V. E. Patraev, I. V. Trifanov

MODERN SPACECRAFTS OPERATIONAL RELIABILITY AND QUALITY ANALYSIS

Research work proposes and considers the main quality and operational reliability characteristics of modern Russian communication spacecrafts. Some recommendations for increase of operational reliability of long-term operation spacecrafts, with account of severization of requirements, are given.

Keywords: spacecraft, reliability, lifetime of EEE-parts.

© Патраев В. Е., Трифанов И. В., 2010

УДК 629.735.064

О. Г. Бойко

О ПРАВОМЕРНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ И УСЛОВНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОТКАЗОВ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ НАДЕЖНОСТИ АГРЕГАТОВ

Обсуждаются процедуры определения условных вероятностей безотказной работы, условных плотностей вероятностей отказов и правомерность их использования в математических моделях надежности агрегатов авиационных систем.

Ключевые слова: вероятность, условная вероятность, условная плотность вероятности, агрегат, математическая модель.

В расчетах надежности сложных технических систем в авиации и других критических по надежности отраслях промышленности, при моделировании надежности агрегатов, для определения вероятности безотказной работы используется экспоненциальное распределение

$$p(t) = e^{-\omega t}, \quad (1)$$

где ω – параметр потока отказов агрегата, который определяется по плану испытаний [1] восстанавливаемых агрегатов и равен среднему значению числа отказов в единицу времени (в 1 час). При достаточно большой статистике среднее значение стремится к математическому ожиданию и параметру потока отказов w допустимо придать этот статус.

Вследствие процедур, предусмотренных при техническом обслуживании авиационной техники, параметры потоков отказов агрегатов систем самолетов поддерживаются на постоянном уровне [2]. Более того, верхние пределы параметров потоков отказов ограничиваются нормативными документами гражданской авиации в виде нормативных значений коэффициентов K_{1000} для самолетов российского производства и K_{100} – иностранного производства. Коэффициент K_{1000} является числом отказов агрегатов определенного типа, приходящемся на 1 000 часов полета и, таким образом, однозначно связан с параметром потока отказов.

Экспоненциальная модель вероятности отказа агрегата, который представляет собой монотонно возрастающую функцию времени (рис. 1):

$$q(t) = 1 - e^{-\omega t}. \quad (2)$$

В гражданской авиации, в соответствии с Нормами летной годности самолетов [3], вероятность отказа агрегатов и систем нормируется в вероятностях отказа за 1 час, приводящих к последствиям различной степени тяжести. Поскольку 1 час является величиной 3–4-го порядка малости по сравнению с налетом самолета, то вероятность отказа за 1 час $q(1)$ может быть определена в виде производной от (2) следующим образом:

$$q(1) = \omega \cdot e^{-\omega t}. \quad (3)$$

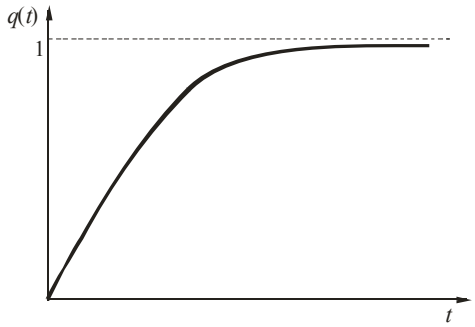

Рис. 1. Экспоненциальная модель вероятности отказа агрегата

График этой зависимости приведен на рис. 2. Уменьшение вероятности отказа за 1 час в функции времени работы агрегата противоречит, во-первых, независимости математического ожидания числа отказов за 1 час, равных ω, от времени работы агрегата; во-вторых, здравому смыслу, поскольку в процессе работы в агрегате неизбежно развиваются деградационные процессы, и вероятность отказа за 1 час никак не может уменьшаться. На практике ее можно поддерживать техническим обслуживанием на некотором уровне.

Впервые вопросы неадекватности экспоненциальной модели действительным процессам изменения надежности агрегатов поставлены в работах [4; 5].

