

12. Рандерс Й., Медоуз Д. Пределы роста. 30 лет спустя. М. : Академкнига, 2008.

13. Solte D. Weltfinanzsystem am Limit – Einblicke in den «Heiligen Gral» der «Globalisierung»). Berlin : Terra Media Verlag, 2007.

14. Радермахер Ф. Баланс или разрушение. Эко-социальная рыночная экономика как ключ к устойчивому развитию мира / Некоммерческое партнерство «За устойчивое информационное общество в России». Новосибирск, 2008.

A. V. Medvedev, P. N. Pobedash, E. S. Semenkin

MATHEMATICAL MODEL OF THE WORLDWIDE SOCIOECONOMIC DEVELOPMENT

A mathematical model of the worldwide socioeconomic development, based on the optimization approach, is suggested and analyzed in this article. The model takes into consideration the interests of producing, consuming, finance and control sectors of the worldwide socioeconomic system. The authors' conception is opposed with the other authors' approaches, and conditions which ease mathematic modeling of worldwide advancement are considered.

Keywords: world socioeconomic development, mathematical modeling, optimal control problem, worldwide socioeconomic system, multicriteria multistage linear programming problem.

© Медведев А. В., Победаш П. Н., Семенкин Е. С., 2010

УДК 539.3

Н. В. Молокова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕФТЕЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Приведено построение и исследование математической модели двухфазной фильтрации, учитывающей движение углеводородных загрязнителей и воздуха в пористом грунте. Модель включает в себя систему уравнений в частных производных с дополнительными условиями. В число дифференциальных уравнений входит уравнение баланса массы в элементе пористой среды – уравнение неразрывности, а также дифференциальные уравнения движения. Для замыкания системы вводятся уравнения состояния рассматриваемого загрязнителя и среды. Начальные и граничные условия соответствуют фильтрационному процессу, начиная с поверхности грунта и начальной стадии разлива загрязнителя. Проводится сравнительный анализ результатов математического моделирования с экспериментами.

Ключевые слова: модель двухфазной фильтрации, геофильтрация, нефтезагрязнение, пористая среда, математическое моделирование.

Методы исследования проблем экологической безопасности при нефтяном загрязнении в настоящее время быстро развиваются, складываясь в новое научное направление – *нефтеэкологию*. Основой для выявления нефтеэкологической ситуации и выработки мероприятий по предупреждению и ликвидации нефтяного загрязнения является проведение комплексного мониторинга и детальной экспертизы нефтезагрязненных земель, унификация ряда параметров и методов, обеспечивающих очистку почв от нефтяного загрязнения, в том числе и построение компьютерных математических моделей для определения динамики распространения углеводородного загрязнения [1].

Создаются и исследуются геофильтрационные модели средствами математического моделирования. Использование теории фильтрации в сочетании с современными математическими методами и вычислительными машинами позволяет значительно сократить сроки перехода от лабораторных установок непосредственно к эффективному применению технологии экологической реабилитации.

Постановка задачи. Проблема исследования процессов миграции углеводородов, фильтрующихся с поверхности земли, является очень сложной и до сих пор остается областью активных научных исследований. В связи с этим объектом исследования является процесс нефтезагрязнения почвы в результате аварийных утечек и разливов, а предметом – прикладные аспекты моделирования фильтрации жидких углеводородов в пористой среде.

Цель исследования заключается в построении математической модели процесса нефтезагрязнения пористых сред, изучении на ее основе динамики распространения углеводородов с учетом действующих факторов, объединении разработанных методик и математической модели в программный комплекс.

Настоящее исследование основано на *гипотезе* сплошной среды. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Анализ проблемы исследования в научной отечественной и зарубежной литературе, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей дан-

ного объекта, сравнительный анализ методов исследования. Формирование модели предметной области.

2. Построение математической модели для оценки интенсивности и характера пространственно-временного распределения нефтепродуктов в почвенных средах. Модель должна быть адекватной естественным условиям.

3. Решение геофильтрационной задачи и проведение сравнительного анализа численных результатов с экспериментальными данными.

4. Создание программного комплекса; программы должны быть достаточно просты для их эффективного использования, а заложенные в них математические модели должны допускать дальнейшее развитие для решения нового круга задач.

