regional investment projects non-efficiency on the example of two-criteria model of the regional economy without restriction of the product amount, demand and planning time-frame.

Keywords: z-transformation, two-criterion model of optimal control, investment planning.

УДК 519.6

А. А. Кузнецов, А. К. Шлепкин, А. Н. Антамошкин

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ КОНЕЧНОСТИ БЕРНСАЙДОВОЙ ГРУППЫ *B*(2,5)[1]

Показано, что централизатор автоморфизма порядка 2 специального вида бернсайдовой группы $B_0(2,5)$ имеет порядок 5^{17}.

Ключевые слова: проблема Бернсайда.

Пусть $B(2,5)$ – двупорожденная бернсайдова группа периода 5, а $B_0(2,5)$ – максимальная универсальная конечная двупорожденная группа того же периода (порядок последней равен 5^{34} [1]). Вопрос о совпадении указанных групп на сегодняшний день является открытым [2].

В настоящей работе сделан первый шаг в попытке редуцирования проблемы совпадения групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ к проблеме совпадения двух групп, одна из которых имеет порядок существенно меньший, чем 5^{34}. Данная попытка основана на классическом результате В. П. Шункова, который был получен в 1972 г.: периодическая группа, содержащая инволюцию, централизатор которой конечен, локально конечна и почти локально разрешима [3].

Пусть $\{1,2\}$ – образующие группы $B(2,5)$ и φ – автоморфизм порядка 2 данной группы следующего вида

$$\varphi:\ \begin{cases} 1 \to 2, \\ 2 \to 1. \end{cases}$$

Аналогичным образом (в тех же обозначениях образующих) можно определить автоморфизм φ_0 группы $B_0(2,5)$.

Пусть $C_{B(2,5)}(\varphi)$ и $C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)$ – централизаторы автоморфизмов φ и φ_0 в $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$, соответственно.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. $|C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)| = 5^{17}$.

Поскольку по приведенной выше теореме порядок $C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)$ значительно меньше порядка $B_0(2,5)$, авторы предлагают сравнивать $C_{B(2,5)}(\varphi)$ и $C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)$. Ясно, что если $C_{B(2,5)}(\varphi) \cong C_{B_0(2,5)}(\varphi_0)$, то по упомянутому выше результату В. П. Шункова группа $B(2,5)$ будет конечна.

Доказательство. Как и в работе [1], будем представлять элементы группы $B_0(2,5)$ в виде нормальных коммутаторных слов. В качестве первых двух коммутаторов возьмем образующие группы $B_0(2,5)$, которые обозначим 1 и 2, а последующие с 3 по 34 коммутатор вычисляются рекурсивно через 1 и 2 [1].

В этом случае каждый элемент $g \in B_0(2,5)$ однозначно представляется множеством упорядоченных произведением базисных коммутаторов в определенных степенях

$$g = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots 34^{\alpha_{34}},$$

где $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $(i = 1, 2, \ldots, 34)$.

Для доказательства теоремы необходимо найти в группе $B_0(2,5)$ такие элементы, что

$$\varphi_0(g) = \varphi_0(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdot \ldots 34^{\alpha_{34}}) = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots 34^{\alpha_{34}} = g. \qquad (1)$$

При помощи компьютерных вычислений, используя список соотношений для базисных коммутаторов из работы [1], был вычислен результат действия φ_0 на каждый базисный коммутатор.

$\varphi_0(1) = 2,$

$\varphi_0(2) = 1,$

$\varphi_0(3) = 3^4,$

$\varphi_0(4) = 5^{4}10^{4}13^{1}14^{4}15^{1}17^{1}18^{1}19^{1}20^{3}21^{4}23^{1}24^{1}25^{4}26^{1}27^{4}28^{4}31^{3}32^{3}33^{3}34^{1},$

$\varphi_0(5) = 4^{4}9^{3}11^{1}12^{4}13^{2}16^{1}17^{3}18^{3}20^{1}21^{1}22^{4}23^{4}25^{1}27^{1}30^{3}31^{3}32^{3}34^{1},$

$\varphi_0(6) = 8^{4}14^{4}17^{1}20^{4}21^{2}22^{3}24^{3}25^{1}26^{1}28^{3}29^{3}30^{1}31^{4}32^{1}33^{2}34^{4},$

