

основанных на ядерных оценках плотности вероятности типа Розенблатта–Парзена. Структура гибридных уравнений разделяющих поверхностей между классами в подобных системах формируется на основе параметрической ее аппроксимации, восстанавливаемой с учетом априорных сведений, и корректирующей ее функции непараметрического типа. Вид корректирующей функции и особенности исходной информации порождают семейство изучаемого класса систем.

Гибридные решающие функции обладают свойствами асимптотической несмещенности и состоятельности, устойчивы к отклонениям параметров исходного уравнения разделяющей поверхности от оптимальных их значений.

A. V. Lapko, V. A. Lapko, A. V. Sarenkov

## HYBRID ALGORITHM OF PATTERN RECOGNITION AND ITS PROPERTIES

*The technique of synthesis and analysis of hybrid algorithms pattern recognition, providing an effective utilization of aprioristic data on a kind of decision functions and information of training samples is considered. Their properties are investigated analytically by a method of statistical modeling.*

*Keywords: pattern recognition, nonparametric statistics, hybrid algorithms, asymptotic properties.*

УДК 630\*561.24:582.477.6

В. В. Шишов

## МЕТОД ЭМПИРИЧЕСКИХ КАТЕГОРИАЛЬНЫХ КОРРЕЛОГРАММ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ<sup>1</sup>

*Предложен новый спектральный метод к анализу категориальных данных – метод эмпирических категориальных коррелограмм. На базе вычислительного эксперимента проводятся исследования на его статистическую устойчивость к различного рода шумовым воздействиям. Приводится пример анализа дендрохронологических данных на его основе.*

*Ключевые слова: спектральный анализ, категориальные данные.*

В самом общем случае любая случайная функция натурального аргумента  $t$  (или временной ряд) может быть представлена в следующем виде [1]:

$$X(t) = A(t) \sin(\omega(t)t + \psi(t)).$$

В связи с этим, самая большая сложность, встречаемая в спектральном анализе, заключена в оценке параметров  $A(t)$  – амплитуды колебаний,  $\omega(t)$  – их частоты и  $\psi(t)$  – фазового сдвига колебаний, которые являются также функциями времени. Проиллюстрируем эту проблему на примере оценки частоты колебаний.

Проанализируем взаимосвязи спектров циклических компонент, которые обладают примерно одинаковыми частотами. Отметим, что при определенных условиях циклические компоненты с близкими частотами будут линейно-независимыми, в частности, линейные корреляции между ними будут равны 0 [2]. Это вытекает из

## Библиографический список

1. Parzen, E. On estimation of a probability density function in mode / E. Parzen // *Annals of Mathematical Statistics*. 1962. Vol. 33. P. 1065–1076.
2. Надабая, Э. А. Непараметрические оценки кривой регрессии / Э. А. Надабая // *Тр. ВЦ АНГССР*. Вып. 5. 1965. С. 56–68.
3. Lapko, A. V. Hybrid Systems of Pattern Recognition / A. V. Lapko, V. A. Lapko // *Pattern recognition and image analysis*. 2008. Vol. 18. № 1. P. 7–13.
4. Лапко, А. В. Имитационные модели неопределенных систем / А. В. Лапко. Новосибирск : Наука. 1993.

свойства, которое широко используется при преобразованиях Фурье, Хартли и различных модификаций этих методов [2]. А именно набор гармоник  $\{\sin(2\pi \cdot t \cdot 1/j), \text{ где } j = 2\pi/k, k - \text{целое}\}$  образует базис в бесконечно-мерном функциональном пространстве. На практике, в силу жестких ограничений (например, стационарность исходных временных рядов), накладываемых на использование чистого преобразования Фурье [2], широкое распространение получили методы (SSA, МТМ или СРТ), для которых такие ограничения не столь критичны.

Существует ряд классических примеров, которые показывают сложность определения при спектральном анализе истинных частот для временных рядов, встречаемых в различных областях естественных наук. Эти ряды, как правило, отличаются наличием нестационарных амплитуды, фазовых сдвигов и «колорированного» шума, кото-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-05-00900-а, проект № 09-04-00803-а).

рый может полностью изменить спектр изучаемого природного процесса.