Как и в любом методе научного познания в моделировании выделяют экспериментальную и теоретическую части. Исходная информация для обоснования системы основных уравнений модели была получена из анализа экспериментальных данных: 1) анализа механизма загрязнения в хорошо проницаемых и менее проницаемых средах; 2) анализа механизма загрязнения тундровых глеевых почв; 3) определения динамики миграции углеводородов в макрооднородной воздушно-сухой почве [2].

Проведенный анализ экспериментальных данных показал, что, попадая на поверхность земли, жидкие углеводороды начинают просачиваться по порам зоны аэрации, где преобладает вертикальная миграция. Когда нефтепродукты встречают на своем пути менее проницаемый слой, происходит их накопление и растекание в горизонтальном направлении. Процессы миграции углеводородов в почвах определяются их свойствами, параметрами среды и управляются законами теории фильтрации.

Рассмотрим построение модели процесса фильтрации загрязнителей в поровом пространстве и исследование на ее основе интенсивности и характера распределения углеводородного загрязнения с учетом действующих на этот процесс факторов.

При загрязнении нефтью и ее компонентами наблюдается совместная фильтрация несмешивающихся фаз. Область, в которой протекает процесс фильтрации, имеет вид, представленный на рис. 1.



Рис. 1. Реальное представление предметной области

В качестве наиболее используемого и разработанного метода количественного описания фильтрационных процессов в подземной гидромеханике применяется макроскопический метод, в основе которого лежит гипотеза сплошности, законы и методы механики сплошной среды.

Составим список параметров модели, от которых зависит степень и характер загрязнения геосреды. Для этого рассмотрим основные понятия геофильтрации. Под *геофильтрацией* понимают движение жидкости в пористой среде. Пористыми материалами являются многие естественные и искусственные тела: углеродное волокно, никель-алюминиевый сплав, древесина, грунты, горные породы и т. д. Структура этих материалов может быть разнообразной. Характерная особенность всех этих материалов – способность накапливать в себе жидкость и позволять ей двигаться под действием внешних факторов.

Основными свойствами жидких углеводородов являются вязкость μ и плотность ρ . Перечисленные зависимости определяют в лабораторных условиях путем анализа проб жидкого загрязнителя.

Пористая среда характеризуется двумя основными свойствами: пористостью m и проницаемостью k . Пористость (эффективная) определяется соотношением $m = V_n/V$, где V_n – объем сообщающихся пор; V – общий объем пористой среды. Таким образом, пористость – величина безразмерная и находится в пределах 0,1–0,4. Другой макроскопической характеристикой грунта является проницаемость, характеризующая свойство грунта пропускать через себя жидкость. Проницаемость измеряется в единицах площади (м^2). В процессе проникновения загрязнителей в грунт наблюдается многофазная фильтрация. Поэтому для характеристики проницаемости грунтов вводится понятие относительной фазовой проницаемости $k_f(s)$. Величина ее зависит не только от физических свойств пород, но также от степени насыщенности порового пространства жидкостями и газом. При исследовании возникает важный вопрос о том, какую часть пустот занимает каждая компонента. Насыщенность пористой среды определяется как относительная часть объема пустот среды, занятая этой фазой. Отсюда, обозначая насыщенность через s , получаем: $s = V_c/V$, где V_c – объем среды, занятый данной компонентой; V – общий объем пустот среды. Под скоростью фильтрации u понимают объем жидкости, протекающей в единицу времени через единичную площадку пористой среды, перпендикулярно направлению потока. Вектор скорости фильтрации направлен по нормали к той площадке, через которую происходит наибольший расход:

$$u = \frac{Q}{F} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{L},$$

где u – скорость линейной фильтрации; Q – объемный расход жидкости в единицу времени; μ – динамическая вязкость жидкости; F – площадь фильтрации; Δp – внешний перепад давления; L – длина образца пористой среды.

