поглощения света в экситон-магнонных процессах отстоят от положения чисто экситонной полосы на расстояния, приблизительно кратные энергии магнонов границы зоны Бриллюэна.

Библиографические ссылки

1. Горбач В. В., Пакиж М. А., Петров Э. Г. Многочастичные спин-запрещенные оптические переходы в слабоанизотропных антиферродиэлектриках // УФЖ. 1992. Т. 37, № 11. С. 1670–1682.

2. Магнитооптика и спектроскопия антиферромагнетиков / В. В. Еременко, Н. Ф. Харченко, Ю. Г. Литвиненко, В. М. Науменко. Киев : Наук. думка, 1989.

3. Попов Е. А., Овчинников С. Г. Магнонные полосы-спутники в оптическом спектре антиферромагнитного Rb_2MnCl_4 // Физика твердого тела. 2003. Т. 45, вып. 8. С. 1429–1431.

4. Горбач В. В., Петров Э. Г. Влияние неупругого экситон-магнонного взаимодействия на поглощение света в неколлинеарном антиферромагнетике // Физика твердого тела. 1990. Т. 32, № 5. С. 1418–1425.

5. Popov E. A. Peculiarities of optical absorption of magnetic dielectrics with varies magnetic order dimension // Вестник НИИ СУВПТ. 2008. Вып. 26. С. 61–66.

6. Попов Е. А. Тонкая структура оптического спектра и многочастичные возбуждения в Rb_2MnCl_4 // Изв. вузов. Физика. 2003. № 10. С. 10–13.

7. Magnetic structure and two-dimensional behavior of Rb_2MnCl_4 and Cs_2MnCl_4 / A. Epstain, E. Gurewitz, J. Makovsky, H. Shaked // Phys. Rev. 1970. Vol. B2, № 9. P. 3703–3706.

8. Попов Е. А. Оптические и магнитооптические свойства антиферромагнитных хлоридов марганца : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 2004.

9. Попов Е. А. Изменение оптического поглощения 2*d*-магнетика при его разбавлении немагнитными ионами // Вестник КрасГУ. 2003. № 3. С. 75–79.

E. A. Popov

MODELLING OF EXISTON-DOUBLE-MAGNON OPNICAL EXITATIONS IN LOW-DIMENTIONAL MAGNETIC SYSTEM

In a model of noninteracting quasi-particles a shape of the exciton-two-magnon optical absorption band in collinear antiferromagnet with two-dimensional square lattice for four possible excitation mechanisms is calculated. Correlation of the results and the experiment is made.

Keywords: excitation, magnon, light absorption, antiferromagnet.

УДК 539

А. В. Лопатин, Р. А. Удальцов

СИММЕТРИЧНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Решена задача об определении критических усилий, при которых происходит сморщивание композитных несущих слоев трехслойной пластины с ортотропным заполнителем. Предложена новая модель упругого заполнителя, в которой учитываются его жесткости на сжатие и сдвиг, а также нелинейный характер затухания нормальных перемещений по толщине. С использованием энергетического метода получено дифференциальное уравнение симметричной формы потери устойчивости. Выполнен анализ влияния упругих и геометрических параметров трехслойной полосы на характер волнообразования и критическое усилие несущего слоя.

Ключевые слова: композитная пластина, потеря устойчивости, симметричный.

Одним из наиболее вероятных видов разрушения трехслойных пластин, нагруженных в плоскостях несущих слоев усилиями сжатия или сдвига, является потеря устойчивости. При расчете трехслойных пластин различают несколько форм потери устойчивости, одной из которых является сморщивание несущих слоев с образованием весьма коротких волн, расположенных симметрично относительно срединной плоскости.

Эта форма потери устойчивости называется симметричной и характерна только для трехслойных конструкций, имеющих податливый заполнитель.

Первое исследование сморщивания несущих слоев трехслойной панели было выполнено в 1940 г. [1] с использованием для заполнителя модели упругого основания Винклера. Эта работа была продолжена многочисленными исследователями, результаты работы которых обобщены и представлены в известных монографиях [2–6].