Автором предлагается новый алгоритм спектрального анализа – метод эмпирических категориальных коррелограмм (МЭКК), который позволяет с высокой степенью вероятности определять истинные частоты и фазовые сдвиги как для количественных данных, так и качественных (категориальных) временных рядов. Примером последних могут служить косвенные данные о климатических изменениях, привязанные к временной шкале. Отметим, что такие наблюдения за климатическими событиями отличаются нерегулярностью при их фиксации во времени, а именно большим количеством пропусков самих событий во времени [3; 4]. Последнее объясняется несовершенством методики фиксации, сбора и обработки подобных сведений в доинструментальной исторической эпохе обработки климатической информации [4].

**Описание алгоритма МЭКК.** Преобразуем анализируемый временной ряд (ВР) по следующему правилу. Во-первых, проведем группировку с равными интервалами всех значений этого ВР [5]. При этом, количество групп  $M$  определим при помощи известной формулы Стерджесса, т. е.  $M = \text{Целое}(1 + \text{Ln}(N))$ , а длину группировочного интервала  $h$  – как  $h = (S_{\max} - S_{\min})/M$ , где  $S_{\max}$  – максимальное значение временного ряда  $S(t)$  и  $S_{\min}$  – минимальное значение временного ряда  $S(t)$ , соответственно. Группировочный интервал для  $i$ -группы ( $i = 1 \dots M$ ) определим по следующему соотношению:

$$\Delta_i = \begin{cases} [S_{\min} + (i-1)h ; S_{\min} + ih), & \text{если } i < M, \\ [S_{\min} + (i-1)h ; S_{\max}], & \text{если } i = M. \end{cases}$$

Далее значению категориального временного ряда  $\hat{S}(t)$  в момент времени  $t$  припишем номер той группы, в группировочный интервал которой попало значение исходного временного ряда  $S(t)$ .

Процедура группировки значений ВР позволяет стабилизировать амплитуду ВР и снизить влияние фонового шума на абсолютные значения исходного ВР.

Охарактеризуем каждую из  $M$ -групп средним группировочным значением  $\bar{s}^k$  (оценкой математического ожидания для каждой  $k$ -группы,  $k = 1 \dots M$ ), группировочным среднеквадратическим отклонением  $\sigma^k$  (оценкой дисперсии для каждой  $k$ -группы) и количеством попавших в эту группу значений анализируемого ВР. Эти характеристики будут использованы при восстановлении ВР после спектрального разложения. Конечно, количество признаков для каждой образованной группы можно увеличить, например, центральными моментами более высоких порядков.

На следующем этапе будем сравнивать полученный категориальный ряд с синус-функциями  $\{\sin(2\pi \cdot t \cdot 1/j + \varphi), \varphi \in [0, 2\pi] (j = 2 \dots N)\}$ . Предварительно, каждую  $j$ -синус-функцию  $B_j(t, \varphi) = \sin(2\pi \cdot t \cdot 1/j + \varphi), \varphi \in [0, 2\pi] (j = 2 \dots N)$ , которая также представляет собой ВР, преобразуем в категориальный ВР  $\hat{B}_j(t)$  по правилу, описанному выше.

Оценим степень сходства между двумя категориальными рядами  $\hat{S}(t)$  и  $\hat{B}_j(t)$  при помощи коэффициента корреляции Спирмена, который позволяет сравнивать категориальные данные. Повторим процедуру сравнения

$\hat{S}(t)$  и  $\hat{B}_j(t)$  при фиксированной частоте  $1/j$  для  $B_j(t, \varphi)$ , последовательно изменяя фазу  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  с достаточно малым шагом  $\delta$ .

Таким образом, можно найти оптимальную фазу для каждой  $\hat{B}_j(t)$  при фиксированной частоте  $1/j$  путем нахождения максимального коэффициента корреляции Спирмена по  $\varphi$ .

В результате, можно получить коррелограмму, где по оси абсцисс откладываются значения частоты (или соответствующим им периодам), а по оси ординат – максимальные значения коэффициента корреляции Спирмена (рис. 1). Критерием определения базовых частот может служить порог значимости коэффициента Спирмена для соответствующего объема выборки  $N$  (в нашем случае – длины ВР) и выбранного уровня надежности  $p$ .