Математическое моделирование, особенно геофильтрационных задач, всегда сопровождается некоторыми допущениями, необходимыми, с практической точки зрения, для того, чтобы сделать задачу разрешимой. Построение модели будем выполнять при следующих предположениях:

1) рассматривается несжимаемая жидкость ($\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) в недеформируемом грунте ($m = \text{const}$, $k = \text{const}$);

2) боковые границы не влияют на процесс фильтрации;

3) в первом приближении рассматривается насыщение почвы только воздухом; давление газа считаем равным атмосферному, а воду капиллярно связанной;

4) сумма насыщенностей всегда равна единице, тогда для двухфазной фильтрации $s_1 + s_2 = 1$, поэтому из двух насыщенностей независима только одна, и вводится обозначение $s \equiv s_1$ – нефтенасыщенность, $s_2 = 1 - s$;

5) при двухфазном течении несмешивающейся жидкости давления в каждой из фаз не равны между собой ($p_1 \neq p_2$), $p_c(s) = p_2 - p_1$, индексы 1, 2 относятся к загрязнителю и газу соответственно.

На основании вышепринятых гипотез, для формализации модели используем известные из нефтегазовой подземной гидромеханики законы и методы механики сплошной среды. Основными уравнениями, описывающими движение жидкости в пористой среде, являются уравнение неразрывности и закон фильтрации Дарси. С учетом пористости закон сохранения массы в пористой среде или уравнение неразрывности в дивергентной форме и декартовой системе координат для однородной жидкости в недеформированном грунте имеет вид

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] = 0, \quad (1)$$

где s – насыщенность пористой среды; m – пористость материала; ρ – плотность; $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ – вектор скорости фильтрации; u_x, u_y, u_z – компоненты вектора фильтрации; x, y, z – координаты; t – время.

Обобщение закона фильтрации (закон Дарси) для трехмерного течения имеет следующий вид:

$$\vec{u} = -k \frac{k(s)}{\mu} (\nabla p - \rho \vec{g}), \quad (2)$$

где k – проницаемость пористой среды; μ – динамическая вязкость; p – давление; ρ – плотность; $k(s)$ – относительная проницаемость; $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения.

Для описания многофазного течения используются законы Дарси в обобщенном виде:

$$\vec{u}_l = -k \frac{k_l(s)}{\mu_l} (\nabla p_l - \rho_l \vec{g}), \quad (3)$$

где k – проницаемость пористой среды; μ_l – динамическая вязкость l -й фазы; p_l – давление l -й фазы; ρ_l – плотность l -й фазы; $k_l(s)$ – относительная фазовая

проницаемость l -й фазы; $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения.

Рассмотрим пространственно-трехмерную постановку задачи геофильтрации, которая является исходной для большинства моделей, используемых в задачах геоэкологии. Движение углеводородного загрязнителя и воздуха с учетом взаимосвязи фильтрационных свойств пород с уровнем и интенсивностью их загрязнения в трехмерной постановке описывается системой уравнений в декартовой системе координат:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho_1 u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_1 u_z)}{\partial z} \right] = 0, \\ m \frac{\partial(1-s)}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho_2 u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_2 u_z)}{\partial z} \right] = 0. \quad (4)$$

В рассматриваемых условиях закон фильтрации (закон Дарси) записывается в следующем виде (индексы 1, 2 относятся к загрязнителю и воздуху):

$$u_1 = -k \frac{k_1(s)}{\mu_1} (\nabla p_1 - \rho_1 \vec{g}), \\ u_2 = -k \frac{k_2(s)}{\mu_2} (\nabla p_2 - \rho_2 \vec{g}). \quad (5)$$

Капиллярное давление определяется соотношением $p_c(s) = p_2 - p_1$.

Ключевым моментом является наличие в выражении (5) двух членов. Первый из них – это фазовое давление p_l . Наличие этого члена означает, что в теории фильтрации загрязнителей в грунте должно учитываться различие фазовых давлений, обусловленное действием капиллярных сил. Другой важный параметр – относительная фазовая проницаемость $k_l(s)$. Функция относительной фазовой проницаемости отражает количественную потерю скорости фазы за счет того, что часть порового пространства занята другой фазой и является экспериментально измеряемой функцией насыщенности вытесняющей фазы. Проницаемость измеряется путем создания в образце одномерного потока и обработки результатов измерений при помощи соответствующей формы закона Дарси. При этом учитывают предельные значения насыщенности вытесняющей фазы s_* и s^* , такие, что при $s \leq s_*$ и $s \geq s^*$ соответствующие фазовые проницаемости $k_l(s)$ обращаются в нуль. Из обобщенного закона Дарси тогда следует, что если $s \leq s_*$, то неподвижна вытесняющая фаза, если же $s \geq s^*$, то неподвижна вытесняемая фаза. При этом s_* называют остаточной нефтенасыщенностью, $(1 - s^*)$ – остаточной газонасыщенностью. При $s \geq s^*$ капиллярными эффектами можно пренебречь. То есть, $k_1(0) = k_2(1) = 0$, $k_1(1) = k_2(0) = 1$. Типичный вид функций относительных фазовых проницаемостей $k_l(s)$ приведен в большинстве литературных источников.