Несмотря на длительную историю, задача о сморщивании несущих слоев трехслойной пластины и в настоящее время привлекает внимание тех, кто занимается проектированием несущих конструкций [7–16]. Это в первую очередь обусловлено использованием в трехслойных пластинах композиционных материалов.

Уравнение устойчивости несущего слоя. Рассмотрим трехслойную пластину, состоящую из двух одинаковых композитных несущих слоев, между которыми расположен ортотропный заполнитель.

Отнесем срединную плоскость пластины к системе ортогональных координат xyz. Обозначим через a и b размеры пластины по осям x и y соответственно, а через h и δ – толщины несущего слоя и заполнителя.

Дифференциальное уравнение симметричной формы потери устойчивости получим, используя энергетический метод [18–19]. Потенциальная энергия трехслойной пластины U складывается из потенциальной энергии изгиба несущего слоя при сморщивании U_{facing}, потенциальной энергии деформации заполнителя U_{core} и работы усилий U_{load}, действующих в плоскости несущего слоя, т. е.

$$U = U_{\text{facing}} + U_{\text{core}} + U_{\text{load}}. \quad (1)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае потери устойчивости потенциальная энергия (1) определяется только для половины трехслойной пластины, лежащей, например, выше срединной плоскости.

При сморщивании ортотропного несущего слоя потенциальная энергия изгиба определяется следующим выражением:

$$U_{\text{facing}} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\begin{array}{l} D_{11}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ +D_{22}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{33}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \end{array}\right] dxdy, \quad (2)$$

где w – прогиб несущего слоя, D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33} – изгибные жесткости ортотропного несущего слоя, полученные, например, в монографии [17].

Выражение, определяющее работу усилий, действующих в плоскости несущего слоя при сморщивании, имеет вид

$$U_{\text{load}} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[\begin{array}{l} N_x^0\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \\ +2N_{xy}^0\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + N_y^0\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \end{array}\right] dxdy, \quad (3)$$

где N_x^0, N_y^0 – нормальные и N_{xy}^0 – сдвигающие докритические усилия.

Для вычисления потенциальной энергии деформации заполнителя необходимо исследовать характер распространения вглубь заполнителя прогибов несущего слоя при сморщивании.

В общем случае величина U_{core} определяется следующим выражением:

$$U_{\text{core}} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^{\frac{\delta}{2}} \left(\begin{array}{l} \sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \\ +\tau_{xy}e_{xy} + \tau_{xz}e_{xz} + \tau_{yz}e_{yz} \end{array}\right) dxdydz, \quad (4)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения, действующие в заполнителе вдоль осей x, y, z; τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} – касательные напряжения, действующие в плоскостях xy, xz, yz; e_x, e_y, e_z – нормальные деформации вдоль осей x, y, z; e_{xy}, e_{xz}, e_{yz} – деформации сдвига в плоскостях xy, xz, yz.

Напряжения и деформации в ортотропном заполнителе связаны между собой законом Гука

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy}\frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{xz}\frac{\sigma_z}{E_z}, \quad e_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx}\frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{yz}\frac{\sigma_z}{E_z}, \quad (5)$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E_z} - \mu_{zx}\frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{zy}\frac{\sigma_y}{E_y}; \quad (6)$$

$$e_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}, \quad (7)$$

$$e_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}}, \quad e_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}, \quad (8)$$

где E_x, E_y, E_z – модули упругости материала заполнителя в направлениях x, y, z; G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} – модули сдвига в плоскостях xy, xz, yz; μ_{yx}, μ_{xz}, μ_{yx}, μ_{yz}, μ_{zx}, μ_{zy} – коэффициенты Пуассона.