$\varphi_0(7) = 7^{4}9^{3}10^{4}11^{1}12^{2}13^{2}14^{4}16^{4}17^{4}18^{1}19^{1}21^{1}22^{1}23^{1}24^{1}25^{3}26^{3}28^{4}29^{2}30^{4}32^{2}33^{3},$

$\varphi_0(8) = 6^{4}11^{3}15^{4}16^{2}19^{2}20^{3}21^{3}23^{1}27^{4}29^{2}30^{3}32^{1}33^{3}34^{3},$

$\varphi_0(9) = 10^{3}12^{2}13^{3}14^{2}15^{4}16^{1}17^{4}18^{1}19^{3}20^{4}21^{2}22^{1}23^{1}24^{1}25^{3}27^{4}28^{3}29^{4}30^{2}31^{1}32^{3}33^{3},$

$\varphi_0(10) = 9^{2}11^{2}12^{3}13^{3}16^{4}17^{4}18^{3}20^{3}22^{4}24^{3}25^{2}27^{1}29^{2}30^{1}31^{1}32^{3}33^{3}34^{3},$

$\varphi_0(11) = 14^{3}17^{2}18^{4}20^{4}21^{1}22^{4}24^{2}25^{1}27^{4}28^{4}30^{3}31^{1}32^{3}34^{4},$

$\varphi_0(12) = 13^{3}15^{2}16^{3}18^{2}19^{4}20^{4}21^{1}23^{3}24^{4}25^{2}27^{1}29^{1}30^{4}31^{3}32^{2}33^{2}34^{3},$

$\varphi_0(13) = 12^{2}15^{3}16^{4}17^{4}18^{1}19^{3}20^{3}21^{3}22^{4}24^{4}25^{1}26^{1}27^{3}29^{1}30^{1}32^{1}33^{4}34^{1},$

$\varphi_0(14) = 11^{2}15^{3}16^{3}20^{4}21^{3}24^{3}27^{4}30^{1}32^{3}33^{1}34^{1},$

$\varphi_0(15) = 17^{3}20^{1}22^{2}24^{1}26^{4}27^{4}29^{1}30^{2}31^{1}32^{3}33^{1}34^{1},$

$\varphi_0(16) = 17^{4}18^{4}20^{2}21^{1}22^{2}24^{4}27^{2}28^{4}29^{2}31^{1}32^{3}33^{4}34^{2},$

$\varphi_0(17) = 15^{2}19^{3}20^{4}21^{1}23^{3}24^{3}25^{3}27^{4}29^{4}30^{3}32^{1}33^{2}34^{3},$

$\varphi_0(18) = 15^{3}16^{4}19^{3}21^{4}24^{3}25^{2}27^{1}30^{3}31^{4}32^{1}33^{2}34^{3},$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента России (код проекта МК-2494.2008.1.), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/3023), а также РФФИ (код проекта 09-01-07177-а).

$\varphi_0(19) = 22^2 27^3 28^3 30^3 31^2 32^2 33^2 34^1$,

$\varphi_0(20) = 20^3 21^4 24^1 26^2 29^1 30^1 31^4 32^2 34^2$,

$\varphi_0(21) = 20^3 21^2 24^4 25^4 26^3 27^4 29^4 30^4 31^1 34^1$,

$\varphi_0(22) = 19^3 23^3 25^4 29^3 30^1 32^3 33^4$,

$\varphi_0(23) = 28^2 33^1 34^2$,

$\varphi_0(24) = 26^2 27^4 30^2 31^1 32^4 33^3 34^3$,

$\varphi_0(25) = 27^4 32^4 33^1 34^3$,

$\varphi_0(26) = 24^3 25^2 29^4 30^4 32^4 33^2 34^3$,

$\varphi_0(27) = 25^4 32^3 33^3 34^3$,

$\varphi_0(28) = 23^3 32^1 34^4$,

$\varphi_0(29) = 31^3 33^1 34^3$,

$\varphi_0(30) = 30^1 32^1 33^3$,

$\varphi_0(31) = 29^2 32^4 34^4$,

$\varphi_0(32) = 33^2$,

$\varphi_0(33) = 32^3$,

$\varphi_0(34) = 34^1$.