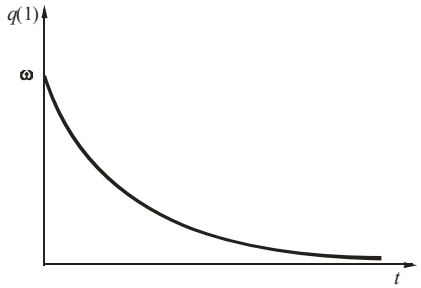

Рис. 2. Вероятность отказа за 1 час полета при экспоненциальной модели

Таким образом, целесообразно рассмотреть процедуры построения математических моделей, представленных экспоненциальным распределением, основанных на использовании условных вероятностей и условных плотностей вероятностей, которые применяются как в учебной [6; 7], так и научной литературе [8].

Математические модели агрегатов в теории надежности представлены в форме интегральных функций вероятностей безотказной работы $p(t)$, вероятности отказов $q(t)$ и их плотностей вероятностей (дифференциальных функций) $f(t)$.

Во многих отечественных источниках в области надежности условная вероятность безотказной работы на отрезке времени $[t_a; t_b]$, $(t_b > t_a)$ определена, как вероятность безотказной работы на момент t_b, если до момента времени t_a отказа не было, и имеет вид

$$p(t_b / t_a) = \frac{p(t_b)}{p(t_a)}. \quad (4)$$

Однако, в приведенном виде формулировка не соответствует выражению (4), поскольку, если до момента t_a отказа не было, то вероятность безотказной работы на участке $[0; t_a]$ $p(t_a) = 1$. В работе [8] дана более корректная формулировка, в которой отсутствие отказа до момента времени t_a определено с некоторой вероятностью $p(t_a)$.

Выражение (4) в соответствии с [6] получено из следующих соображений. Событие A определяет безотказную работу агрегата за время $[0; t_a]$, а событие B – безотказную работу за $[0; t_b]$. Тогда вероятность совместного события $A \cdot B$ имеет вид

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B / A), \quad (5)$$

т. е. равна произведению вероятности события A на условную вероятность события B при условии, что A произошло. В связи с этим в [6] принято, что событие A поглощается событием B (т. е. если произошло событие B, то произошло и событие A). Следовательно, вместо (5) можно записать:

$$p(B) = p(A) \cdot p(B / A). \quad (6)$$

Переходя от событий ко времени t_a и t_b, получим

$$p(t_b) = p(t_a) \cdot p(t_b / t_a), \quad (7)$$

отсюда условную вероятность

$$p(t_b / t_a) = \frac{p(t_b)}{p(t_a)}. \quad (8)$$

Некорректность приведенного из [6] рассуждения состоит в том, что события A и B приняты как определяющие безотказную работу за время от 0 до t_a и от 0 до t_b соответственно, но не определено с какими вероятностями. Выражение (6) получено в предположении, что произошло событие B и событие A. В случае если вероятность безотказной работы $p(t_b) \neq 1$, то событие B не обязательно является поглощающим для события A. Но если имели место события безотказной работы при изменении времени от 0 до t_a и от 0 до t_b, то вероятности их реализации $p(B) = p(A) = p(t_b) = p(t_a) = 1$. Тогда, неясно, что обозначают выражения (6)–(8).

Есть еще один аспект этой проблемы. Интегральная функция вероятности безотказной работы агрегата $p(t)$, для которой определяется условная вероятность $p(t_b/t_a)$ строится по результатам испытаний большой группы однотипных агрегатов. Одни из них отказывают при меньших значениях времени, другие – при больших. Время, при котором агрегаты отказывали, определяется только их собственными свойствами. Поэтому на количество и вероятность отказа агрегатов на отрезке $t_a < \tau < t_b$ не может повлиять количество и вероятность отказа агрегатов при $t < t_a$. В этом и состоит условие отсутствия последействия в потоке отказов вследствие независимости событий отказов агрегатов. Выполнение этого условия исключает возможность определения условных вероятностей.

В теории вероятностей [9; 10] вероятность реализации события на отрезке $t_a < \tau < t_b$, например, вероятность отказа определена как приращение интегральной функции на этом отрезке

$$q(\tau) = q(t_b) - q(t_a). \quad (9)$$

Это выражение также определенным образом учитывает условие реализации отказа на отрезке τ, поскольку учитывает возможность отказа при всех $t < t_a$ с вероятностью $q(t_a)$, но без нарушения условия отсутствия последействия.

