V. V. Shishov

METHOD OF EMPIRICAL CATEGORIAL CORRELORAMMS AND ITS APPLICATION

In the paper a new spectral method for the category data analysis is described as method of empirical category correlogram. The investigation about statistical robust to different noise forcing are carried out on the basis of its calculation modeling. An example of its application to the dendrochronological data is shown.

Keywords: spectral analysis, categorial data.

УДК 519.6

А. А. Кузнецов

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРУПП ПО ИХ СПЕКТРУ[1]

Рассмотрен пример моделирования периодических групп при решении вопросов о распознаваемости групп по их спектру.

Ключевые слова: периодические группы, распознавание групп по спектру, компьютерное моделирование групп.

Группы, заданные порождающими элементами и определяющими соотношениями, возникают естественным образом во многих областях математики и связанных с нею дисциплин, особенно в некоторых разделах геометрии и топологии.

Комбинаторную теорию групп можно охарактеризовать как теорию групп, которые описываются порождающими и определяющими соотношениями, где в качестве модели используется модель, известная как «комбинаторика слов». Как самостоятельная наука со своей проблематикой она оформилась по существу только после того, как в 1911 г. М. Дэн сформулировал основные алгоритмические проблемы теории групп: проблему распознавания равенства, известную в литературе также под названием «проблема тождества», проблему сопряженности и проблему изоморфизма.

Пусть

$$G = \langle x_1, x_2, ..., x_m \mid v_1 = e, v_2 = e, ..., v_k = e \rangle$$

– периодическая группа, т. е. группа у которой все элементы имеют конечный порядок, с множеством свободных порождающих $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ и $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ – определяющими соотношениями в *G*; *e* – единица группы (пустое слово).

В работах [1; 2] был предложен алгоритм, который позволяет моделировать произвольную периодическую группу *G*, заданную порождающими элементами и определяющими соотношениями посредством последовательности специальных объектов $K_s = \{P_s, A_s, C_s, T_s\}$, каждый их которых представляет собой множество всех слов P_s группы *G*, не превосходящих по длине *s*, с заданной на этом множестве таблицей умножения T_s, обрабатывая которую при помощи алгоритма A_s, мы получаем список соотношений C_s в группе *G*.

В результате работы алгоритма строится последовательность объектов

$$K_1, K_2, ..., K_s, ...$$

В случае бесконечности группы *G*, число объектов K_s также можно построить бесконечное количество.

Если же группа *G* конечна, то на каком-то конечном шаге *s* будет иметь место следующее равенство:

$$K_s = K_{s+1}.$$

В этом случае последовательность P_s будет представлять элементы группы *G*, C_s – список определяющих соотношений, а T_s – таблицу умножения в указанной группе.

Теорема 1. Пусть $s \in N$ и *s* наименьшее со свойством $K_s = K_{s+1}$, тогда $|G| \le |P_s|$ [2].

Обозначим через $\omega(G)$ спектр группы *G*, т. е. множество порядков элементов из *G*. Например, $\omega(L_2(7) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ [2]. Группа *G* из класса *X* называется распознаваемой в *X* по спектру $\omega(G)$, если любая группа $H \in X$, для которой $\omega(H) = \omega(G)$, изоморфна *G*.

В «Коуровской тетради» В. Д. Мазуров поместил следующий вопрос [3]: «Распознаваема ли группа $L_2(7)$ по спектру в классе всех групп?»

В работе [4] был получено положительное решение данной проблемы.

Теорема 2. Если спектр группы *G* равен {1, 2, 3, 4, 7}, то $G \cong L_2(7)$ [4].

В процессе доказательства теоремы 2 требовалось установить конечность ряда групп, заданных порождающими элементами и определяющими соотношениями. В

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента России (код проекта МК-2494.2008.1.), а также при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/3023).

работе [4] указывалось, что конечность рассматриваемых групп была получена в результате компьютерного моделирования, основанного на представленном выше алгоритме, однако сами расчеты не приводились. В настоящей работе данный пробел восполнен и ниже приведен расчет группы, найденные свойства которой были необходимы для доказательства теоремы 2.

Рассмотрим пример моделирования группы.

Теорема 3. Пусть $G = < x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = e >$ – группа, порожденная тремя инволюциями x_1, x_2, x_3 и

1) $\omega(G) \subseteq \omega(L_2(7) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$;

2) произведение любых двух инволюций из G есть 2-элемент, т. е. $\forall\ v, w \in G\ \ |vw| = \{1, 2, 4\}$, если $|v| = |w| = 2$.

Тогда $|G| \le 2^{10}$ и $\omega(G) = \{1, 2, 4\}$.

Доказательство. Построим группу G при помощи алгоритма из работы [1]. Обозначим образующие группы $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$.

1. Строим объект $K_1 = \{A_1, P_1, T_1, C_1\}$. Здесь A_1 – алгоритм поиска и замены соотношений из C_1; $P_1 = \{e, 0, 1, 2\}$ – образующие группы. В последовательности P_1 введем отношение порядка, полагая по определению $e < 0 < 1 < 2$. Таблица умножения T_1 приведена в табл. 1. $C_1 = \{0^2 = e, 1^2 = e, 2^2 = e\}$ – список соотношений.