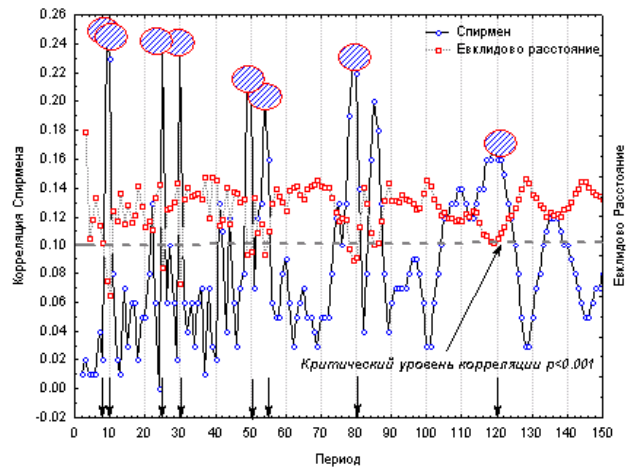


Рис. 1. Пример коррелограммы, полученной при сравнении категориального ряда  $\hat{S}(t)$  с категориальными синус-функциями  $B_j(t)$  ( $j = 2 \dots N$ )

После определения базовых частот, естественно, появляется необходимость в восстановлении чистого сигнала, т. е. исходного  $S(t)$  без аддитивной шумовой составляющей.

Для этого на основе коррелограммы определяются  $k$  ( $k < N/3$ ), базовые частоты  $\omega^{\text{баз}} = 1/j$  и соответствующие им фазы  $\varphi^{\text{баз}}$ , при которых коэффициент Спирмена достигает локальных максимумов. Далее, восстанавливается чистый сигнал  $S(t)$  на основе линейной комбинации базовых синус-функций  $B_j^{\text{баз}}(t, \varphi)$ , а именно

$$S^{\text{рек}}(t) = \sum_j A_j B_j^{\text{баз}}(t, \varphi),$$

где все амплитуды  $A_j$  равны 1.

Отметим, когда все амплитуды  $A_j$  близки к 1, чистый сигнал  $S^{\text{чист}}(t)$  (без шума) и реконструированный сигнал  $S^{\text{рек}}(t)$  получают сильно положительно коррелированными ( $R = 0,89, p < 0,000\ 01$ ) (рис. 2). При этом,  $S^{\text{рек}}(t)$  объясняет 80 % изменчивости  $S^{\text{чист}}(t)$ . Сравним полученные результаты с корреляцией между исходным ВР  $S(t)$  и чистым сигналом  $S^{\text{чист}}(t)$ . В данном случае  $S(t)$  объясняет всего 30 % изменчивости  $S^{\text{чист}}(t)$ .

В случае если амплитуды  $A_j$  неизвестны, можно воспользоваться следующей процедурой: реконструированный  $S^{\text{рек}}(t)$ , при условии  $A_j = 1 (j = 1 \dots k)$ , перевести в категориальный ряд  $\hat{S}^{\text{рек}}(t)$  по алгоритму, описанному выше, считая, что существует взаимно-однозначное со-

ответствие между группами, полученными для  $S(t)$  и  $S^{\text{рек}}(t)$ .

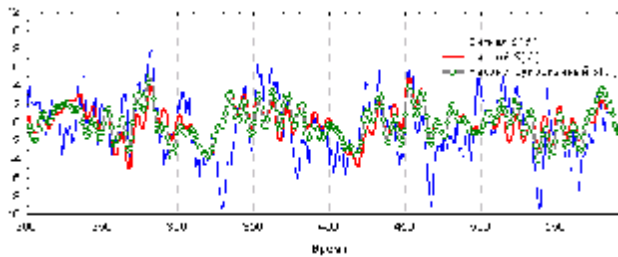


Рис. 2. Фрагмент динамики исходного сигнала  $S(t)$ , чистого сигнала  $S^{\text{чист}}(t)$  (без шума) и реконструированного сигнала  $S^{\text{рек}}(t)$  на основе метода эмпирических категориальных коррелограмм

Далее следует считать, что группировочные средние  $\bar{s}^i$  для каждой  $i$ -группы  $S(t)$  ( $i = 1 \dots M$ ) и соответствующие группировочные среднеквадратические отклонения  $\sigma^i$  являются группировочными характеристиками для каждой из  $M$ -групп, полученных для  $S^{\text{рек}}(t)$ .