Нормальные и сдвиговые деформации связаны с перемещениями u_x, u_y, u_z вдоль соответствующих координатных осей следующими геометрическими соотношениями:

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad (9)$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad e_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

При симметричной форме потери устойчивости трехслойной пластины в несущих слоях появляется много мелких волн. При этом, очевидно, тангенциальные перемещения отсутствуют на гребнях волн как в несущих слоях, так и в заполнителе. Поэтому с достаточной степенью достоверности можно принять, что тангенциальные перемещения отсутствуют во всем заполнителе. В этом случае

$$u_x = 0, \quad u_y = 0. \quad (10)$$

Тогда, с учетом равенств (10) из геометрических соотношений (9) следует

$$e_x = 0, \quad e_y = 0, \quad e_{xy} = 0; \quad (11)$$

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad e_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (4), получим

$$U_{\text{core}} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^{\frac{\delta}{2}} \left(\sigma_z e_z + \tau_{xz}e_{xz} + \tau_{yz}e_{yz}\right) dxdydz. \quad (13)$$

Выразим напряжения, входящие в формулу (13), через деформации. Трансверсальные напряжения найдем из физических соотношений (8), т. е.

$$\tau_{xz} = G_{xz}e_{xz}, \quad \tau_{yz} = G_{yz}e_{yz}. \quad (14)$$

Для определения σ_z воспользуемся формулами (5) и (6). Перепишем соотношения (5), учитывая равенства (11), в следующем виде:

$$\frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy}\frac{\sigma_y}{E_y} = \mu_{xz}\frac{\sigma_z}{E_z} \quad -\mu_{yx}\frac{\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} = \mu_{yz}\frac{\sigma_z}{E_z}. \quad (15)$$

Используя уравнения (15), выразим напряжения σ_x и σ_y через напряжение σ_z и затем полученный результат подставим в равенство (6). После преобразований будем иметь

$$\sigma_z = \overline{E_z}\, e_z. \qquad (16)$$

Здесь

$$\overline{E_z} = E_z\left(1 - \frac{\mu_{zx}\left(\mu_{xz} + \mu_{yz}\mu_{xy}\right) + \mu_{zy}\left(\mu_{yz} + \mu_{yx}\mu_{xz}\right)}{1 - \mu_{yx}\mu_{xy}}\right)^{-1}. \qquad (17)$$

Это приведенный модуль упругости материала заполнителя в направлении оси z.

Подставляя равенства (14) и (16) в уравнение (13), получим

$$U_{\text{core}} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^{\frac{\delta}{2}}\left(\overline{E_z}e_z^2 + G_{xz}e_{xz}^2 + G_{yz}e_{yz}^2\right)dxdydz. \qquad (18)$$

С учетом (12) выражение для потенциальной энергии деформации заполнителя (18) примет вид

$$U_{\text{core}} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\int_0^{\frac{\delta}{2}}\left[\begin{array}{l}\overline{E_z}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + G_{xz}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 + \\ + G_{yz}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2\end{array}\right]dxdydz. \qquad (19)$$

Как видно из формулы (19), потенциальная энергия деформации заполнителя зависит от нормального перемещения u_z. В рассматриваемой задаче функция u_z должна принимать нулевые значения на срединной плоскости пластины и совпадать с прогибом несущего слоя на границе раздела, т. е.

$$u_z = \begin{cases} w(x, y), & z = \delta/2 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \qquad (20)$$

Представим перемещение u_z в следующем виде:

$$u_z = f(z)\, w(x, y), \qquad (21)$$

где $f(z)$ задает вид распределения перемещений по толщине заполнителя. Из (20) и (21) следует, что $f(z)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z = \delta/2 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

Зададим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \left(2\frac{z}{\delta}\right)^{\xi}. \qquad (23)$$

Здесь параметр ξ характеризует скорость затухания нормальных перемещений по толщине заполнителя. В дальнейшем параметр ξ будет подбираться из условия минимума усилий, сжимающих несущий слой.

