нии с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Библиографические ссылки

1. Рогозина Е. А. Актуальные вопросы проблемы очистки нефтезагрязненных почв [Электронный ресурс] // Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2006. № 1. URL: http://www.ngtp.ru.

2. Гриценко А. И., Акопова Г. С., Максимов В. М. Экология. Нефть и газ. М. : ВНИИЭГазпром, 1995.

3. Молокова, Н. В. Математическое моделирование распространения загрязнения в пористой среде // IV Всесибирский конгресс женщин-математиков : материалы Всерос. конф. Красноярск, 2006. С. 130–138.

4. Молокова, Н. В. Решение геофильтрационных задач средствами математического моделирования // Вестник СибГАУ. Вып. 3 (20). Красноярск, 2008. С. 31–34.

5. Молокова, Н. В. Численное исследование и анализ процесса загрязнения пористой среды // Вестник. Вып. 4 (21). Красноярск, 2008. С. 20–23.

N. V. Molokova

MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES OF OIL POLLUTION OF POROUS ENVIRONMENT

In this article the author presents a two-dimensional model of filtering, taking into account movement of air and hydrocarbon pollutants in porous soil. The model includes a system of partial differential equations with additional conditions. The differential equations include mass balance equation element in a porous medium – inseparability equation, and the differential equations of motion. For circuit system the author puts in the equation of state of pollutant and environment. Initial and boundary conditions correspond to the filtration process, beginning with the ground surface and initial stage of oil products spillage. A comparative analysis of the results of mathematical modeling with experiments is presented.

Keywords: *model of biphasic filtration, geofiltration, mathematical modeling, porous environment, oil pollution.*

УДК 517.977.1

А. Н. Рогалев

ГАРАНТИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ И ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Описывается применение гарантированных методов, позволяющих получать границы всех возможных фазовых состояний системы, учитывающих все воздействия на управляемую систему. Такие количественные оценки называются границами множеств достижимости. Приводятся примеры расчетов включений множеств достижимости.

Ключевые слова: верхние и нижние границы решений, гарантированные оценки множеств достижимости, постоянно действующие возмущения.

Пусть движение состояний системы *y* подчиняется следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y; u, v), \qquad (1)$$

где t – текущее время; $u = u(t)$ – управляющее воздействие; $v = v(t)$ – неконтролируемое возмущение; $y(t) = \left(y_1(t), ..., y_n(t)\right)$ – вектор фазовых состояний.

Управляемая система общего вида подвержена действию управляющих и неопределенных факторов. Выбор возможных реализаций управляющих воздействий *u* стеснен ограничениями $u \in Q$, $t \in [t^0, T]$, отражающими особенности рассматриваемой задачи. Для многих задач ограничения на воздействия могут носить только геометрический характер. Это значит, что в каждый момент времени $t \in [t^0, T]$ значение $u(t)$ может быть любым из некоторого выпуклого компактного множества Q. В общем случае это множество может быть описано опорной функцией

$$Q = \left\{u(t) \mid \; q^T u(t) \le \delta(q, t), \|q\| = 1, t \in T\right\}. \qquad (2)$$

Опорная функция в каждой конкретной задаче назначается на основе априорной информации о свойствах возмущений, которые могут встречаться в задаче. При независимых ограничениях на модуль каждой составляющей $\left|u_j(t)\right| \le U_j(t)$ множество Q представляет собой параллелепипед с ребрами длины $2U_j$, ориентированными вдоль соответствующих координатных осей в пространстве возмущений. В этом случае опорная функция $\delta(q,t)$ задается своими значениями в n точках: $\delta(q^j,t)=\nu_j$, $j=1,2,...,n$. Кроме того, многие управляемые системы невозможно описать с допустимой точностью системой дифференциальных уравнений с точно заданными коэффициентами [1–3]. Это зависит от влияния многих факторов: внешних возмущающих сил, неконтролируемых вариаций параметров, ошибок в определении начальных условий. Во многих случаях вероятностные (стохастические) характеристики не могут эффективно описать поведение управляемой системы [1–3]. Это значит, что ограничения на неконтролируемые возмущения также могут носить только геометрический характер $\nu \in \Delta, t \in [t^0, T]$.

