагрузки, получим систему уравнений для определения угла φ_1

и эллиптического модуля k в зависимости от заданных нагрузок. В этом случае угол направления действия результирующей силы φ_1 дается выражением

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{P_{y'}}{P_{x'}} = \frac{P_0 \cos \theta(1) + N \sin \alpha}{P_0 \sin \theta(1) - N \cos \alpha},$$

или после тригонометрических преобразований

$$-P_0 \cos(\theta(1) + \varphi_1) = N \sin(\alpha + \varphi_1).$$

Учитывая выражение для угла наклона касательной на конце стержня $\theta(1) = -\varphi_1 + 2 \arcsin(k)$ [6], окончательно получим

$$N \sin(\varphi_1 + \alpha) + P_0(1 - 2k^2) = 0. \quad (12)$$

При отсутствии растягивающей силы $N = 0$. Тогда мы имеем известное предельное значение эллиптического модуля $k^2 = \frac{1}{2}$, соответствующее случаю изгиба следящей нагрузкой, направленной под прямым углом к оси консоли [7].

Используя выражения для проекций нагрузок (8), выражение для спектра собственных значений, полученное в [6], а также соотношение (12), запишем систему уравнений для определения эллиптического модуля k и угла приложения результирующей нагрузки φ_1 :

$$\begin{cases} N \sin(\varphi_1 + \alpha) + P_0(1 - 2k^2) = 0, \\ \frac{1}{P_c} \sqrt{P_x^2 + P_y^2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 [(2n-1)K(k) - F_1]^2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

При заданных нагрузках N и P_0 , решая численным методом систему уравнений (13), получим значения искомых параметров, которые позволяют однозначно определить профиль изогнутой консоли.

Пороговые значения нагрузок. Последовательно рассмотрим пороговые ситуации для случаев первой и последующих мод.

Учитывая разложения для разностей эллиптических интегралов [8] в окрестности произвольной точки, переходя $k \rightarrow k_0$, а также учитывая, что $\sqrt{1 - k_0^2} = |\cos(\varphi_1/2)| = \cos(\varphi_1/2)$ при $-\pi < \varphi_1 < \pi$, получим выражения для угла α в случае перегибных форм изгиба. Для формы консоли с одной точкой перегиба $n = 1$ выражения (10) и (11) примут вид

$$\begin{aligned} f &= 2k_0 \sqrt{1 - k_0^2} \cos \varphi_1 + [1 - 2(1 - k_0^2)] \sin \varphi_1 = 0, \\ s &= 2k_0 \sqrt{1 - k_0^2} \sin \varphi_1 - [1 - 2(1 - k_0^2)] \cos \varphi_1 = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда, подставив результат (14) в (9) и зная, что крайняя точка свободного конца консоли находится в первом квадранте ($v = 0$), имеем

$$\alpha = 0. \quad (15)$$

Преобразуем систему (13) с учетом результата (15) при $k \rightarrow k_0$ и для первой моды получим

$$\frac{1}{P_c} \sqrt{N^2 + P_0^2} = 0.$$

Этот результат в отсутствие растягивающей составляющей $N = 0$ соответствует известному для изгиба консоли следящей силой P_0 случаю формы с одной точкой перегиба [7]. Также отметим, что потеря устойчивости формы происходит беспороговым образом.

Для последующих форм изгиба при $n = 2, 3$, учитывая, что крайняя точка свободного конца консоли при при-

ближении к пороговому значению находится во втором квадранте ($v = 1$), получим

$$\alpha = \pi - \varphi_1.$$

Переходя к пределу $k \rightarrow k_0$ с учетом соотношений (13), выведем выражение для пороговых нагрузок:

$$\begin{cases} \frac{P_0}{N} \cos \varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{P_c} (-N + P_0) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 (n-1)^2 K^2(\sin(\varphi_1/2)). \end{cases} \quad (16)$$

Первоначально знак угла φ_1 определяется для каждого порогового значения в зависимости от начального выбора направления деформирования. Например, в рассматриваемом случае при переходе от формы с одной точкой перегиба к форме с двумя точками перегиба $\varphi_1 = -\pi/2$ (а также при любых других переходах) должно выполняться условие $\theta(1) = 0$, что означает смену знака эллиптического модуля при переходе от одной перегибной формы к другой. Тогда в выражении (16) при извлечении квадратного корня выбирается положительный знак. Окончательно имеем

$$\frac{P_0}{P_c} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 (n-1)^2 K^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{N}{P_c}. \quad (17)$$