Таблица 1

Таблица умножения T_1

	e	**0**	**1**	**2**
e	*e*	0	1	2
0	0	00 = *e*	01	02
1	1	10	11 = *e*	12
2	2	20	21	22 = *e*

2. Далее строим объект K_2:

$$P_2 = \{e, 0, 1, 2, 10, 20, 01, 21, 02, 12\}.$$

Заметим, что все слова длины 2 являются произведениями инволюций, поэтому их порядки по определению равны 1, 2 или 4. Вследствие чего, список соотношений пополнится новыми соотношениями.

$$C_2 = \{0^2 = e, 1^2 = e, 2^2 = e, (10)^4 = e, (20)^4 = e,$$
$$(01)^4 = e, (21)^4 = e, (02)^4 = e, (12)^4 = e\}.$$

3. Переходим к построению объекта K_3:

$$P_3 = \{e, 0, 1, 2, 10, 20, 01, 21, 02, 12, 010, 210,$$
$$020, 120, 101, 201, 021, 121, 102, 202, 012, 212\}.$$

В P_3 среди слов длины 3 выделим «очевидные инволюции» 010, 020, 101, 121, 202 и 212 (действительно, $(010)^2 = 01(00)10 = 0(11)0 = 00 = e$ и т. д.). Сгруппируем оставшиеся слова длины 3 по парам: 210 и 012; 120 и 021; 201 и 102. Очевидно, сгруппированные слова являются взаимообратными друг к другу (действительно $210 \cdot 012 = e$, $012 \cdot 210 = e$ и т. д.), следовательно, $|210| = |012|$, $|120| = |021|$ и $|201| = |102|$. Рассмотрим несколько случаев.

Предположим, что $|210| = 3$, тогда список соотношений C_3 пополнится новым соотношением $(210)^3 = e$. Продолжая вычисления, получим, что в объекте K_7 последовательность $P_7 = P_1 = \{e, 0, 1, 2\}$. При этом таблица умножения T_7 будет следующая (табл. 2).

Таким образом, G – элементарная абелева группа порядка 4. Противоречие с предположением о том, что $|210| = 3$. К аналогичному результату приводят предположения о том, что $|120| = 3$ или $|201| = 3$. Поэтому $|120| \cdot 3$ и $|201| \cdot 3$.

Таблица 2

Таблица умножения T_7

	e	**0**	**1**	**2**
e	*e*	0	1	2
0	0	*e*	2	1
1	1	2	*e*	0
2	2	1	0	*e*

Рассмотрим следующий случай. Так как элементы 0, 1, 2, 010, 020, 101, 121, 202 и 212 являются инволюциями, то, составив из них таблицу умножения, мы получим элементы, порядки которых равны 1, 2 или 4 по условию теоремы. Все различные элементы из таблицы умножения данных инволюций приведены в табл. 3.

Таблица 3

Элементы, порядки которых равны 1, 2 или 4, как результат перемножения двух инволюций

$(10)^4 = e$	$(1021)^4 = e$	$(021010)^4 = e$
$(20)^4 = e$	$(1201)^4 = e$	$(101020)^4 = e$
$(01)^4 = e$	$(1202)^4 = e$	$(101021)^4 = e$
$(21)^4 = e$	$(1210)^4 = e$	$(101202)^4 = e$
$(02)^4 = e$	$(2010)^4 = e$	$(102121)^4 = e$
$(12)^4 = e$	$(2012)^4 = e$	$(121010)^4 = e$
$(0102)^4 = e$	$(2020)^4 = e$	$(121020)^4 = e$
$(0120)^4 = e$	$(2021)^4 = e$	$(202010)^4 = e$
$(0121)^4 = e$	$(2101)^4 = e$	$(202012)^4 = e$
$(0201)^4 = e$	$(2102)^4 = e$	$(202101)^4 = e$
$(0210)^4 = e$	$(2120)^4 = e$	$(202121)^4 = e$
$(0212)^4 = e$	$(2121)^4 = e$	$(212010)^4 = e$
$(1010)^4 = e$	$(010212)^4 = e$	$(212020)^4 = e$
$(1012)^4 = e$	$(012020)^4 = e$	$(212101)^4 = e$
$(1020)^4 = e$	$(020121)^4 = e$	$(212102)^4 = e$

Дополним список C_3 соотношениями из табл. 3. Пусть теперь $|210| = 7$, тогда в список соотношений C_3 добавится новое соотношение $(210)^7 = e$. Продолжая расчет, получим, что в объекте K_{11} последовательность $P_{11} = P_1 = \{e, 0, 1, 2\}$. При этом таблица умножения T_{11} будет такая же, как и табл. 2.

И снова приходим к противоречию с предположением о том, что $|210| = 7$. К аналогичному результату приводят предположения, что $|120| = 7$ или $|201| = 7$. Поэтому $|120| \cdot 7$ и $|201| \cdot 7$.

