УДК 517.9

С. И. Сенашов, О. Н.Черепанова

# ГОМОТОПИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*Построены новые точные решения уравнений минимальных поверхностей.*

*Ключевые слова: минимальные поверхности, точные решения, контактные преобразования.*

Уравнение минимальных поверхностей известно уже более 200 лет, но его точных решений до сих пор построено всего три. Это такие поверхности, как катеноид, поверхность Шерка и семейство геликоидальных поверхностей.

Рассмотрим поверхность вида

$$z = u(x, y). \tag{1}$$

Это уравнение описывает минимальную поверхность, если $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\left(1+u_x^2\right)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + \left(1+u_y^2\right)u_{xx} = 0. \tag{2}$$

С помощью контактного преобразования Лежандра

$$u_x = \xi,\ \ u_y = \eta,\ \ w_\xi = x,\ \ w_\eta = y,$$

$$u(x, y) = x\xi + y\eta - w(\xi, \eta) \tag{3}$$

уравнение (2) сводится к линейному:

$$\left(1+\xi^2\right)w_{\xi\xi} + 2\xi\eta w_{\xi\eta} + \left(1+\eta^2\right)w_{\eta\eta} = 0, \tag{4}$$

при условии, что якобиан преобразования

$$J = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 \neq 0. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что поверхности

$$u = x \operatorname{tg} y,\ \ u = \ln\frac{\cos x}{\cos y},\ \ u = \operatorname{arcch}\left(x^2+y^2\right), \tag{6}$$

т. е. геликоид, поверхность Шерка и катеноид соответственно, являются решениями уравнения (2) и удовлетворяют условию (5).

Применим преобразование (3) к соотношениям (6), тогда они запишутся в виде

$$\begin{gathered} w(\xi,\eta) = \eta \operatorname{arctg} \xi, \\ w(\xi,\eta) = -\xi \operatorname{arctg} \xi + \\ +\eta \operatorname{arctg} \eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}, \end{gathered} \tag{7}$$

$$w(\xi,\eta) = \sqrt{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}} - $$
$$-\ln\left(\frac{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right).$$

Поскольку (7) удовлетворяет линейному уравнению (4), то их гомотопия также является решением уравнения (4). Тогда

$$\begin{gathered} w_н^1 = a(\eta \operatorname{arctg} \xi) + (1-a)\times \\ \times\left[-\xi \operatorname{arctg} \xi + \eta \operatorname{arctg} \eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}\right], \end{gathered} \tag{8}$$

$$w_н^2 = a(\eta \operatorname{arctg} \xi) +$$
$$+(1-a)\times$$
$$\times\left[\begin{gathered}\sqrt{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}} - \ln\times \\ \times\left(\frac{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right)\end{gathered}\right],$$

$$w_н^3 = a\left(-\xi \operatorname{arctg} \xi + \eta \operatorname{arctg} \eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}\right) +$$
$$+(1-a)\times$$
$$\times\left[\begin{gathered}\sqrt{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}} - \ln\times \\ \times\left(\frac{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+\left(\xi^2+\eta^2\right)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right)\end{gathered}\right],$$

где $w_н^1$, $w_н^2$, $w_н^3$ – новые решения уравнения (4); $a$ – вещественный параметр, $0 \le a \le 1$.

Действуя обратным преобразованием, из (8) получим новые семейства решений уравнения (2).

S. I. Senashov, O. N. Cherepanova

# HOMOTOPY OF MINIMAL SURFACES EQUATION SOLUTIONS

*The new exact solutions of minimal surfaces equations are constructed in this work.*

*Keywords: minimal surfaces, exact solutions, contact transformations.*