Подставим уравнения (21) и (23) в уравнение (18) и выполним интегрирование по z. В результате получим

$$U_{\text{core}} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[R_z w^2 + K_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + K_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy. \qquad (24)$$

Здесь

$$R_z = \overline{E_z}\frac{2}{\delta}\varphi(\xi), \quad K_x = G_{xz}\frac{\delta}{2}\theta(\xi), \quad K_y = G_{yz}\frac{\delta}{2}\theta(\xi), \qquad (25)$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi^2}{2\xi - 1}, \quad \theta(\xi) = \frac{1}{2\xi + 1}. \qquad (26)$$

Величины R_z, K_x и K_y являются жесткостными параметрами заполнителя.

Выражение (24) определяет потенциальную энергию деформации заполнителя в соответствии с моделью, в основу которой положена гипотеза об отсутствии в заполнителе горизонтальных перемещений u_x и u_y. Складывая уравнения (2), (3) и (24), представим потенциальную энергию трехслойной пластины в следующем виде:

$$U = \int_0^a\int_0^b \Phi\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, w\right)dxdy \qquad (27)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$
$$+ 4D_{33}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + R_z w^2 + K_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + K_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 +$$
$$\left. + N_x^0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2N_{xy}^0\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + N_y^0\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]. \qquad (28)$$

В положении равновесия потенциальная энергия трехслойной пластины имеет минимум, поэтому прогиб несущего слоя должен удовлетворять следующему дифференциальному уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\partial^2 w/\partial x^2\right)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\times$$
$$\times\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\partial^2 w/\partial x \partial y\right)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\partial^2 w/\partial y^2\right)} -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\partial w/\partial x\right)} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial\left(\partial w/\partial y\right)} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0. \qquad (29)$$

Этому уравнению должна удовлетворять функции $w(x, y)$, реализующая экстремум функционала (27). Подставляя (28) в (29), получим

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{33})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - K_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -$$
$$-K_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_z w - N_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \qquad (30)$$

Уравнение (30) представляет собой основное дифференциальное уравнение, описывающее симметричную форму потери устойчивости трехслойной пластины, что сопровождается сморщиванием композитных несущих слоев.

Рассмотрим далее пример по определению критического усилия сжатого несущего слоя трехслойной полосы. Этот пример позволит оценить влияние упругих и геометрических параметров на характер волнообразования и величину критических нагрузок.

Цилиндрическое сморщивание несущих слоев трехслойной полосы. Рассмотрим трехслойную полосу, два противоположных края которой свободны, а по двум другим несущие слои нагружены сжимающими погонными усилиями N.

Очевидно, что сморщивание несущих слоев будет происходить только в направлении оси x. Уравнение устойчивости полосы можно получить из общего уравнения (30), если положить в последнем $w = w(x)$, $N_x^0 = -N$, $N_{xy}^0 = 0$, $N_y^0 = 0$.

Тогда из (30) будем иметь

$$D_{11}\frac{d^4w}{dx^4} - K_x\frac{d^2w}{dx^2} + R_z w + N\frac{d^2w}{dx^2} = 0. \quad (31)$$

Для удобства анализа приведем уравнение (31) к безразмерному виду. Заменим координату x на безразмерную координату α по следующей формуле:

$$\alpha = x / l, \quad (32)$$

где l – длина полосы в направлении оси x. С учетом равенства (32) уравнение (31) примет вид

$$\frac{d^4w}{d\alpha^4} - r\frac{d^2w}{d\alpha^2} + tw + \eta\frac{d^2w}{d\alpha^2} = 0, \quad (33)$$

где η – безразмерный коэффициент устойчивости:

$$\eta = Nl^2 / D_{11}. \quad (34)$$

Безразмерные параметры r и t, входящие в уравнение (33), определяется следующими выражениями:

$$r = K_x l^2 / D_{11}, \;\; t = R_z l^4 / D_{11}. \quad (35)$$

Пусть несущий слой выполнен из однородного ортотропного материала. Если пренебречь во всей конструкции эффектом Пуассона в направлении оси y, то изгибная жесткость несущего слоя и жесткости заполнителя могут быть представлены следующими равенствами:

$$D_{11} = E_x h^3 / 12, \;\; K_x = G_{xz}\delta / 2\theta(\xi), \;\; R_z = E_z 2 / \delta\varphi(\xi), \quad (36)$$

где E_x – модуль упругости материала несущего слоя в направлении оси x.