После этого необходимо окончательно заменить номера групп  $\hat{S}^{\text{рек}}(t)$  на соответствующие группировочные средние, для которых можно указать доверительные интервалы.

Рассмотренная выше процедура спектрального анализа называется методом эмпирических категориальных коррелограмм (МЭКК).

Автором на базе вычислительного эксперимента и метода Монте-Карло проводятся исследования на статистическую устойчивость к различного рода шумовым воздействиям.

Отмечается также, что традиционные методы спектрального анализа (МТМ-метод, метод максимальной эн-

тропии, Вейвлет-анализ, сингулярный спектральный анализ) на подобных сильно зашумленных случайных функциях теряют до 50 % информации об истинном сигнале.

Данный метод апробирован при спектральном анализе и получении реконструкции 4-х сверхдлительных древесно-кольцевых хронологий для циркумполярной области Евразии. В реконструированных хронологиях наблюдается динамика, обратная к температурной после 1960 г.

**Техническая реализация МЭКК и его исследование на статистическую устойчивость.** Для проведения расчетов на основе метода эмпирических категориальных коррелограмм (МЭКК) и анализа его статистической устойчивости была разработана прикладная программа Spectral\_Testing в среде программирования Delphi 5 компании Borland. Эта программа при запуске имеет стандартный вид Windows окна (рис. 3). Для использования программы необходима операционная система MS Windows XP.

При запуске программы по умолчанию будет выполняться спектральный анализ реальных временных рядов. По умолчанию указатель стоит на радиокнопке Real Data Analysis. При этом необходимо указать имя входного файла, находящегося на любом логическом диске, нажав на кнопку «Browse».

Опция «% Missing value» позволяет из исходного временного ряда выбрасывать случайным образом определенный процент значений. Эта опция позволяет исследовать полученное спектральное представление ВР на устойчивость, а именно, какой процент выброшенных значений критическим образом сказывается на спектре, изменяя его. В качестве тестового примера может выступать любой смоделированный временной ряд, для которого известны его истинные амплитуды, частоты и фазы.