В задачах, представляющих практический интерес, часто удобно пользоваться эмпирическими формулами Вико-Ботсета или Чень-Чжун-Сяна:

$$k_1(s) = \begin{cases} \left(\frac{s-s_*}{s^*} \right)^{\alpha_1}, & s_* < s \leq 1 \\ 0, & 0 \leq s \leq s_*; \end{cases} \quad (6)$$

$$k_2(s) = \begin{cases} \left(\frac{s^*-s}{s^*} \right)^{\alpha_2}, & 0 \leq s < s^* \\ 0, & s^* \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Соотношения (5), задающие связь p_l и $k_l(s)$ с фазовыми насыщенностями s_i , определяют характер модели.

Подставим уравнения (5) в уравнения неразрывности (4). В результате получим следующие:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} \left[k \frac{k_1(s)}{\mu_1} (\nabla p_1 - \rho_1 \vec{g}) \right], \quad (8)$$

$$m \frac{\partial (1-s)}{\partial t} = \operatorname{div} \left[k \frac{k_2(s)}{\mu_2} (\nabla p_2 - \rho_2 \vec{g}) \right], \quad (9)$$

$$p_2 = p_1 + p_c(s), \quad (10)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \text{ при } s \equiv s_1 \text{ значение } s_2 = 1 - s.$$

Уравнения (8) и (9) после ряда преобразований с учетом выражения (10) запишем в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left[k \left(\frac{k_1(s)}{\mu_1} + \frac{k_2(s)}{\mu_2} \right) \nabla p_1 \right] = \\ & = -\operatorname{div} \left[k \frac{k_2(s)}{\mu_2} \nabla p_c(s) \right] + k \frac{\partial k_1(s)}{\mu_1 \partial z} \rho_1 \vec{g} + k \frac{\partial k_2(s)}{\mu_2 \partial z} \rho_2 \vec{g}. \end{aligned} \quad (11)$$

Примем, что отношение вязкости фаз $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ и

$p = p_1$, тогда уравнение (11) перепишем в виде

$$\operatorname{div} \left[(k_1(s) + \mu_0 k_2(s)) \nabla p \right] = -\operatorname{div} [\mu_0 k_2(s) \nabla p_c(s)] + k_1(s) \rho_1 \vec{g} + \mu_0 k_2(s) \rho_2 \vec{g}. \quad (12)$$

Сформулируем постановку задачи, т. е. зададим условия в начальный момент времени и краевые условия на границах исследуемой области.

Начальные условия:

При $t = 0$:

$$s = 1, \quad (x, y, z) \in \Omega_0, \quad (13)$$

$$s = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega \setminus \Omega_0,$$

$$p = 1, \quad (x, y, z) \in \Omega \setminus \Omega_0, \quad p = \rho_1 \vec{g} z + p_{\text{атм}}, \quad (x, y, z) \in \Omega_0.$$

Граничные условия:

Граница с атмосферой (Γ_1): на поверхности контакта с атмосферой имеем условие

$$p = p_{\text{атм}}, \text{ на } \Gamma_1, \quad (14)$$

где $p_{\text{атм}}$ – атмосферное давление.

На границе (Γ_2) между фазами давление нефти определяется соотношением

$$p = p_{\text{атм}} + p_c(s). \quad (15)$$

Непроницаемая граница (Γ_3): жидкость не может проходить через непроницаемую границу, поэтому условие непротекания можно записать в следующем виде:

$$k \frac{k_1(s)}{\mu_1} (\nabla p_1 - \rho_1 \vec{g}) \cdot \vec{n} \Big|_{\Gamma_3} = 0, \quad (16)$$

где $\vec{n}$ – вектор нормали к границе Γ_3 .