Задача гарантированного оценивания состоит в определении множества (или его границ):

$$Y(t) = \bigcup_{y^0 \in Y^0,\, u \in Q,\, \nu \in \Delta} y(t, t^0, y^0, u, \nu). \qquad (3)$$

Среди математических описаний подобных задач, основанных на оценке множеств достижимости, мы выделим задачи проверки гарантированных условий безопасности и задачи построения «выживающих» траекторий.

Множеством достижимости $Y^*(t)$ в момент времени t [1; 2] называется множество всех точек из фазового пространства, в которые можно перейти на отрезке времени $[t^0, T]$ из всех возможных точек начального множества фазовых состояний M^0 по решениям системы (1) с начальным условием $y(t^0) \in M^0$ и с допустимым управлением $u(t)$. Если известно, что в начальный момент времени s всевозможные векторы состояний системы образуют некоторое множество M, то говорят об области достижимости $D(t,s;M)$ системы, исходя из множества M в момент s. Область достижимости, вообще говоря, зависит от реализации неконтролируемых возмущений. Понятие области достижимости предоставляет удобный язык, на котором могут быть описаны различные конкретные задачи теории управления. Кратко перечислим их.

Оценка достижимости. Если известны области достижимости $D(t,s;M)$, то можно легко оценить возможности управления. Рассмотрим задачу о приведении управляемой системы на заданное терминальное множество N в момент времени T. Ясно, что решение этой задачи эквивалентно выяснению того, пересекается ли терминальное многообразие N с множеством достижимости $D(t,s;M)$.

Управляемость. Рассмотрим множество $\Delta(s,M)$ – объединение областей достижимости $D(T,s;M)$ для всех моментов времени $T \geq s$. Если множество $\Delta(s,M)$ совпадает со всем пространством состояний системы, то такая система называется вполне управляемой. Выяснение того, управляема ли данная динамическая система, является классической задачей управления.

Оценка возмущений и практическая устойчивость. Рассмотрим случай неуправляемой системы. Это означает, что в уравнении (1) мы вводим параметр возмущений v, подчиненный геометрическим ограничениям, считаем его управляющим, тем самым полагаем, что возмущения отсутствуют. Тогда области достижимости приобретают смысл тех множеств, куда система может попасть под действием допустимых возмущений. Тем самым области достижимости характеризуют отклонения траекторий под действием возмущений или точность, с которой можно предсказать движение возмущаемой системы.

Задача управления с терминальным функционалом. Требуется найти допустимое управление $u(t)$ и начальный вектор из множества M, такие, что при этом достигается минимум терминального функционала, т. е. функционала вида $J = F(y(t))$, где F – заданная функция; T – заданный момент времени. Ясно, что сформулированная задача эквивалентна задаче минимизации функции F на области достижимости $D(T,s;M)$. Тем самым, знание областей достижимости позволяет свести сложную задачу оптимального управления к сравнительно более простой задаче нелинейного программирования.

Таким образом, полезность областей достижимости становится очевидной.

Существует несколько подходов к разработке методов построения и аппроксимации множеств достижимости. Однако получить надежную оценку множеств достижимости управляемых систем с нелинейной правой частью удается не всегда. Особенно это имеет место для задач с правыми частями, в которые входят управляющие воздействия произвольным образом, не только как аддитивный член. Поэтому описание этого нового подхода для использования в задачах оценки множеств достижимости может прояснить это направление и помочь специалистам в управлении. Используемые в данной работе термины «гарантированные методы», а также «гарантированные границы решений» использовались в задачах численного решения дифференциальных уравнений с неточно заданными данными. Они являются устоявшимися названиями в задачах гарантированного оценивания множеств достижимости, в задачах гарантированного поиска управляемых объектов.