Подставляя (36) в (35), будем иметь

$$r = p\theta(\xi), \;\; t = s\varphi(\xi). \quad (37)$$

Здесь

$$p = 6G_{xz} / E_x \cdot l^2 / \delta^2 \cdot \delta^3 / h^3,$$

$$s = 24E_z / E_x \cdot l^4 / \delta^4 \cdot \delta^3 / h^3. \quad (38)$$

Примем, что на краях полосы $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ выполняются условия шарнирного опирания. Тогда решение уравнения (33) будем искать в форме

$$w = w_m \sin\lambda_m\alpha, \quad (39)$$

где m – число полуволн вдоль координаты α; $\lambda_m = m\pi$; w_m – неизвестное число.

Подставляя (39) в однородное дифференциальное уравнение (33), найдем величину η, при которой это уравнение будет иметь нетривиальное решение, т. е.

$$\eta = \lambda_m^2 + r + t / \lambda_m^2. \quad (40)$$

Учитывая равенства (37), можно утверждать, что величина коэффициента устойчивости зависит от параметра волнообразования λ_m^2 и параметра ξ, определяющего скорость затухания нормальных перемещений по толщине заполнителя. Рассматривая η как функцию λ_m^2 и ξ, запишем условие ее минимума в следующем виде:

$$\partial\eta / \partial(\lambda_m^2) = 0 \quad (41)$$

и

$$\partial\eta / \partial\xi = 0. \quad (42)$$

Подставляя (40) в (41), найдем

$$\lambda_m^2 = \sqrt{t}. \quad (43)$$

Учитывая полученный результат, преобразуем равенство (40) к виду

$$\eta = 2\sqrt{t} + r. \quad (44)$$

Подставляя (37) в (44), будем иметь

$$\eta = 2\sqrt{s\varphi(\xi)} + p\theta(\xi). \quad (45)$$

Теперь величина коэффициента устойчивости при известных s и p зависит только от параметра ξ. Подставляя (45) в (42) и учитывая равенства (26), получим для определения ξ следующее нелинейное уравнение:

$$\sqrt{2\xi - 1}\,(\xi - 1)\left(\frac{2\xi + 1}{2\xi - 1}\right)^2 - q = 0. \quad (46)$$

Здесь

$$q = p / \sqrt{s}. \quad (47)$$

Подставляя (38) в (47), будем иметь

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}}\;\frac{G_{xz} / E_x}{\sqrt{E_z / E_x}}\,\frac{\delta}{h}\sqrt{\frac{\delta}{h}}. \quad (48)$$

Обозначим корень уравнения (46) через ξ_{cr}. Подставляя $\xi = \xi_{\text{cr}}$ в (45), получим выражение, определяющее критический коэффициент устойчивости, т. е.

$$\eta_{\text{cr}} = 2\sqrt{s\varphi(\xi_{\text{cr}})} + p\theta(\xi_{\text{cr}}). \quad (49)$$

Здесь

$$\varphi(\xi_{\text{cr}}) = \xi_{\text{cr}}^2 / 2\xi_{\text{cr}} - 1, \;\; \theta(\xi_{\text{cr}}) = 1 / 2\xi_{\text{cr}} + 1. \quad (50)$$

Учитывая равенства (38), представим формулу (49) в следующем виде:

$$\eta_{\text{cr}} = l^2 / \delta^2\psi_{\text{cr}}. \quad (51)$$

Здесь

$$\psi_{\text{cr}} = 2\delta / h \cdot \left(2\sqrt{6E_z / E_x \cdot \delta / h \cdot \varphi(\xi_{\text{cr}})} + 3G_{xz} / E_x \cdot \delta^2 / h^2\, \theta(\xi_{\text{cr}})\right). \quad (52)$$

Определим далее критическое усилие при котором происходит сморщивание несущего слоя. Из (34) найдем

$$N_{\text{cr}} = \eta_{\text{cr}} D_{11} / l^2. \quad (53)$$

Для критического усилия справедлива следующая формула:

$$N_{\text{cr}} = \sigma_{\text{cr}} h, \quad (54)$$

где σ_{cr} – критическое напряжение.