Таким образом, математическая модель рассматриваемого процесса составлена из уравнений (5)–(16). Построенная модель, основанная на двухфазной фильтрации в физических переменных с учетом капиллярно-гравитационного взаимодействия, позволяет определить распределение скоростей фильтрации в почве в любой момент времени, распределение давления p_l , насыщенности s_l .

Метод решения. При численном решении приведенной системы уравнений была использована конечно-разностная аппроксимация. В результате дискретизации дифференциальных уравнений с помощью метода конечных разностей непрерывное распределение параметров заменяется дискретным. Чтобы построить разностную схему для исходной задачи, выберем равномерную сетку с шагом h_z по переменной z , с шагом h_x по переменной x , с шагом h_y по переменной y и шагом τ по времени t . Получим сеточную область:

$$\begin{aligned} w_{h,\tau} = \{ & z_{i1} = i_1 h_z \quad (0 \leq i_1 \leq n_z), x_{i2} = i_2 h_x \quad (0 \leq i_2 \leq n_x), \\ & y_{i3} = i_3 h_y \quad (0 \leq i_3 \leq n_y), t_j = j \tau, \quad 0 \leq j \leq n_t \}, \end{aligned}$$

где $n_z = L_1/h_z$; $n_x = L_2/h_x$; $n_y = L_3/h_y$; $n_t = T/\tau$. Заменяем производные во внутренних узлах $w_{h,\tau}$ конечно-разностными отношениями и с учетом представления переменного коэффициента получим разностную схему:

$$m S_i = \left(\lambda_{\alpha}(s) P_{\bar{x}_{\alpha}} - G_{\bar{x}_{\alpha}} \right)_{\hat{x}_{\alpha}}, \quad (17)$$

$$\text{где } \lambda_{\alpha \pm 0,5}(s) = k \left(\frac{s_{i_{\alpha} \pm 1}^{j+1} + s_{i_{\alpha}}^{j+1}}{2} \right).$$

При $s \equiv 1$ фазовая проницаемость $k_2(s)$ обращается в нуль, тогда разностную аппроксимацию уравнения для давления запишем в следующем виде:

$$P_{\bar{x}_{\alpha} \bar{x}_{\alpha}} = 0. \quad (18)$$

При $0 < s < 1$

$$P_{x_{\alpha}}^{j+1} = P_{\text{атм}} + P_c^{j+1}(s^{j+1}); \quad (19)$$

$$s_{i_1 i_2 i_3}^0 = 0, \quad j = 0, \quad i_1 = 0, \dots, n_z - 1;$$

$$i_2 = 0, \dots, n_x - 1; \quad i_3 = 0, \dots, n_y - 1;$$

$$s_{0 i_2 i_3}^j = 1, \quad i_1 = 0; \quad 0 \leq i_2, \quad i_3 = 3;$$

$$s_{i_1 i_2 i_3}^j = 0, \quad i_1 = 0; \quad 3 \leq i_2, \quad i_3 \leq n_{xy} - 1;$$

$$P_{0 i_2 i_3}^j = \rho_1 g, \quad i_1 = 0; \quad 0 \leq i_2, \quad i_3 = 3; \quad P_{0 i_2 i_3}^j = P_{\text{атм}},$$

$$i_1 = 0; \quad 3 \leq i_2, \quad i_3 \leq n_{xy} - 1;$$

$$\frac{s_N^{j+1} - s_N^j}{\tau} = -\frac{2}{h} \lambda_{N-1/2}^j P_N^j - \rho_1 g, \quad j = 1, \dots, n_i - 1.$$

Сформулированная постановка задачи и фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости, где искомыми функциями являются P , S , позволяет привести схему решения.

1. По известным на j -м временном шаге P^j, S^j и краевым условиям для P определяем P^{j+1} из сеточного аналога уравнения (11) с помощью итерационного метода Гаусса–Зейделя.

2. По найденному P^{j+1} , известному S^j и краевым условиям для S^j определяем S^{j+1} из сеточного аналога уравнения (8). Уравнение (8) параболического типа. При этом целесообразно применять итерационные неявные разностные схемы.

3. Тогда по найденному S^{j+1} величина P^{j+1} определяется однозначно. Счет величин на $(n + 1)$ -м шаге окончен, переходим к счету следующего шага и т. д.