Так как φ_0 – автоморфизм, то

$$\begin{gathered}\varphi_0(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots 34^{\alpha_{34}}) = \\ = \varphi_0(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots 10^{\alpha_{10}}) \varphi_0(11^{\alpha_{11}} 12^{\alpha_{12}} \ldots 34^{\alpha_{34}}).\end{gathered} \tag{2}$$

В работе [1] показано, что коммутаторы с 11 по 34 перестановочны и порождают характеристическую нормальную абелеву подгруппу, поэтому

$$\varphi_0(11^{\alpha_{11}} 12^{\alpha_{12}} \ldots 34^{\alpha_{34}}) = 11^{\gamma_{11}} 12^{\gamma_{12}} \ldots 34^{\gamma_{34}}. \tag{3}$$

Принимая во внимание (2) и (3), найдем такие элементы $v_i = 1^{\alpha_1} \ldots 10^{\alpha_{10}}$, что $\varphi_0(v_i) = \varphi_0(1^{\alpha_1} \ldots 10^{\alpha_{10}}) = 1^{\alpha_1} \ldots 10^{\alpha_{10}} b_i$, где $b_i = 11^{\beta_{11}} \ldots 34^{\beta_{34}}$.

В результате полного перебора, используя компьютерные вычисления, было получено, что всего таких элементов 625.

Ввиду того, что коммутаторы с 11 по 34 перестановочны, нахождение степеней $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{34}$, удовлетворяющих условию (1), сводится к решению систем линейных уравнений над полем GF(5) следующего вида:

$$A\vec{\alpha} + \vec{b}_i = \vec{\alpha}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 625), \tag{4}$$

где $\vec{\alpha} = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{34})^T$ – вектор неизвестных значений степеней коммутаторов с 11 по 34; $\vec{b}_i = (\beta_{11}, \ldots, \beta_{34})^T$ – вектор значений степеней коммутаторов с 11 по 34 для элемента вида v_i; A – матрица, каждый элемент a_{ij} которой вычисляется как $a_{ij} = \beta_{(i+10)}$, т. е. является степенью коммутатора $(i + 10)$ под действием автоморфизма φ_0 на коммутатор $(j + 10)$: $\varphi_0(j+10) = \ldots (i+10)^{\beta_{(i+10)}} \ldots$ $(i, j = 1, \ldots, 24)$. Другими словами, если $w = 11^{\alpha_{11}} \ldots 34^{\alpha_{34}}$ и $\varphi_0(w) = 11^{\gamma_{11}} \ldots 34^{\gamma_{34}}$, то в векторном виде это можно записать как $A\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$, где $\vec{\alpha} = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{34})^T$ и $\vec{\gamma} = (\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{34})^T$.

Перепишем систему (4) в виде

$$(A - E)\vec{\alpha} = -\vec{b}_i,$$

где E – единичная матрица.

Для каждого $\vec{b}_i$ необходимо исследовать систему на совместность. Для этого сначала было найдено, что ранг матрицы $[A - E]$ равен 11. Затем, при помощи компьютерных вычислений было получено, что ранги расширенных матриц $[(A - E) \mid (-\vec{b}_i)]$ для всех i также равны 11. Таким образом, все системы уравнений совместны. Так как число параметров будет $24 - 11 = 13$, то каждая система имеет 5^{13} решений. Общее же число решений равно $625 \cdot 5^{13} = 5^{17}$. Каждому полученному решению будет однозначным образом соответствовать элемент группы $B_0(2,5)$, удовлетворяющий условию (1). Теорема доказана.

Библиографический список

1. Hawas, G. The two generated Burnside group of exponent five / G. Hawas, G. Wall, J. Wamsley // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. № 10. P. 459–470.

2. Кострикин, А. И. Вокруг Бернсайда / А. И. Кострикин. М. : Наука, 1986.

3. Шунков, В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией / В. П. Шунков // Алгебра и Логика. 1972. № 4. С. 470–494.

A. A. Kuznetsov, A. K. Shlepkin, A. N. Antamoshkin

ON FINITENESS CRITERION OF BURNSIDE GROUP *B*(2,5)

It is shown that the centralizer of an automorphism of the second order of a special kind of Burnside group $B_0(2,5)$ has an order 5^{17}.

Keywords: Burnside problem.