Подставляя (54) и (51) в (53) и учитывая первое из равенств (36), будем иметь

$$\sigma_{\text{cr}} = E_x\varepsilon_{\text{cr}}. \quad (55)$$

Здесь

$$\varepsilon_{\text{cr}} = \psi_{\text{cr}} / \left(12\delta^2 / h^2\right). \quad (56)$$

Будем в дальнейшем называть ε_{cr} критической деформацией.

Учитывая выражение (52), преобразуем уравнение (56) к виду

$$\varepsilon_{\text{cr}} = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{E_z / E_x}{\delta / h}\,\varphi(\xi_{\text{cr}})} + \frac{1}{2}G_{xz} / E_x \cdot \delta / h \cdot \theta(\xi_{\text{cr}}). \quad (57)$$

Таким образом, критическое напряжение, при котором происходит потеря устойчивости несущего слоя трехслойной полосы, может быть найдено из равенств (55) и (57). Величина σ_{cr} при заданном модуле упругости E_x определяется величиной критической деформации ε_{cr}. Из формул (46), (48) и (57) следует, что ε_{cr} зависит от трех параметров: E_z / E_x, G_{xz} / E_x и δ / h. Отметим, что критическая деформация, а значит, критическое напряжение, не зависят от l / δ.

Покажем, что с ростом δ / h критическая деформация ε_{cr} стремится к некоторому пределу, величина которого зависит от отношений модулей упругости. Для этого вернемся к формуле (45), определяющей коэффициент устойчивости η после его минимизации по λ_m^2. Величина η при известных s и p зависит в этой формуле только от параметра ξ. Получим формулу, определяющую критический коэффициент устойчивости для трехслойной полосы с толстым слоем заполнителя, т. е. с большим отношением δ / h. В этом случае следует принять $\xi \to \infty$. Тогда из равенств (26) будет иметь

$$\varphi(\xi) = \xi / 2, \quad \theta(\xi) = 1/2\xi. \tag{58}$$

Подставляя (58) в (45), получим

$$\eta = \sqrt{2s\xi} + p / 2\xi. \tag{59}$$

Реализуя условие (42), найдем

$$\xi_{cr} = \sqrt[3]{p^2 / 2s}. \tag{60}$$

Тогда

$$\eta_{cr} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \sqrt[3]{ps}. \tag{61}$$

Подставляя (38) в (61), будем иметь

$$\eta_{cr} = l^2 / \delta^2 \, \psi_{cr}. \tag{62}$$

Здесь

$$\psi_{cr} = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} \delta^2 / h^2 \ \sqrt[3]{18 G_{xz} / E_x \cdot E_z / E_x}. \tag{63}$$

Учитывая равенства (63), из (56) получим

$$\varepsilon_{cr} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}} \ \sqrt[3]{G_{xz} / E_x \cdot E_z / E_x}. \tag{64}$$

Уравнение (64) определяет предельное значение критической деформации, величина которой зависит только от отношений модулей упругости. Подставляя (64) в (55), получим для определения критического напряжения следующее уравнение:

$$\sigma_{cr} = 0{,}82548 \ \sqrt[3]{E_x G_{xz} E_z}. \tag{65}$$

Отметим, что равенство (65) с тем или иным численным коэффициентом встречается как в известных монографиях [2–6], так и в современных исследованиях [11–16].

Из вышесказанного следует, что определение критических напряжений необходимо выполнять с учетом величины отношения δ / h. При $\delta / h > 30$ можно воспользоваться формулой (65). Если отношение $\delta / h < 30$, то более точное значение σ_{cr} дадут формулы (55) и (57).