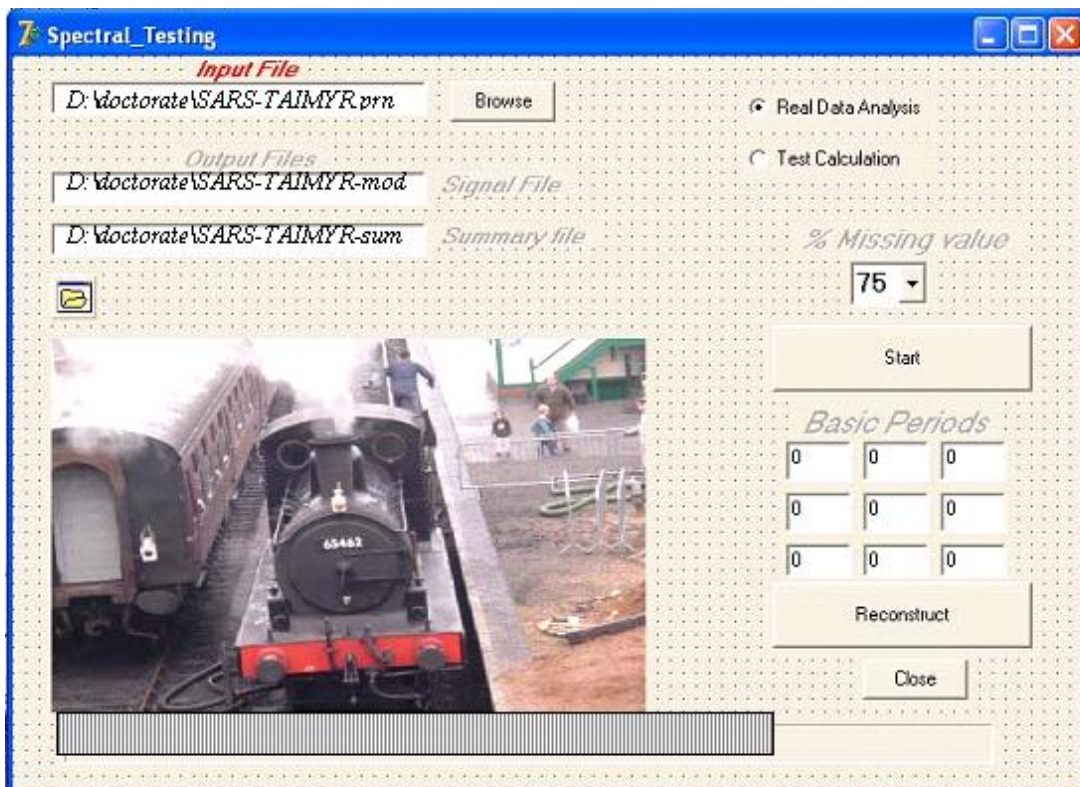


Рис. 3. Интерфейс программы Spectral\_Testing, реализующей метод эмпирических категориальных коррелограмм

Для восстановления исходного ряда необходимо указать «базовые» периоды в строке «Basic periods».

При восстановлении исходного сигнала алгоритм программы обратится к выходному файлу \*summary.dat (см. пример ниже), в котором записаны результаты 1-го этапа анализа – этапа построения категориальных коррелограмм.

Выходные данные представляются в виде двух файлов. Данные файла \*summary.dat представлены в 4-х столбцах в ASCII (DOS-формат): в 1-м столбце – период, 2-й столбец – соответствующая частота, 3-й столбец – максимальный коэффициент корреляции Спирмена, рассчитанный между двумя наборами категориальных данных, 4-й столбец – оптимальная фаза, при которой достигается максимальное значение коэффициента корреляции Спирмена. Также в первой строке указывается количество значений ВР, участвующих в анализе. Анализ данных этого файла позволяет принять решение о количестве базовых частот и их значениях, которые будут использованы на втором этапе анализа данных – этапе восстановления сигнала.

Файл \*modificate.dat содержит информацию об исходном временном ряде и его реконструкции.

Рассмотрим результаты, касающиеся статистической устойчивости описанного алгоритма. В качестве исходного гармонического сигнала был использован смоделированный сигнал, на который воздействовал «красный» шум с  $AR(1) = 0,8$  [6]. Количество реализаций такого шума было 1 000 ВР. Здесь и далее все вычислительные эксперименты имели не менее 1 000 повторностей.

Прежде всего, была исследована способность данного алгоритма выявлять базовые частоты при определенном проценте потери информации о значениях исходного временного ряда при фиксированных амплитудах, близких к 1.

Для этого последовательно выбрасывался случайным образом определенный процент значений категориального ВР. Этот процент изменялся последовательно в пределах от 5 до 80 % с шагом в 5 %. Такого рода потери информации во времени характерны при построении некоторых рядов в климатологии, дендроклиматологии, лимнологии, истории и т. д. [3; 4; 7; 8; 13].

Алгоритм стабильно выявляет все пики базовых частот в коррелограммах при выбрасывании до 75 % значений различных реализаций категориального ВР. При 80%-ных потерях информации, алгоритм МЭКК начинает терять от 2 до 4 пиков истинных базовых частот в зависимости от реализаций категориального ВР. Напомним, что таких реализаций было не менее 1 000. При анализе единичных реализаций коррелограмм только в 7 % случаев, алгоритм МЭКК ошибался при определении базовых частот, теряя 1...3 пика в высокочастотной области.

Таким образом, получено, что вероятность потерять базовую гармонику в высокочастотной области значительно выше, чем в низкочастотной, при спектральном анализе на основе МЭКК. Этот результат хорошо согласуется с теорией, разработанной для стохастических стационарных процессов [2].

Отметим также, что в теории стохастических процессов известны примеры аппроксимации эмпирических

значений автокорреляционной функции простой комбинации элементарных функций. Получаемые таким образом спектральные плотности обладают рядом привлекательных свойств, а именно они являются гладкими функциями частоты, не содержащих «протоестественных пиков и провалов» [2; 9].