Весьма часто рассматриваются те классы управляемых систем, для которых возможно выписать формулы решений и, следовательно, анализировать их верхние и нижние границы. Был разработан также метод эллипсоидов, суммирующий эллипсоиды неопределенности, включающие все решения управляемой системы ОДУ [2]. При этом в методе эллипсоидов строятся дифференциальные уравнения, которые описывают поведение центров и радиусов этих эллипсоидов [2; 4]. Методика сложения эллипсоидов дополняется решением этих дифференциальных уравнений. Анализ получаемых результатов сильно зависит от знания свойств управляемых систем, так как переход к дифференциальным уравнениям эволюции эллипсоидов основан на бесконечно малых отклонениях, что не всегда строго соответствует реальным задачам.

Описание метода. В статье строятся включения области достижимости управляемых систем. Эти области определяются с помощью гарантированного метода оценивания множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе символьных формул для аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории [5–13]. Пусть в системе (1) f – непрерывно дифференцируемая функция по t ($f(t) \in C^1$), множество U компактно R^m, допустимые управления – это измеримые функции $u(t) \in U, t \in [s,T]$. Полагаем следующее: а) существует равномерная оценка $|y(t)| < b$ для всех решений системы (1) на интервале $t \in [s,T]$, где $b = \text{const} > 0$; б) множество $Y(y,t) = f(t,y,U)$ для всех y, $t \in [s,T]$ компактно и выпукло.

Тогда измеримое множество $D(t,s,M)$ управляемой системы (1) является компактным множеством $t \in [s,T]$.

Вообще говоря, возможные величины векторов управлений и возмущений (допустимых управлений и возмущений) могут быть сложным образом связаны с движением динамической системы. Например, часто рассматривают интегральные ограничения на управления или возмущения вида

$$\int_s^T \varphi(t,y,u,v)dt \le Q,$$

где $\varphi(t,y,u,v)$ – заданная функция; s, T – начальный и конечный момент времени движения; Q – имеет смысл предельной величины некоторого ресурса. В данной работе мы будем рассматривать лишь случай геометрических ограничений, имеющих вид

$$u \in U(t,y), v \in V(t,y).$$

Таким образом, возможные значения векторов управлений и возмущений полностью определяются текущим моментом времени и состоянием системы.

Такая ситуация, естественно, приводит к удобной переформулировке закона движения рассматриваемой динамической системы. Рассмотрим множество $F(t,y,v)$ значений вектор-функции f при всевозможных векторах управления $u \in U(t,y)$. Тогда уравнение движения (1) переписывается в виде дифференциального включения

$$\frac{dy}{dt} \in F(t,y,v),$$

где в правую часть помимо времени и фазового состояния входят неконтролируемые возмущения. Общее понятие дифференциального включения [1; 2; 14] определяется заданием для каждого момента времени и состояния системы некоторого множества, которое может также зависеть и от других параметров (в нашем случае – неконтролируемых возмущений). Это множество называется правой частью или индикатрисой дифференциального включения. После этого можно определить решение дифференциального включения как такую траекторию в пространстве состояний (фазовую траекторию), что вектор скорости в каждый момент лежит внутри индикатрисы. Решение дифференциального включения называют также допустимой траекторией. Таким образом, исследование динамических систем рассматриваемого класса сводится к изучению допустимых траекторий дифференциальных включений.

Построение оценок множеств достижимости. Включение множеств достижимости строится с помощью гарантированного метода, основанного на символьной формуле оператора сдвига вдоль траектории и вычислении множеств значений этой формулы по всем множествам управления и управляющим воздействиям [5–13].

Символьная формула (аналитическое выражение) – это запись символьной формы, включающей знаки операций, имена функций и констант, вычисление по которой позволяет получить значение решения.

Пусть K_i – это последовательность нормированных пространств, зависящая от некоторого параметра $u \in U$. Пусть $Y^i, i = 1,...,n-1$ – последовательность символьных формул непрерывных операций F^i, определенных на прямом произведении $K_1 \cdot K_2 \cdots K_n$, отображающих произведение этих пространств в пространство K_{n+1} и устанавливающих зависимость между значениями решений в каждой точке области определения. Тогда результат последовательного исполнения преобразования формул

$$\begin{gathered} Y^1 = F^1(t^0, t^1, Y^0, Y^1) = S^1(Y^0), \\ Y^2 = F^2(t^0, t^1, t^2, Y^0, Y^1, Y^2) = S^2(Y^0) \circ S^1(Y^0), \\ Y^i = F^i(t^0, \ldots, t^i, Y^0, Y^1, \ldots, Y^i) = \\ = S^i(Y^0) \circ \ldots \circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y^m = F^m(t^0, \ldots, t^m, Y^0, Y^1, \ldots Y^m) = \\ = S^m(Y^0) \circ \ldots \circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i) \end{gathered} \tag{4}$$

будет называться символьной формулой метода сдвига вдоль траектории (опорной траекторией).

