УДК 519.6

Т. А. Ширяева

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ ГИЛЬБЕРТОВОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ

Уточнены некоторые оценки для нормального распределения в банаховых пространствах.

Ключевые слова: случайный элемент, нормальное распределение.

Пусть $P(B)$ обозначает совокупность мер μ, определенных на борелевской σ – алгебре $\Re(B)$ сепарабельного вещественного банахова пространства B и удовлетворяющих условию $\mu(B) = 1$.

Определение. Случайный элемент $\xi \in B$ называется нормально распределенным, если для любого f линейного непрерывного функционала случайная величина $f(\xi)$ имеет нормальное распределение в множестве действительных чисел R_1. Поэтому функция плотности вероятности для $f(\xi)$ имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-a)}{2\sigma^2}}\,dt,$$

где $a = Mf(\xi)$; $\sigma^2 = Df(\xi)$.

Рассмотрим частный случай, когда $B = H$ – гильбертово пространство. Пусть норма $\|\xi\|$. Тогда $\|\xi\|$ – действительная случайная величина из R_1.

Если ξ имеет нормальное распределение и $M\xi = 0$, то характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(t) = Me^{it\|\xi\|^2} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{1-2t\lambda_k}},$$

где λ_k – собственные числа ковариации [1].

Пусть случайный элемент $\xi \in H$. Тогда распределение можно задать в виде $P\left(\|\xi\| < r\right)$, где $r \geq 0$.

Вопрос нахождения вероятностей такого вида является предметом изучения многих исследователей [2–5].

Приведем оценку из работы [2], которая является асимптотической, когда $r \to 0$.

Пусть в измеримом гильбертовом пространстве H задан гауссовский случайный элемент ξ с нулевым средним и корреляционным оператором R. Тогда, если $r \to 0$, то

$$P\left(\|\xi\|^2 < r\right) \approx$$

$$\approx \frac{\exp\left\{-\int\limits_0^{\gamma} Sp\left(R\left[R_u(R) - R_\gamma(R)\right]\right)du\right\}}{2\gamma\sqrt{\pi Sp\left[RR_\gamma\left(B\right)\right]^2}},$$

где $\gamma = \gamma(r)$ удовлетворяет уравнению: $r = SpBR_\gamma(B)$; SpA – след оператора.

Оператор R_γ определяется по формуле $R_\gamma(B) = (I + 2\gamma B)^{-1}$, I – тождественный оператор.

Как видно из формулы, чтобы вычислить вероятность $P(\|\xi\|^2 < r)$, прежде необходимо вычислить операторы R_γ и R_u, а также след указанных операторов, что само по себе проблематично.

Одной из последних оценок является оценка Л. В. Розовского [4].

В работе [5] предложен другой подход к оценке вероятностей $P(\|\xi\| < r)$.

В результате вычислений получено следующее:

$$P\left(\|\xi\| < r\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+(2t\lambda_k)^2\right)}}{t}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{tr^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\operatorname{arctg}2t\lambda_k + 2\pi k}{2}\sin\frac{tr^2}{2}\right)dt,$$

где λ_k – собственные числа ковариационного оператора R случайного элемента ξ.

Следствием указанной зависимости является оценка вида

$$P\left(\|\xi\| < r\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{r^2}}\frac{1}{t\sqrt[4]{1+(2t\lambda)^2}}\sin\frac{tr^2}{2}\,dt,$$

где $\lambda = \max\limits_{k\geq 1}\lambda_k$.

Уточним данную оценку путем увеличения числа параметров.