Рассмотренный анализ доказывает, что слова 210, 012, 120, 021, 201 и 102 не могут иметь порядок 3 и 7. Следовательно, данные слова должны иметь порядок 1, 2 или 4. Это означает справедливость следующих соотношений: $(210)^4 = e$, $(012)^4 = e$, $(120)^4 = e$, $(021)^4 = e$, $(201)^4 = e$ и $(102)^4 = e$. Добавим эти соотношения в C_3.

4. Переходим к построению K_4 и последующих объектов K_s с учетом соотношений из табл. 3. В конечном итоге получим, что $K_{13} = K_{14}$, $|P_{13}| = |P_{14}| = 2^{10}$. Затем, используя компьютерные вычисления, проверим, что таблица умножения T_{14} удовлетворяет всем групповым свой-

ствам. Таким образом, последовательность P_{14} с таблицей умножения T_{14} образует группу, изоморфную G. Непосредственной проверкой находим, что $\omega(G) = \{1, 2, 4\}$. Группа G, порядок которой равен 2^{10}, является максимальной группой, удовлетворяющей условиям теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $(10)^2 = e$, $(20)^2 = e$, $(21)^2 = e$. Тогда получим, что $|G| = 8$.

Следствие 2. Пусть $(10)^2 = e$, $(210)^2 = e$. Тогда получим, что $|G| = 16$.

Следствие 3. Пусть $(210)^2 = e$. Тогда получим, что $|G| = 32$.

Следствие 4. Пусть $(10)^2 = e$. Тогда получим, что $|G| = 64$.

Таким образом, проиллюстрированный в статье пример показывает эффективность моделирования периодических групп при помощи указанного выше алгоритма в задачах распознавания групп по их спектру.

Библиографический список

1. Кузнецов, А. А. Об одном алгоритме получения соотношений в свободной бернсайдовой группе $B(m, n)$ / А. А. Кузнецов, С. А. Тарасов, А. К. Шлепкин // Дискретные модели в теории управляющих систем : тр. VI Междунар. конф. М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. С. 175–178.

2. Кузнецов, А. А. Некоторые комбинаторные вопросы в периодических группах : дис ... канд. физ.-мат. наук / А. А. Кузнецов. Красноярск : КрасГАУ, 2006.

3. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь / под. ред. В. Д. Мазурова. Вып. 16. Новосибирск : ИМ СО РАН, 2006.

4. Кузнецов, А. А. Распознавание группы $L_2(7)$ по спектру в классе всех групп / А. А. Кузнецов, Д. В. Лыткина // Сиб. электрон. матем. изв. 2007. № 4. С. 136–140.

A. A. Kuznetsov

SET-THEORETIC ANALYSIS OF ALGEBRAIC PROBLEBMS OF GROUPS RECOGNIZABILITY BY SPECTRUM

It is shown the example of periodic groups modeling in problems of group recognizability by their spectrum.

Keywords: periodic groups, groups recognizability by spectrum, computational modeling of groups.

УДК 658.512.6

I. S. Masich

COMBINATORIAL OPTIMIZATION IN FOUNDRY PRODUCTION PLANNING

The mathematical model of foundry production capacity planning is suggested in the paper. The model is produced in terms of pseudo-Boolean optimization theory. Different search optimization methods were used to solve the obtained problem.

Keywords: combinatorial optimization, pseudo-Boolean function, heuristic algorithm, foundry.

Production capacity optimization. One of the actual problems in modern industry is production capacity optimization under irregular orders from numerous partners. Along with the mass serial production these orders may have small serial or single nature. The majority of orders are irregular, i. e. they cannot be planned beforehand but nevertheless they are profitable enough or the enterprise. It requires solving production scheduling problems many times in casual points of time.

So it is necessary to have means for including new small orders in capacity intervals of existing mass serial ones. Moreover, it is necessary to consider time of equipment revamping for small serial order since it takes significantly more part of execution time than in mass serial production.

Existing of small serial and single orders requires practically permanent process of production capacity planning. Construction of production capacity program for industrial enterprise and its subdivisions is laborious and logically intricate problem. Consider it by the example of foundry practice. Below we design an optimization model for production capacity and apply combinatorial methods to solve it.

Pseudo-Boolean optimization problems. Unconstrained pseudo-Boolean optimization is an issue studied enough by now. Algorithms that have been designed and investigated in the area of unconstrained pseudo-Boolean optimization are applied successfully for solving various problems. Particularly, they are local optimization methods [1–3] and stochastic and regular algorithms based on local search for special function classes [4–6]. Moreover, there are a number of algorithms for functions optimization given in explicit form: Hammer's basic algorithm that was introduced in [7] and simplified in [8]; algorithms for optimization of quadratic functions [9–11], etc. Universal optimization methods are also used successfully: genetic algorithms, simulated annealing, tabu search [12; 13].

If there are constraints on the binary variables, one of the ways to take into account it as is well known is