Для реализации вычислительного алгоритма была построена компьютерная модель с использованием технологии визуального программирования Borland Delphi. Предлагаемая модель позволяет решать достаточно разнообразные задачи. В рамках проблемы исследования негативного воздействия углеводородного загрязнения на почвенную экосистему наиболее важными задачами являются изучение динамики распространения фронта загрязнения, анализ взаимосвязи фильтрационных свойств различного типа почв с интенсивностью их загрязнения и определение закономерности изменения загрязненной зоны.

Исследования, проводимые с помощью полученной модели и априорной информации. Исследование проводилось поэтапно [3–5]. На *первом этапе* осуществлялось изучение режима полного пропитывания нефтепродуктами пористой среды и выявление взаимосвязи фильтрационных свойств различного типа почв с интенсивностью их загрязнения. В этом случае система уравнений (5)–(16) решалась в предположении независимости решения от горизонтальных координат. То есть исходная трехмерная модель была сведена к одномерной.

При проведении расчетов принято следующее: пористость грунта $m = 0,05–0,4$; проницаемость $k = 1,15 \cdot 10^{-3}–11,5$ мкм²; плотность загрязнителя $\rho_1 = 1$ г/см³; плотность воздуха $\rho_2 = 0,00123$ г/см³; вязкость загрязнителя $\mu_1 = 0,54–0,9$ сПз; высота области фильтрации загрязнителя $L = 1–10$ м; предельные значения насыщенности $s^* = 0,9$; $s_* = 0,1$; насыщенность на верхней границе области $S_0 = 1,0$; ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

По результатам моделирования и проведенным исследованиям можно отметить следующее:

1. Форму фронта определяют кривые $k(s)$ и члены дисперсионного типа. Эти параметры являются экспериментально измеряемыми функциями насыщенности. Тем самым возможность воспроизведения характеристик процесса фильтрации в модели напрямую связана с имеющимися экспериментальными данными.

Как показывают расчеты, гравитация и капиллярное давление существенно влияют на распределение нефтенасыщенности. Увеличение гравитационного параметра ведет к уменьшению s_* , и решения приобретают вид, подобный бегущей ступеньке. Это говорит об увеличении фронтовой насыщенности. С другой стороны, ориентационный эффект снижается, фронт становится более сглаженным.

2. В результате расчетов максимальные скорости фильтрации определены для пород с минимальным содержанием песчаной фракции, а минимальные – для пород с содержанием песчаной фракции, близкой к максимуму. Следовательно, значительное количество нефтепродуктов мигрирует в направлении улучшения фильтрационных параметров почвы, и здесь следует ожидать максимального загрязнения.

Экологическая реабилитация загрязненной зоны – это чрезвычайно сложный процесс. Поэтому прежде чем начать дорогостоящие экскавационные работы, важно определить не только глубину проникновения нефтезагрязнителя, но и установить закономерности изменения зоны нефтяного загрязнения.

В связи с этим *второй этап* исследований посвящен изучению интенсивности и характера пространственно-временного распределения нефтепродуктов. Система уравнений (5)–(16) решалась в предположении фиксированной одной горизонтальной координаты.

Численные результаты (рис. 2), показывают неоднозначный характер распределения нефтепродуктов. В случае, если разрез представлен суглинисто-глинистыми почвами, плановая фильтрация преобладает над вертикальной. Экспериментально установлено, что тяжелые углеводороды закрепляются в верхних слоях суглинистых и глинистых почв. Качественно это объясняется малой пропускной способностью пористой среды. В противном случае, когда разрез представлен менее дисперсными породами, преобладает вертикальная миграция нефтепродуктов.

Результат расчета нефтезагрязнения в хорошо проницаемом песке при наличии капиллярной каймы ($I - I$) представлен на рис. 3. Загрязнитель распространяется почти в вертикальном направлении. Над $I - I$, практически непроницаемой для углеводородов, происходит их накопление. В зоне границы раздела фаз происходит горизонтальное распространение нефти. Объяснением тому является то, что гравитационный напор оказывается сильнее капиллярного противодействия в течение всего наблюдаемого времени.

Результаты сопоставления рассмотренной модели фильтрации с экспериментальными данными [2] позволяют сделать вывод, что построенная модель, основанная на двухфазной фильтрации, адекватна реальному процессу загрязнения. Проведенные исследования показали, что модель описывает при известных фильтрационных свойствах среды динамику распространения различных углеводородных загрязнителей и интенсивность их вертикальной и горизонтальной миграции.