Найдем теперь число полуволн, образующихся при сморщивании несущего слоя. Учитывая, что $\lambda_m = m\pi$, из (43) будем иметь

$$m = \sqrt[4]{t} / \pi. \tag{66}$$

Подставим второе из равенств (37) при $\xi = \xi_{cr}$ в уравнение (66). Тогда

$$m_{cr} = \sqrt[4]{s\varphi(\xi_{cr})} / \pi. \tag{67}$$

Выполним далее анализ влияния упругих и геометрических параметров трехслойной полосы на число полуволн m_{cr}. Подставляя s из равенств (38) в формулу (67), будем иметь

$$m_{cr} = \frac{l}{\delta} \gamma_{cr}. \tag{68}$$

Здесь

$$\gamma_{cr} = 1 / \pi \sqrt[4]{24 E_z / E_x \cdot \delta^3 / h^3 \cdot \varphi(\xi_{cr})}. \tag{69}$$

Как видно из уравнения (68), величина m_{cr} прямо пропорциональна l / δ.

Из анализа полученных данных следует, что величина γ_{cr}, а значит, и m_{cr}, зависит от δ / h практически линейно как для податливого заполнителя, так и для жесткого заполнителя.

Библиографические ссылки

1. Gough C. S., Elam C. F., de Bruyne N. A. The Stabilization of a Thin Sheet by a Continuous Support Medium // J. of the Royal Aeronautical Soc. 1940. № 44. P. 12–43.
2. Hoff N. J., Mautner S. E. The Buckling of Sandwich-type Panels // J. of the Aeronautical Sciences. 1945. № 12. P. 285–297.
3. Plantema F. J. Sandwich Construction. N. Y. : Wiley & Sons, Inc.,. 1966.
4. Allen H. C. Analysis and Design of Structural Sandwich Panels. Oxford : Pergamon Press, 1969.
5. Zenkert D. An Introduction to Sandwich Construction. London : Chameleon Press Ltd, 1995.
6. The Handbook of Sandwich Construction / D. Zenkert (ed.). London : EMAS Publishing, 1997.
7. Vinson J. R. The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials. Lancaster : Technomic, 1999.
8. Hadi B. K., Matthews F. L. Development of Benson-Mayers Theory on the Wrinkling of Anisotropic Sandwich Panels // Composite Structures. 2000. № 49. P. 425–434.
9. Benson A. S., Mayers J. General Instability and Face Wrinkling of Sandwich Plates – Unified Theory and Applications // AIAA J. 1967. № 5(4) . P. 729–739.
10. Hadi B. K. Wrinkling of Sandwich Column: Comparison between Finite Element Analysis and Analytical Solutions // Composite Structures. 2001. № 53. P. 477–482.
11. Vonach W. K., Rammerstorfer F. G. A General Approach to the Wrinkling Instability of Sandwich Plates // Structural Engineering and Mechanics. 2001. № 12. P. 363–376.
12. Birman V., Bert C. W. Wrinkling of Composite-facing Sandwich Panels under Biaxial Loading // J. of Sandwich Structures and Materials. 2004. № 6. P. 217–237.
13. Leotoing L., Drapier S., Vautrin A. Using New Closed-form Solutions to Set up Design Rules and Numerical Investigations for Global and Local Buckling of Sandwich Beams // J. of Sandwich Structures and Materials. 2004. № 6. P. 263–289.
14. Fagerberg L., Zenkert D. Imperfection-induced Wrinkling Material Failure in Sandwich Panels // J. of Sandwich Structures and Materials. 2005. № 7. P. 195–219.
15. Fagerberg L., Zenkert D. Effects of Anisotropy and Loading on Wrinkling of Sandwich Panels // J. of Sandwich Structures and Materials. 2005. № 7. P. 177–194.
16. Grenestedt J. L., Danielsson M. Elastic – plastic Wrinkling of Sandwich Panels with Layered Cores // J. of Applied Mechanics. 2005. № 72. P. 276–281.

17. Meyer-Piening H.-R. Sandwich Plates: Stresses, Deflection, Buckling and Wrinkling Loads – A Case Study // J. of Sandwich Structures and Materials. 2006. № 8. P. 381–394.