Но в методе МЭКК речь идет не об аппроксимации некоторой функции другими более элементарными, а о корреляционных сопоставлениях категориальных преобразов самого изучаемого процесса с преобразованиями простейших тригонометрических функций в те моменты времени, где определен изучаемый случайный процесс.

На практике на основе предложенного метода (МЭКК) невозможно оценить амплитудный вклад каждой из выявленной гармоники в общий сигнал. Но для восстановленного сигнала, содержащего минимальный уровень шума это можно сделать при помощи традиционных спектральных методов, таких как Вейвлет-анализа или МТМ-метода.

**Применение МЭКК.** Было рассмотрено 4 древесно-кольцевых хронологии, полученных для Скандинавии (SCANDN), п-ова Ямал (Urals), п-ова Таймыр (Taimyr) и Северной части Якутии (Yakut). Все хронологии были получены на базе SARCS-стандартизации, являющейся робастной модификацией метода стандартизации региональными кривыми – RCS-метода [10].

При использовании МЭКК условно все выявленные периоды, которым соответствует значимый коэффициент ранговой корреляции Спирмена ( $p < 0,0001$ ), можно разбить на 4 группы: 30-летние колебания с периодом от 31 до 33 лет, 70 летние колебания с периодом от 72 до 76 лет, 90-летние колебания от 85 до 97 лет и, наконец, 150-летние колебания от 132 до 178 лет.

Отметим, что при помощи МЭКК были получены фазовые сдвиги для различных периодов (или частот). Предположим, что выявленные общие колебания являются оценкой внешнего климатического сигнала, действующего на все экосистемы для обширной территории Евразии. Тогда фазовые сдвиги могут быть интерпретированы, с одной стороны, как пространственно-временные запаздывания или опережения в действия данного сигнала на прирост древесных растений, как одного из основных индикаторов состояния экосистем. С другой стороны, такие фазовые сдвиги могут отражать региональные особенности роста древесных растений.

Динамика реконструированных сигналов древесно-кольцевых хронологий на базе МЭКК отличается уже отмеченными выше опережениями и запаздываниями, несмотря на сходство выявленных значений частот. Можно также отметить, что амплитуда колебаний реконструированных хронологий меняется синхронно для всего анализируемого периода (рис. 4). Например, экстремально большие амплитуды для периодов 1450–1525, 1650–1775, 1900–2000 гг. сменяются более низкими значениями для следующих периодов: 1550–1625, 1775–1850 гг., соответственно. При этом, имеется 2 периода синхронизации (1600–1700 и 1880–1980 гг.) и 2 периода дисинхронизации в динамике реконструированных хронологий (1500–1600 и 1725–1860 гг.) (рис. 4).

Все анализируемые хронологии являются температурно-чувствительными [11; 12]. Известно также, что с 1960-х гг.

XX в. отмечается практически повсеместное увеличение летних температур в субарктической области Северного полушария [13]. Но в динамике реконструированных хронологий аналогичной тенденции не наблюдается (рис. 4). После 1960 г. в реконструированных хронологиях наблюдается динамика, обратная к температурной. Подобное расхождение в динамике прироста древесных растений и изменений летней температуры были выявлены в ряде работ. Более того, были описаны механизмы подобного расхождения в тенденциях [14; 15].

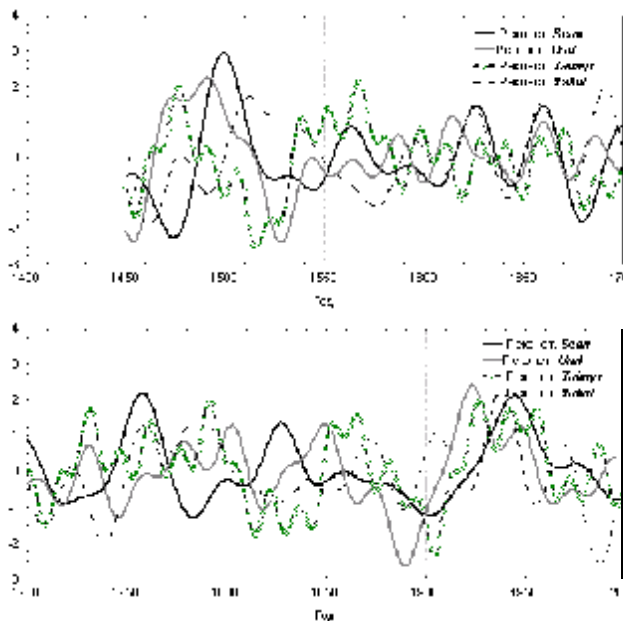


Рис. 4. Динамика реконструирования сигналов, выявленных в супердлительных древесно-кольцевых хронологиях для двух временных периодов

На основании проведенного анализа можно сделать следующие заключения.