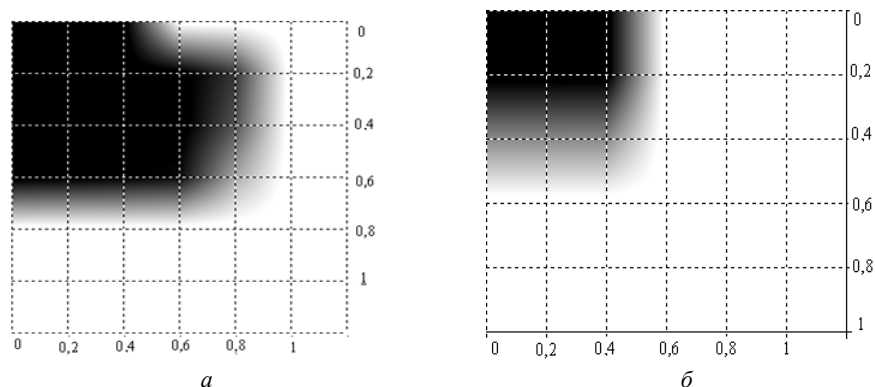


Рис. 2. Распространение нефтезагрязнения в вертикальном разрезе:
 a – суглинок: $m = 0,25$, $k = 10^{-15} \text{ м}^2$; $б$ – песок: $m = 0,25$, $k = 10^{-12} \text{ м}^2$

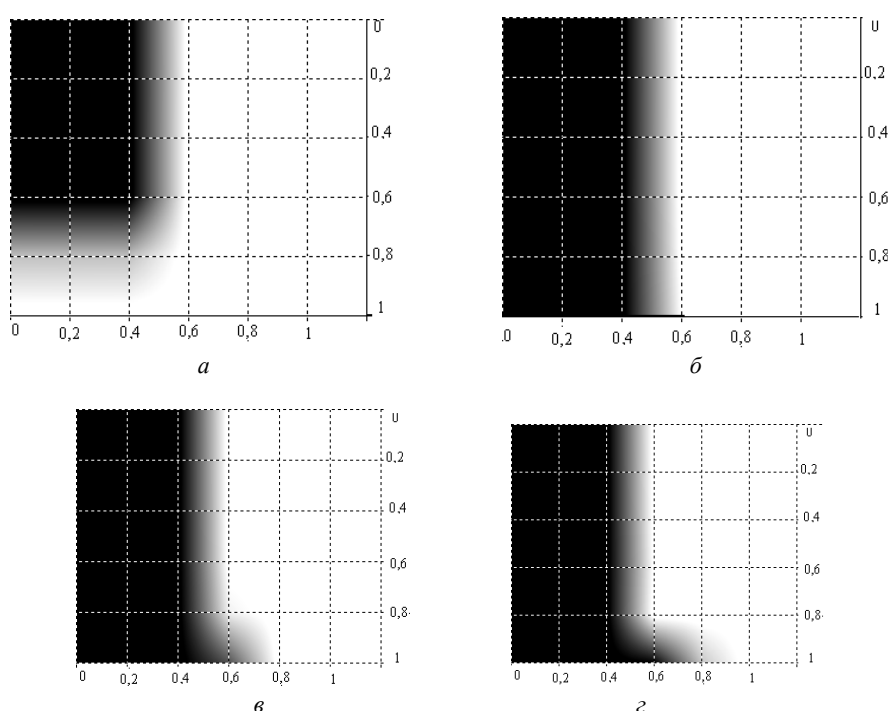


Рис. 3. Распространение нефтезагрязнения в вертикальном разрезе в различное время T (сут):
 a – 3 ч; $б$ – 9 ч; $в$ – 0,75 ч; $г$ – 1,11 ч; $д$ – 1,48 ч; $е$ – 1,85 ч

Разработан программный комплекс, состоящий из трех модулей. Модуль 1 предназначен для анализа интенсивности загрязнения различного типа почв по глубине. Модуль 2 предназначен для определения характера пространственно-временного распределения зоны загрязнения. Мультимедийный модуль 3 предназначен для оценки области и степени загрязнения почвенных сред при фильтрации различных углеводородных загрязнителей в динамическом режиме.