Поскольку вероятность отказа $q(t) = 1 - p(t)$, перепишем (9) в вероятностях безотказной работы

$$p(\tau) = 1 + p(t_b) - p(t_a). \quad (10)$$

Сравним значения вероятностей безотказной работы на отрезке τ, определенные по выражениям (8) и (10). Поскольку эти выражения справедливы для любых законов распределения вероятностей безотказной работы, для простоты и наглядности примем распределение с равномерной плотностью вероятности, при котором

$$p(t) = 1 - \omega t. \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), найдем уравнение

$$p(\tau) = 1 - \omega\tau = \text{const}, \quad (12)$$

которая не зависит от положения отрезка τ на оси времени t.

Применив (11) к (8), получим выражение

$$p(t_b / t_a) = p(\tau) = \frac{1 - \omega(t_a + \tau)}{1 - \omega t_a}. \quad (13)$$

Характер изменения $p(t_b / t_a)$ для $\omega = 0{,}1$ и $\tau = 1$ показан на рис. 3. Отсюда следует, что условная вероятность безотказной работы на отрезке t фиксированной длины существенно нелинейна, что, при постоянной плотности вероятности отказа, представляется не оправданным.

В традиционной теории надежности особое значение отводится условной плотности вероятности отказов, которая определяется как плотность вероятности отказа в

моменты времени $t \geq t_1$, при условии, что до момента t_1 отказа не было.

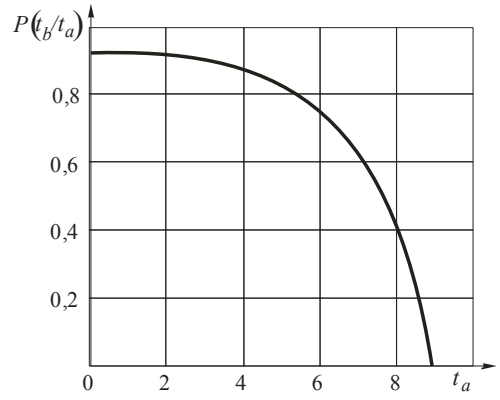

Рис. 3. Зависимость условной вероятности отказа от координаты начала участка t_a при $\omega = 0{,}1$ и $\tau = 1$

Рассмотрим рассуждения, определяющие правомерность условной плотности вероятности отказа, приведенные в [6]. Предполагается, что агрегат проработал время t_1 и в момент времени t_1 остался работоспособным, т. е. отказа нет (рис. 4).

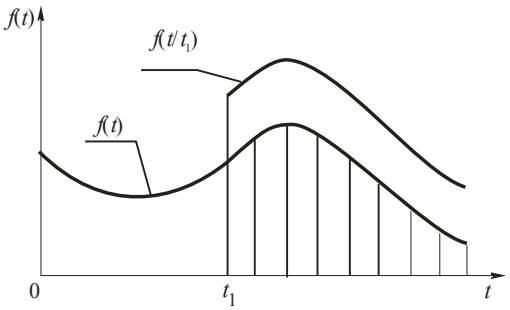

Рис. 4. Плотность вероятности и условная плотность вероятности отказа агрегата

За оставшееся время $t > t_1$ агрегат должен отказать, т. е. отказать с вероятностью равной единице. Следовательно, площадь под кривой плотности вероятности $f(t)$, расположенная правее t_1, численно должна быть равна единице. Чтобы выполнялось это условие, все ординаты плотности $f(t)$, лежащие правее t_1, авторами предложено разделить на нормирующее число, равное значению площади $f(t)$ на интервале от t_1 до ∞, т. е. само на себя. Поскольку

$$\int_{t_1}^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_{0}^{t_1} f(t)\,dt = 1 - q(t_1) = p(t_1), \qquad (14)$$

то

$$f(t/t_1) = \frac{f(t)}{p(t_1)}. \qquad (15)$$

Против такой формы определения условной плотности вероятности следует высказать ряд возражений:

– во-первых, рассматривается вероятностная задача (в вероятностной трактовке) и в ней по определяющей функции (вероятности отказа) вносится детерминистическая трактовка. Предполагается, что при всех $t < t_1$, отказа не было с вероятностью, равной единице, а положение t_1 на оси времени никак не ограничено;

– во-вторых, плотность вероятности отказа для отдельного агрегата определяется из статистики испытаний большой группы таких агрегатов и является распределением, ординаты которого определены из опыта и не подлежат изменению даже при необходимости формирования условной плотности;

– в-третьих, как и при определении условной вероятности безотказной работы проигнорирован принцип отсутствия последействия;

– в-четвертых, в теории вероятностей [9] определение условных вероятностей и условных плотностей вероятностей предусматривает наличие системы двух зависимых случайных величин.

В рассматриваемом случае случайная величина одна – вероятность безотказной работы. Вероятность отказа – величина противоположная ей.

При построении условной плотности вероятности в соответствии с рассмотренной процедурой предлагается ординаты правее точки t_1 увеличить, используя нормирующий множитель, определенный при условии, что до точки t_1 отказов не было. Но экспериментально построенная плотность вероятности содержит статистическую информацию о том, что до точки t_1 отказы были.

Возникает вопрос: на каком основании экспериментально построенная плотность вероятности подвергается трансформации, при которой до точки t_1 ее ординаты приравниваются к 0, а после t_1 – увеличиваются посредством нормирующего множителя? Для теории надежности этот вопрос чрезвычайно важен, поскольку ответ на него характеризует правомерность определения интенсивности отказов $\lambda(t)$ и последующего построения математической модели вероятности безотказной работы агрегатов в виде экспоненциального распределения.

В работах по надежности [6–8] интенсивность отказов $\lambda(t)$ определяется как мгновенная условная плотность вероятности отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)}. \qquad (16)$$

Здесь плотность вероятности отказов $f(t)$ при каждом текущем значении t умножается на тот же, что и в выражении (13), нормирующий множитель $1/p(t)$, определенный на рассматриваемый момент времени, а ограничения на вид распределения $p(t)$ не наложены.

При стационарном пуассоновском потоке отказов математическое ожидание числа отказов в единицу времени w остается постоянным, а при использовании распределения с равномерной плотностью вероятности, когда $q(t) = \omega \cdot t$, $f(t) = q'(t)$, численно равно ω, тогда

$$\lambda(t) = \frac{\omega}{1 - \omega t}. \qquad (17)$$

Из (17) очевидно, что при стационарном потоке отказов $\lambda(t)$ не является постоянной величиной и не может быть равна w. Вместе с этим в [8] отмечается, что простой способ определения постоянной интенсивности отказов λ заключается в поддержании постоянным числа агрегатов в процессе испытаний, путем замены отказавших. Но эта процедура испытаний известна как план испытаний восстанавливаемых агрегатов, при котором определяется параметр потока отказов ω, использованный нами в выражении (17).

Кроме того, в [8] отмечается, что в случае, когда отказы происходят в случайные моменты времени, и среднее

число отказов на равных отрезках времени не зависит от их положения на оси времени, надежность устройства определяется хорошо известной экспоненциальной зависимостью (1). Это утверждение исключает возможность определения условной плотности вероятности в виде выражения (15) и (16), из которых экспоненциальное распределение и получено. Вместе с этим, независимость числа отказов от положения отрезка на оси времени указывает на тот факт, что отказы распределены с равномерной плотностью вероятности.

Смысловое содержание таких определений, как интегральная функция вероятности отказа $q(t)$, плотность вероятности отказа $f(t)$, параметр потока отказов w, вполне понятно. Каков смысл понятия интенсивности отказов $\lambda(t)$? Для чего понадобилось увеличивать в $1/p(t)$ раз значения плотности вероятностей отказов $f(t)$, полученные из статистических материалов?