Предлагается новый спектральный метод к анализу категориальных данных – метод эмпирических категориальных коррелограмм (МЭКК), который является статистически устойчивым к различного рода шумовым воздействиям, даже в тех случаях, когда амплитуда колорированного шума превосходит амплитуду сигнала. Разработано программное обеспечение, реализующее МЭКК.

На базе вычислительного эксперимента было показано, что алгоритм стабильно выявляет все пики базовых частот в коррелограммах при выбрасывании до 75 % значений различных реализаций категориального ВР. При 80%-ных потерях информации алгоритм МЭКК начинает терять до 70 % базовых частот, составляющих исходный сигнал.

На базе МЭКК был проведен спектральный анализ и получены реконструкции 4-х сверхдлительных древесно-кольцевых хронологий для циркумполярной области Евразии. В реконструированных хронологиях наблюдается динамика, обратная к температурной после 1960 г. По-

добного рода расхождение в динамике прироста древесных растений и изменений летней температуры известно в дендроклиматологии.

#### Библиографический список

1. Thomson, D. J. Spectrum estimation and harmonic analysis / D. J. Thomson // Proc. IEEE 70. 1982. P. 1055–1096.
2. Яглом, А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций (с примерами из метеорологии) / А. М. Яглом. Л.: Гидрометеоздат, 1981.
3. Шишов, В. В. Статистическая связь между проявлениями Эль Ниньо и летней температурой в Субарктике Сибири / В. В. Шишов // ДАН. 2000. № 5. Т. 375. С. 676–679.
4. Quinn, W. H. El-Nino occurrences over the past four and half centuries / W. H. Quinn, V. T. Neal // Journal of Geoph. Res. 1997. Vol. 92. P. 14449–14461.
5. Статистика: учебник / под ред. И. И. Елисеева. М.: ООО «ИТРЭМ». 2002.
6. Mann, M. E. Robust Estimation of Background Noise and Signal Detection in Climatic Time Series / M. E. Mann, J. Lees // Climatic Change. 1996. Vol. 33. P. 409–445.
7. Beer J. Sun and climate / J. Beer // Spatium. 2001. V. 8. P. 3–19.
8. Cook, E. R. Methods of Dendrochronology. Applications in the Environmental Sciences / E. R. Cook, L. A. Kairiukstis. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1990.
9. Казакевич, Д. И. Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии / Д. И. Казакевич. Л.: Гидрометеоздат, 1971.
10. Melvin, T. Historical growth rates and changing climatic sensitivity of boreal conifers / T. Melvin // Ph.D. thesis. Climatic Research Unit; University of East Anglia. Norwich, 2004.
11. Ваганов, Е. А. Длительные климатические изменения в арктической области Северного полушария / Е. А. Ваганов, К. А. Бриффа, М. М. Наурызбаев [и др.] // ДАН. 2000. № 1. Т. 375. С. 103–106.
12. Grudd, H. A 7400-year tree-ring chronology in northern Swedish Lapland: natural climatic variability expressed on annual to millennial timescales / H. Grudd, K. R. Briffa, W. Karlen [et al.] // The Holocene. 2002. Vol. 12. P. 657–667.
13. Jones, P. D. Growing season temperatures over the former Soviet Union / P. D. Jones, K. R. Briffa // Internat. J. Climatology. 1995. Vol. 15. P. 943–959.
14. Шишов, В. В. Анализ изменчивости радиального прироста древесных растений на территории севера Евразии в последние десятилетия / В. В. Шишов, М. М. Наурызбаев, Е. А. Ваганов [и др.] // Известия РАН. Сер. география. 2007. № 3. С. 49–59.
15. Vaganov, E. A. Influence of snowfall and melt timing on tree growth in subarctic Eurasia / E. A. Vaganov, M. K. Hughes, A. V. Kirilyanov [et al.] // Nature. 1999. Vol. 400. P. 149–151.