Предложенная модель применима к однородным верхним слоям почвы и может быть использована для прогноза размеров области распространения углеводородов и оценки степени нефтезагрязнения.

В результате выполнения исследования были получены следующие научные и практические результаты:

1. Для решения актуальной задачи предложена проблемно ориентированная трехмерная модель в физических переменных с учетом гравитационно-капиллярного взаимодействия.

2. Представлен эффективный вычислительный алгоритм, учитывающий специфические особенности конкретной математической задачи и позволяющий существенно уменьшить вычислительные затраты при той же точности, что важно в чрезвычайных ситуациях.

3. Разработан специализированный моделирующий программный комплекс для компьютерной реализации модели при различных начально-граничных условиях.

4. Проведено комплексное исследование проблем экологической безопасности при нефтяном загрязне-

нии с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Библиографические ссылки

1. Рогозина Е. А. Актуальные вопросы проблемы очистки нефтезагрязненных почв [Электронный ресурс] // Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2006. № 1. URL: <http://www.ngtp.ru>.
2. Гриценко А. И., Аكوпова Г. С., Максимов В. М. Экология. Нефть и газ. М.: ВНИИЭГазпром, 1995.
3. Молокова, Н. В. Математическое моделирование распространения загрязнения в пористой среде // IV Всесибирский конгресс женщин-математиков: материалы Всерос. конф. Красноярск, 2006. С. 130–138.
4. Молокова, Н. В. Решение геофильтрационных задач средствами математического моделирования // Вестник СибГАУ. Вып. 3 (20). Красноярск, 2008. С. 31–34.
5. Молокова, Н. В. Численное исследование и анализ процесса загрязнения пористой среды // Вестник. Вып. 4 (21). Красноярск, 2008. С. 20–23.

N. V. Molokova

MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES OF OIL POLLUTION OF POROUS ENVIRONMENT

In this article the author presents a two-dimensional model of filtering, taking into account movement of air and hydrocarbon pollutants in porous soil. The model includes a system of partial differential equations with additional conditions. The differential equations include mass balance equation element in a porous medium – inseparability equation, and the differential equations of motion. For circuit system the author puts in the equation of state of pollutant and environment. Initial and boundary conditions correspond to the filtration process, beginning with the ground surface and initial stage of oil products spillage. A comparative analysis of the results of mathematical modeling with experiments is presented.

Keywords: model of biphasic filtration, geofiltration, mathematical modeling, porous environment, oil pollution.

© Молокова Н. В., 2010

УДК 517.977.1

А. Н. Рогалев

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ И ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Описывается применение гарантированных методов, позволяющих получать границы всех возможных фазовых состояний системы, учитывающих все воздействия на управляемую систему. Такие количественные оценки называются границами множеств достижимости. Приводятся примеры расчетов включений множеств достижимости.

Ключевые слова: верхние и нижние границы решений, гарантированные оценки множеств достижимости, постоянно действующие возмущения.

Пусть движение состояний системы y подчиняется следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y; u, v), \quad (1)$$

где t – текущее время; $u = u(t)$ – управляющее воздействие; $v = v(t)$ – неконтролируемое возмущение; $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ – вектор фазовых состояний.

Управляемая система общего вида подвержена действию управляющих и неопределенных факторов. Выбор возможных реализаций управляющих воздействий u стеснен ограничениями $u \in Q$, $t \in [t^0, T]$, отражающими особенности рассматриваемой задачи. Для многих задач ограничения на воздействия могут носить только геометрический характер. Это значит,

что в каждый момент времени $t \in [t^0, T]$ значение $u(t)$ может быть любым из некоторого выпуклого компактного множества Q . В общем случае это множество может быть описано опорной функцией

$$Q = \{u(t) \mid q^T u(t) \leq \delta(q, t), \|q\| = 1, t \in T\}. \quad (2)$$

Опорная функция в каждой конкретной задаче назначается на основе априорной информации о свойствах возмущений, которые могут встречаться в задаче. При независимых ограничениях на модуль каждой составляющей $|u_j(t)| \leq U_j(t)$ множество Q представляет собой параллелепипед с ребрами длины $2U_j$, ориентированными вдоль соответствующих координатных осей в пространстве возмущений. В этом слу-