Приведем простые примеры подобных символьных формул:

$$\begin{gathered} y^m = y^{m-1} + \varphi(h, y^{m-1}), \\ y^m = y^{m-1} + \varphi(h, y^m, y^{m-1}). \end{gathered}$$

Поскольку управление – это измеримая функция, то метод рядов Тейлора не применим для вычисления опорной траектории.

Выполнение гарантированного метода состоит из следующих этапов:

1. Начало работы алгоритма – присвоение значений переменным, идентифицирующим систему: размерность, правая часть, начальные данные.

2. Построение композиции символьных формул как векторной функции с символьными компонентами $s(t^k)$, зависящими от символьных начальных данных $y_1^0, ..., y_n^0$. Каждая компонента символьного вектора определяется заново как функция, зависящая от символьных начальных данных values $y_1^0, ..., y_n^0$ в каждой точке сетки t^k. Эта формула описывает сдвиг вдоль траектории приближенного решения, сходящегося к решению системы. Сдвиг вдоль траектории задан построенной символьной формулой решений.

3. Последовательное исполнение метода хранения и переработки символьной информации при продвижении вдоль траектории решений производится на основе статичного хранения этой информации, работы с адресацией памяти с помощью функций поточной обработки.

4. Символьная формула приближенного решения преобразуется к виду, который позволяет эффективно и быстро вычислять оценки областей значений приближенных решений, соответствующие изменениям параметров задачи. Для этого используется кусочно-полиномиальное представление символьных формул и опорные функции для многозначных функций, описывающих области значений.

5. Символьная формула (вектор с символьными компонентами) используется для нахождения экстремальных значений (максимального и минимального) области значений решений.

6. Оценки глобальной ошибки строятся на основе теорем о неподвижной точке в виде алгоритмов гомотопии. Этот алгоритм состоит в поиске «серых» симплексов согласно алгоритму Ивза [15] и их модификаций к многозначным функциям. В алгоритме определяются *2n* функций, являющихся границами множеств точных решений. Построенные для этих функций графики образуют граничные гиперплоскости множеств решений управляемых систем.

7. Нижняя граница вектора глобальной ошибки (вектора глобальной ошибки, состоящего из 2*n* компонент) определяется путем накапливания локальных ошибок вдоль траектории точного решения. Аналогично вычисляется нижняя граница глобальной ошибки в каждой точке t^k. В итоге выполняются два независимых процесса: построение символьных формул решений и накапливание величин локальной ошибки вдоль траектории решения.

8. Граница глобальной ошибки прибавляется к вычисленным на шаге 5 границам вектора решений, происходит объединение этих множеств. Все вычисления числовых значений границ решений отложены на самый последний этап исполнения алгоритма. При вычислениях применяется арифметика с направленными округлениями. При вычислении границ множества решений используется тот факт, что построенные символьные формулы решений – это кусочно-гладкие полиномиальные функции, зависящие от $y_1^0, ..., y_n^0$.

Множество приближенных решений будет выпуклым в силу свойств полиномиальных функций и их вариаций. Это множество будет также компактным. Выполнение преобразований символьных формул – это первый этап гарантированного метода оценивания множеств достижимости. Его можно было бы реализовать, используя одну из многих систем аналитических преобразований. Однако при этом катастрофически быстро растет объем получаемых символьных формул. Это означает, что прямые расчеты по этим формулам неэкономичны, особенно при использовании их в циклах.

Кроме того, компьютерная система символьных преобразований производит вычисления с длинными по разрядности числами, что приводит к большим затратам памяти. Поэтому для выполнения гарантированного метода вначале организуется процесс хранения и преобразования символьных формул, чтобы организовать вычисление границ экономным образом на финальном этапе метода. Символьные формулы будут представлены как рекурсивные структуры, величина которых растет. Для записи такой формулы в компьютере используются линейные динамические структуры.