18. Aiello M. A., Ombres L. Buckling Load Design of Sandwich Panels Made with Hybrid Laminated Faces and Transversely Flexible Core // J. of Sandwich Structures and Materials. 2007. № 9. P. 467–485.

19. Hayman B., Bergreen C., Pettersson R. The Effect of Face Sheet Wrinkle Defects on the Strength of FRP Sandwich Structures // J. of Sandwich Structures and Materials. 2007. № 9. P. 377–404.

A. V. Lopatin, R. A. Udaltsov

SYMMETRIC BUCKLING OF THE COMPOSIT THREE-LAYER PLATE

The definition problem of critical forces, which provokes wrinkling of composite base layers of triplex sandwich plate with orthotropic core is solved. A new model of elastic core is offered. It considers elastic core rigidity on compression and shear, and also nonlinear character of decaying of normal displacement throughout the thickness.

Keywords: composite plate, buckling, symmetrical.

УДК 546.87:546.666-31

Н. С. Симонова, А. Ю. Семушева, В. И. Аникина, В. Ю. Таскин

ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА КРИСТАЛЛОВ ДВОЙНОГО НИТРАТА ВИСМУТА–ЭРБИЯ

Приведены результаты исследования процессов затвердевания двойного нитрата висмута–эрбия. Определена скорость роста кристаллов в продольном и поперечном направлениях, вид и механизм формирования кристаллов солей в зависимости от концентрации раствора и температуры окружающей среды. На основании полученных данных сделано предположение о возможности контроля процесса кристаллизации в исследуемой системе, что является необходимым условием для создания комбинированных материалов с заданными свойствами конструкционно-функционального типа – мезопористых мезоструктурированных силикатов.

Ключевые слова: двойной нитрат висмута–эрбия, кристаллизация, скорость роста.

Вследствие хорошо развитой поверхности и регулярного распределения пор, мезопористые кварцевые материалы (МСМ-41) широко используются как матрица для погружения полимеров, металлов и полупроводниковых наночастиц, размеры которых определяют оптические, электрические, и механические свойства полученного материала [1]. Пропитывая мезопористые силикаты висмутсодержащими растворами с последующим термолизом, получали материалы с ионопроводящими свойствами [2]. Однако процесс кристаллизации солей в порах МСМ-41 являлся стихийным и неконтролируемым.

Целью настоящего исследования было определение кинетики, вида и механизма роста кристаллов солей в зависимости от концентрации раствора, чтобы сделать процесс кристаллизации исследуемых систем управляемым.

Объектом исследования выбрали систему Bi_2O_3–Er_2O_3, обеспечивающую эффективный ионный перенос и высокую кислородную проводимость, поскольку в ней реализуется структура типа d-Bi_2O_3. Полученный твердый раствор по литературным данным стабилен в широком диапазоне температур по сравнению с чистым Bi_2O_3 [3].

Методы исследования. Изучение процессов кристаллизации солей проводили с помощью микроскопов МБС-9, Stemi 2000-C, Observer D1m.

Дифференциальный термический анализ проводили с использованием дериватографа фирмы Netche Q-1500 в атмосфере воздуха при скорости нагревания 20 К/мин.

Рентгенофазовый анализ (РФА) исходных веществ и спеченных смесей осуществляли на дифрактометре фирмы Shimadzu XRD-6000. Рентгенограммы записывали в широком интервале углов дифракции от 5 до 80° с медным анодом и никелевым фильтром. Точность измерения углов составляла ± 0,2°.

Расчет линейной скорости роста кристаллов. Каплю исследуемого раствора с помощью пипетки помещали на чашку Петри под микроскоп МБС-9, на окуляре которого крепили настольную видеокамеру, соединенную с компьютером. Через некоторое время начинался процесс затвердевания. Запись видеоизображения и подсчет скорости роста проводили по измерениям на экране монитора растущих кристаллов.

Математическая обработка полученных результатов. Для выявления степени связи между исследуемыми величинами провели корреляционный и регрессионный анализ. По результатам выборочных данных построили функции регрессии для установления формы зависимости между переменными.