Из выражения (16) после замены в нем $f(t)$ на $dp(t)/dt$, разделения переменных и интегрирования, получают показательное распределение вероятности безотказной работы:

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}. \qquad (18)$$

Предполагается, что в случае стационарного процесса $\lambda = \text{const}$, выражение (18) приобретает вид экспоненциального распределения

$$p(t) = e^{-\lambda t}. \qquad (19)$$

Поскольку в исходном выражении (16) ограничения на вид функций $f(t)$ и $p(t)$ не наложены, то при произвольных законах распределения $f(t)$ и $p(t)$ интенсивность $\lambda(t)$ постоянной быть не может.

Выражение (16) обращается в тождество $\lambda(t) = 1$ только при подстановке $p(t)$ в виде (19) и $f(t)$ в виде производной от нее. Но это и естественно, поскольку (19) получено из выражения (16).

При замене в (18) $\lambda(t)$ на (16) и использовании в (16) распределения с равномерной плотностью вероятности, найдем

$$p(t) = e^{-\int_0^t \frac{\omega}{1-\omega\tau}d\tau}. \qquad (20)$$

Результаты расчета $p(t)$, выполненные по выражению (20), показанные пунктирной линией *2*, и по интегральной функции вероятности безотказной работы, соответствующей распределению с равномерной плотностью $p(t) = 1 - \omega t$, при $\omega = 0{,}1$, приведены на рис. 5. Расхождения результатов очевидны.

Приведенные рассуждения дают основания для сомнений как в правомерности построения экспоненциальной модели надежности агрегатов, так и в возможности ее использования в расчетах надежности, а также убеждают в неправомерности использования условных вероятностей и условных плотностей в математических моделях надежности агрегатов.

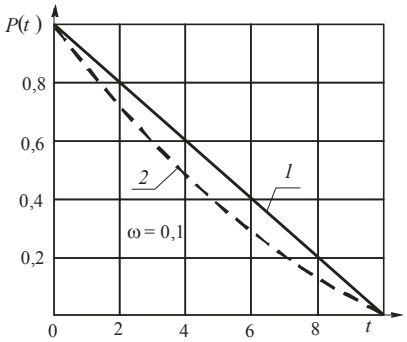

Рис. 5. Зависимость вероятности отказа определенной по выражению: *1* – $p(t) = 1 - \omega t$; *2* – $p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}$

Библиографические ссылки

1. ГОСТ 27.503–87. Надежность в технике. Система сбора и обработки информации. Методы оценки показателей надежности. М. : Изд-во стандартов, 1987.

2. Анализ влияния надежности авиационной техники на безопасности полетов за 2006 г. Минтранс России. М., 2006.

3. АП-25. Авиационные правила. Нормы летной годности самолетов. М. : МАК, 1994.

4. Бойко О. Г. Анализ традиционного и разработка альтернативного методологического подхода к расчету надежности сложных систем // Наука и технологии. Итоги диссертационных исследований. Т. 1. Избранные труды Российской школы. М. : РАН, 2009. С. 226–236.

5. Бойко О. Г., Шаймарданов Л. Г. Математические модели и методы расчета надежности сложных систем // Вопросы современной науки и практики. Журнал университета им. В. И. Вернадского. Вып. 8(22). Тамбов, 2009. С. 64–72.

6. Воробьев В. Г., Константинов В. Г. Надежность и эффективность авиационного оборудования. М. : Транспорт, 1995.

7. Сугак Е. В., Василенко Н. В., Назаров Г. Г. Надежность технических систем. Красноярск : МПГ «Раско». 2001.

8. Базовский И. Надежность. Теория и практика : пер. с англ. М. : Мир, 1965.

9. Венцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М. : Наука, 1988.

10. Венцель Е. С. Теория вероятности. М. : Физмат, 1962.

O. G. Boyko

ABOUT LEGITIMACY OF USAGE OF AGREED PROBABILITIES OF FAILURE-FREE WORK AND AGREED BREAKDOWNS PROBABILITIES DENSITIES IN AGGREGATES RELIABILITY MATHEMATICAL MODELS

The procedures of determination of conditional probabilities of failure-free work, breakdowns conditional probabilities densities and legitimacy of their usage in aggregates reliability mathematical models are discussed in the article.

Keywords: probability, agreed probability, conditional probability density, aggregate, mathematical model.

© Бойко О. Г., 2010