Преобразование и вычисление по этим формулам выполняется без явного выписывания компонент композиции этих формул на каждом шаге. Передача компонент от шага к шагу выполняется с использованием операций с адресами в памяти, хранящимися в стеке. Генерация кода для вычисления по символьным формулам организуется путем обхода по дереву, начиная с вершин дерева.

Примеры применения. Рассмотрим управляемую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= 2y_2 + y_4, \\ \frac{dy_2}{dt} &= 2y_1 + y_3 + u(t), \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_2 + 10y_4, \\ \frac{dy_4}{dt} &= 2y_1 - 2y_3 + u_2(t). \end{aligned} \tag{5}$$

На возмущение $u(t)$ в системе (5) наложено ограничение $|u| \le 1$. Начальные условия подчинены ограничению $\max_i |y_i(t^0)| \le 1$. В [2], где рассматривается эта система, показано, что объем эллипсоида, аппроксимирующего множество достижимости, растет очень быстро. Для предотвращения такого катастрофического роста оценок в [2] предложено применять непрерывные наблюдения за фазовым состоянием динамической системы и фильтрацию ошибок наблюдений. При этом объем эллипсоида неопределенности становится меньше, чем в методе без наблюдений [2].

Применение метода гарантированного оценивания позволяет получить хорошие результаты оценки множества достижимости без применения дополнительных измерений и фильтрации ошибок измерений (рис. 1, 2).

Рис. 1

Рис. 2

Оценим множество достижимости простейшей модели движения объекта на горизонтальной плоскости, описываемой нелинейной системой третьего порядка:

$$\frac{dy_1}{dt} = V\cos\varphi,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = V\sin\varphi, \qquad (6)$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k}{V}u, |u| \le 1,$$
$$V = \text{const}, k = \text{const} > 0,$$

где y_1, y_2 – координаты объекта, отождествляемого с точкой на плоскости; φ – угол между вектором скорости объекта и осью x; u – управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению и характеризующий скорость изменения угла φ; k – максимальное боковое ускорение; V – величина скорости, $\alpha = \frac{k}{V}$. Неравенство (6) ограничивает радиус кривизны траектории объекта, а именно, радиус кривизны не может больше единицы. Рассматриваемая система использовалась Р. Айзексом при постановке задачи «шофер-убийца» [16]. Слова «автомобиль», «пешеход», «шофер-убийца» оказались на редкость удачными, хотя в качестве реальных объектов Р. Айзекс подразумевал управляемую торпеду и увертывающийся от нее небольшой катер. Состояние $z_0 = (y_1(t_0), y_2(t_0), \varphi(t_0))$ объекта в начальный момент времени предполагается заданным. Без ограничения общности имеем $y_1(t_0) = y_2(t_0) = \varphi(t_0) = 0$.

Система (6) функционирует на конечном достаточно большом промежутке времени $T = [0, t^*]$. В качестве множества допустимых управлений выберем множество U всех измеримых по Борелю функций $U : T \to [-1, 1]$. Каждое управление $u \in U$ порождает движение, исходящее из начальной позиции, которое будем обозначать через

$$\left(y_{1_u}, y_{2_u}, \varphi_u\right) = \left(\left(y_{1_u}(t), y_{2_u}(t), \varphi_u(t)\right), t \in T\right).$$

В силу стационарности системы (6) выбор начального момента времени не существенен. Кроме того, специфика системы (6) такова, что начальное состояние влияет на множество достижимости лишь с точностью до поворота и переноса. Множество достижимости $G(T)$ в момент времени $T \ge 0$ есть совокупность всех точек фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (6) в момент времени $T \ge 0$ при помощи некоторого допустимого управления на промежутке $T = [0, t^*]$ из начальной точки z_0. Из общих результатов математической теории управления следует, что множество $G(T)$ замкнуто и ограниченно. Совмещая начало относительной системы координат с движущимся объектом и направляя ось y по вектору его скорости, перейдем к системе

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2 u + v_x,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 u - 1 + v_y, \qquad (7)$$
$$|u| \le 1, v = (v_x, v_y)^T, |v| \le \nu.$$

Для системы (7), используя гарантированный метод, были получены оценки множеств достижимости на моменты времени $t \in [0, 25]$ (рис. 3).