Формулировка результата. *Теорема.* Пусть λ_1 – максимальное собственное значение ковариационного оператора R, $\lambda_2 < \lambda_1$. Тогда вероятность попадания гауссовского случайного элемента ξ из гильбертова пространства в шар ограничена сверху:

$$P\left(\|\xi\| < r\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{6\pi}{r^2}}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\left(1+\left(2t\lambda_1\right)^2\right)\cdot\left(1+\left(2t\lambda_2\right)^2\right)}}\times$$

$$\times\sin\frac{tr^2}{2}\,dt.$$

Доказательство результата. Рассмотрим вероятность $P(r) = P(\|\xi\| < r)$, которая задана формулой (1). Зафиксируем $\lambda_1 = \max\limits_{k\geq 1}\lambda_k, \lambda_2 < \lambda_1$, тогда

$$e^{-\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+(2t\lambda_k)^2)} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt[4]{1+((2t\lambda_k)^2)}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt[4]{(1+((2t\lambda_1)^2)(1+((2t\lambda_2)^2)}}. \qquad (1)$$

Так как

$$\cos\left(\frac{tr^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\operatorname{arctg}2t\lambda_k + 2\pi k}{2}\right)$$

– по модулю не превосходит единицы, в итоге получаем, что

$$P(r) \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{t\sqrt[4]{\left(1+\left(2t\lambda_1\right)^2\right)\cdot\left(1+\left(2t\lambda_2\right)^2\right)}} \times \sin\frac{tr^2}{2}\,dt. \qquad (2)$$

Выражение интеграла (2) существенно проще, чем выражение (1). Получить точное численное значение интеграла (2) можно. Поэтому рассмотрим подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{t\cdot\sqrt[4]{\left(1+\left(2t\lambda_1\right)^2\right)\cdot\left(1+\left(2t\lambda_2\right)^2\right)}}\cdot\sin\frac{tr^2}{2}.$$

При $t = 0$ функция имеет разрыв, но существует

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t\sqrt[4]{\left(1+\left(2t\lambda_1\right)^2\right)\cdot\left(1+\left(2t\lambda_2\right)^2\right)}}\cdot\sin\frac{tr^2}{2} = \frac{r^2}{2},$$

значит функция ограничена. В точках $t_k = \frac{2\pi k}{r^2}$ функция пересекает ось Ox. График функции – синусоида, но из-за множителей $\frac{1}{t}$ и $\frac{1}{\sqrt[4]{\left(1+\left(2t\lambda_1\right)^2\right)\cdot\left(1+\left(2t\lambda_2\right)^2\right)}}$ при $t \to \approx$ синусоида будет угасать. Ограничимся случаем $k = 3$.

Поэтому

$$P(r) \le \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{6\pi}{r^2}} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\left(1+\left(2t\lambda_1\right)^2\right)\cdot\left(1+\left(2t\lambda_2\right)^2\right)}} \times \sin\frac{tr^2}{2}\,dt. \qquad (3)$$

Теорема доказана.

Для различных значений радиуса r собственных значений λ_1, λ_2 интеграл (3) был вычислен с помощью системы компьютерной алгебры Maple, построены таблицы.

Библиографический список

1. Гихман, И. И. Теория случайных процессов : в 2 т. Т. 1 / И. И. Гихман, А. В. Скороход. М. : Наука, 1971.

2. Сытая, Г. Н. Об асимптотическом представлении гауссовской меры в гильбертовом пространстве / Г. Н. Сытая // Теория стахостических процессов. 1974. Т. 2.

3. Ибрагимов, И. А. О вероятностях попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса / И. А. Ибрагимов // Записки научного семинара ЛОМИ. 1979. Т. 85. С. 75–93.

4. Розовский, Л. В. О гауссовой мере шаров в гильбертовом пространстве / Л. В. Розовский // Теория вероятностей и ее применения. 2008. № 2. С. 382–389.

5. Ширяева, Т. А. Оценка вероятности попадания гауссовского вектора в гильбертовый шар / Т. А. Ширяева, И. Л. Ваганова // Статическая метофизика : сб. тр. 5 ежегод. ФАМ конф. Красноярск, 2005. С. 179–181.

T. A. Shiryaeva

TOP ESTIMATION OF THE PROBABILITY OF THE HILBERT STOCHASTIC FUNCTION FINDINGIN THE SET SPACE

Some estimations for normal distribution in Banach spaces are amplified.

Keywords: stochastic element, normal distribution.