**METHOD OF EMPIRICAL CATEGORIAL CORRELORAMMS  
AND ITS APPLICATION**

*In the paper a new spectral method for the category data analysis is described as method of empirical category correlogram. The investigation about statistical robust to different noise forcing are carried out on the basis of its calculation modeling. An example of its application to the dendrochronological data is shown.*

*Keywords: spectral analysis, categorial data.*

УДК 519.6

А. А. Кузнецов

**ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРУПП ПО ИХ СПЕКТРУ<sup>1</sup>**

*Рассмотрен пример моделирования периодических групп при решении вопросов о распознаваемости групп по их спектру.*

*Ключевые слова: периодические группы, распознавание групп по спектру, компьютерное моделирование групп.*

Группы, заданные порождающими элементами и определяющими соотношениями, возникают естественным образом во многих областях математики и связанных с нею дисциплин, особенно в некоторых разделах геометрии и топологии.

Комбинаторную теорию групп можно охарактеризовать как теорию групп, которые описываются порождающими и определяющими соотношениями, где в качестве модели используется модель, известная как «комбинаторика слов». Как самостоятельная наука со своей проблематикой она оформилась по существу только после того, как в 1911 г. М. Дэн сформулировал основные алгоритмические проблемы теории групп: проблему распознавания равенства, известную в литературе также под названием «проблема тождества», проблему сопряженности и проблему изоморфизма.

Пусть

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid v_1 = e, v_2 = e, \dots, v_k = e \rangle$$

– периодическая группа, т. е. группа у которой все элементы имеют конечный порядок, с множеством свободных порождающих  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  и  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  – определяющими соотношениями в  $G$ ;  $e$  – единица группы (пустое слово).

В работах [1; 2] был предложен алгоритм, который позволяет моделировать произвольную периодическую группу  $G$ , заданную порождающими элементами и определяющими соотношениями посредством последовательности специальных объектов  $K_s = \{P_s, A_s, C_s, T_s\}$ , каждый из которых представляет собой множество всех слов  $P_s$  группы  $G$ , не превосходящих по длине  $s$ , с заданной на этом множестве таблицей умножения  $T_s$ , обраба-

тывая которую при помощи алгоритма  $A_s$ , мы получаем список соотношений  $C_s$  в группе  $G$ .

В результате работы алгоритма строится последовательность объектов

$$K_1, K_2, \dots, K_s, \dots$$

В случае бесконечности группы  $G$ , число объектов  $K_s$  также можно построить бесконечное количество.

Если же группа  $G$  конечна, то на каком-то конечном шаге  $s$  будет иметь место следующее равенство:

$$K_s = K_{s+1}.$$

В этом случае последовательность  $P_s$  будет представлять элементы группы  $G$ ,  $C_s$  – список определяющих соотношений, а  $T_s$  – таблицу умножения в указанной группе.

*Теорема 1.* Пусть  $s \in \mathbb{N}$  и  $s$  наименьшее со свойством  $K_s = K_{s+1}$ , тогда  $|G| \leq |P_s|$  [2].

Обозначим через  $\omega(G)$  спектр группы  $G$ , т. е. множество порядков элементов из  $G$ . Например,  $\omega(L_2(7)) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$  [2]. Группа  $G$  из класса  $X$  называется распознаваемой в  $X$  по спектру  $\omega(G)$ , если любая группа  $H \in X$ , для которой  $\omega(H) = \omega(G)$ , изоморфна  $G$ .

В «Коуровской тетради» В. Д. Мазуров поместил следующий вопрос [3]: «Расознаваема ли группа  $L_2(7)$  по спектру в классе всех групп?»

В работе [4] было получено положительное решение данной проблемы.

*Теорема 2.* Если спектр группы  $G$  равен  $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ , то  $G \cong L_2(7)$  [4].

В процессе доказательства теоремы 2 требовалось установить конечность ряда групп, заданных порождающими элементами и определяющими соотношениями. В

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента России (код проекта МК-2494.2008.1.), а также при поддержке АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/3023).