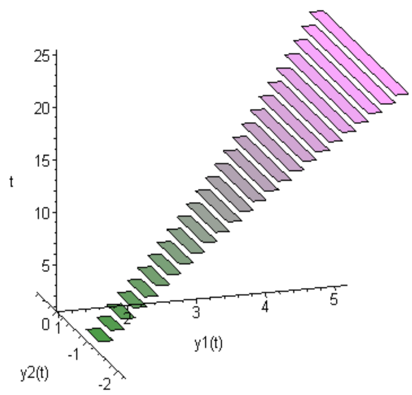

Рис. 3

Вывод, к которому можно прийти, внимательно исследуя проблемы построения гарантированных оценок управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, заключается в необходимости установления связи между начальными значениями и значениями в каждой конкретной точке решения системы. Установление связи достигается на основе аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории. Описанные в этой статье гарантированные методы используют такую аппроксимацию, что позволяет вычислять верхние и нижние границы множеств решения (включения) достаточно широкого класса управляемых систем. При этом для гарантированных оценок можно оценить их близость к множеству точных решений.

Библиографические ссылки

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977.

2. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М. : Наука, 1988.

3. Овсеевич А. И., Шматков А. М. Сравнение вероятностного и гарантированного подходов прогноза фазовых состояний динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 11–16.

4. Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости линейных систем с недоопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. 1996. № 6 (60). С. 940–950.

5. Новиков В. А., Рогалев А. Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики. 1993. № 33(2). С. 219–231.

6. Рогалев А. Н. Исследование практической устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Вычислительные технологии. 2002. № 7(5). С. 148–150.

7. Рогалев А. Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. № 8(5). С. 102–116.

8. Рогалев А. Н. Гарантированные оценки безопасного функционирования технических и электроэнергетических систем // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф : тр. Всерос. конф. с междунар. участием. Красноярск : ИВМ СО РАН. 2003. Т. 3. С. 42–48.

9. Рогалев А. Н. Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычислительные технологии. 2004. 9(1). С. 86–93.

10. Рогалев А. Н. Гарантированные границы решений дифференциальных уравнений // Тихонов и современная математика : Междунар. конф. МГУ им. М. В. Ломоносова ; Рос. акад. наук. М. : ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова. 2006. С. 100–103.

11. Рогалев А. Н. Символьные вычисления в гарантированных методах, выполненные на нескольких процессорах // Вестник НГУ. Сер. Информационные технологии. 2006. № 1 (4). С. 56–62.

12. Рогалев А. Н. Вопросы устойчивости ансамблей дифференциальных уравнений // Вычислительные технологии. 2008. № 3(13). С. 111–117.

13. Rogalyov A. N. Computation of reachable sets guaranteed bounds // Control, Diagnostics, and Automation (ASIT – CDA 2010) : Proc. of the IASTED Inern. Conf. on Automation, Control, and Information Technology / ACTA Press. B6. Calgary. Alberta T3E 709. Canada, 2010. P. 132–139.

14. Булгаков Б. В. Накопление возмущений линейных осциллирующих систем // Доклады Академии наук. 1946. № 51. С. 339–342.

15. Eaves R. Saigal R. Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions // Mathematical Program. 1972. № 3(2). P. 225–237.

16. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М. : Мир, 1967.

A. N. Rogalyov

GUARANTEED ESTIMATIONS AND CONSTRUCTION OF SETS OF ATTAINABILITY FOR NONLINEAR CONTROLLABLE SYSTEMS

In the article the author describes application of the guaranteed methods, allowing to receive bounds of all possible phase state conditions considering all influences on controllable system. Such quantitative estimations are called bounds of sets of attainability. Examples of computations of sets of attainability inclusions are given.

Keywords: the upper and lower bounds of the solutions, the guaranteed estimations of sets of attainability, constantly operating perturbations.