В отсутствие растягивающей составляющей нагрузки $N = 0$ выражение для пороговых нагрузок (17) соответствует известному выражению для случая изгиба консоли сосредоточенной следящей силой, приложенной к свободному концу под прямым углом [4; 6; 7]. Для того чтобы получить плавный переход между формами изгиба в условиях действия дополнительной растягивающей нагрузки, нужно увеличить пороговое значение следящей сжимающей нагрузки на величину добавляемой растягивающей нагрузки. А для того чтобы плавно вернуться от формы с большим числом точек перегиба к форме с меньшим числом точек перегиба, достаточно увеличить растягивающую составляющую нагрузки. Таким образом, при заданной следящей нагрузке выше пороговой существует возможность мягкого перехода от формы изгиба с большим числом точек перегиба к форме с меньшим числом таких точек. При вращении увеличение растягивающей составляющей возможно при увеличении угловой скорости вращения. Таким образом, подбирая угловую скорость вращения, можно исключить переходы изгибающейся в плоскости вращения консоли к перегибным формам изгиба и тем самым управлять устойчивостью консоли.

При фиксированной ненулевой растягивающей или поперечной составляющей нагрузки пороговое значение искомой составляющей нагрузки определяется выражением (17). Отметим, что с увеличением растягивающей нагрузки увеличение порогового значения поперечной нагрузки происходит линейным образом в отличие от случая, рассмотренного в [7].

Точки перегиба. Выражения, определяющее перемещение точек перегиба и сжатия при изменении действующих на консоль нагрузок, следуют из (8) при значениях угла φ_1 и модуля k , определяемых по (13):

$$t_1 = \frac{(2m+1)K(k) - F_2}{(2n-1)K(k) - F_2},$$

где $F_2 = F(\sin(\varphi_1/2)/k)$.

Таким образом, на примере двух задач изгиба консоли в поле центробежных сил как частных случаев приложения действующих нагрузок можно сделать вывод о том, что если к консоли приложены несколько нагрузок, одна из которых следящая, то при некоторых значениях следящей составляющей переходы к новым перегибным формам консоли осуществляются плавно. Иными словами, при пороговых значениях следящей нагрузки, которые определяются всеми оставшимися составляющими, переход к перегибным формам, соответствующим последующей моде, является продолжением уже имеющейся формы в отличие от случаев, когда результирующая действующая сила носит поступательный характер. Также нужно отметить, что при наличии в системе действующих сил хотя бы одной следящей составляющей можно получить плавный переход исходной формы в перегибную форму. При этом результирующая нагрузка и угол, под которым она направлена, будут соответствовать случаю изгиба вследствие действия поступательной нагрузки, направленной под произвольным углом к исходной форме изгиба.

Библиографические ссылки

1. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М. : Наука, 1979.
2. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М. : Наука, 1986.
3. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М. : Машиностроение, 1970.
4. Захаров Ю. В., Власов А. Ю., Охоткин К. Г. Статические формы изгиба упругой консоли в поле центробежных сил: точные и приближенные решения // Вестн. Краснояр. гос. ун-та. Сер. «Физико-математические науки». 2006. № 1. С. 10–15.
5. Захаров Ю. В., Захаренко А. А. Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 1. С. 48–54.
6. Захаров Ю. В., Охоткин К. Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // Журн. прикл. математики и техн. физики. 2002. Т. 43, № 5. С. 124–131.
7. Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Скоробогатов А. Д. Изгиб стержней под действием следящей нагрузки // Журн. прикл. математики и техн. физики. 2004. Т. 45, № 5. С. 167–175.
8. Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Власов А. Ю. Приближенные формулы для стрелы прогиба упругого стержня при поперечном нагружении // Журн. прикл. математики и техн. физики. 2002. Т. 43, № 5. С. 132–134.

A. Yu. Vlasov, Yu. V. Zakharov, N. V. Filenkova

ELASTIC CANTILEVER BENDING UNDER THE IMPACT OF CENTRIFUGAL FORCE: CRITICAL LOADS

A practically significant case of cantilever bending when common effective load is traveling is considered. In case of geometrical nonlinear bending of cantilever under the impact of centrifugal force exact solutions for critical load and bending deflection of cantilever are obtained. Cases of possible conversions of cantilever forms with differing number of inflection are specified.

Keywords: cantilever, centrifugal force, forms of bend, stability.

© Власов А. Ю., Захаров Ю. В., Филenkova Н. В., 2010