

Если этот алгоритм выдает t , то функция \tilde{f} будет иметь более высокий порядок КИ, нежели f . Известно, что аффинная добавка никак не влияет на порядок КР.

Итак, изложены результаты реализации и исследования двух генераторов частично бент-функций, описаны возможности по улучшению порядков КИ и КР таких функций. Работоспособность алгоритмов проверена на практике, изучены свойства генерируемых функций.

Автор выражает благодарность И. А. Панкратовой и К. В. Сафонову за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Библиографические ссылки

1. Carlet C. Boolean Functions for Cryptography and Error Correcting Codes [Electronic resource] // INRIA. 2010. URL: <http://www-rocq.inria.fr/codes/Claude.Carlet/char-fcts-Bool-corr.pdf>. (дата обращения: 08.06.2010).

2. Токарева Н. Н. Бент-функции: результаты и приложения. Обзор работ // Прикл. дискретная математика. 2009. № 1 (3). С. 15–36.

3. Bent-function [Electronic resource] // Wikipedia. 2010. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Bent_function (дата обращения: 08.06.2010).

4. Zheng Y., Zhang X. M. Plateaued functions // ICICS'99. Lecture Notes in Computer Science. 1999. Vol. 1726. P. 284–300.

5. Carlet C. Partially-bent functions // Design, Codes and Cryptography. 1993. Vol. 3. №. 2. P. 135–145.

6. Токарева Н. Н. Обобщения бент-функций. Обзор работ // Дискрет. анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. № 1. С. 34–64.

7. Агафонова И. В. Криптографические свойства нелинейных булевых функций [Electronic resource] // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию DHA & CAGD. 2007. URL: <http://dha.spb.ru/PDF/cryptoBOOLEAN.pdf> (дата обращения: 08.06.2010).

M. V. Naumov

THE GENERATION OF PARTIALLY-BENT FUNCTIONS

Most important characteristics of cryptographic functions are balancedness, nonlinearity, propagation criterion, correlation immunity, degree and non-existence of nonzero linear structure. Partially-bent functions form super-class of the class of bent functions. These functions may achieve desirable characteristics.

Two algorithms for generation of partially-bent functions were supposed and studied. Second algorithm may improve cryptographic characteristics of generated functions.

Keywords: Boolean functions, partially-bent functions, correlation immunity.

© Наумов М. В., 2010

УДК 519.62

В. А. Нестеров

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ, ПОДАТЛИВОЙ ПРИ ТРАНСВЕРСАЛЬНОМ СДВИГЕ

Рассматривается конечно-элементный модальный расчет пластины с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью. В каждом из четырех узлов прямоугольного конечного элемента пластины в качестве основных кинематических параметров присутствуют углы трансверсального сдвига. На примере анализа собственных колебаний композитной пластины показана актуальность разработанной конечно-элементной модели. Представлены результаты численного исследования влияния граничных условий неклассического вида на величины частот собственных колебаний.

Ключевые слова: пластина, метод конечных элементов, трансверсальный сдвиг, модальный анализ.

Композитные конструкции, обладающие высокой степенью весового совершенства, часто используются в производстве космической техники. Композитные пластины отличаются низкой сдвиговой жесткостью по отношению к трансверсальным напряжениям. Учет указанной особенности при реализации численного расчета приводит к повышению порядка разрешаю-

щих уравнений за счет введения в рассмотрение углов трансверсального сдвига.

Разрешающие уравнения теории метода конечных элементов (МКЭ) для задачи о собственных колебаниях пластины с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью получим вариационным способом. Для этого запишем выражение полной энергии колеблющейся пластины

$$\tilde{E} = \tilde{U} + \tilde{T}, \quad (1)$$

где \tilde{U} – потенциальная энергия деформации; \tilde{T} – кинематическая энергия движения.

Выражение для потенциальной энергии деформации пластины как трехмерного тела имеет вид

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} (\tilde{\sigma}_x \tilde{e}_x + \tilde{\sigma}_y \tilde{e}_y + \tilde{\sigma}_z \tilde{e}_z + \tilde{\tau}_{xy} \tilde{e}_{xy} + \tilde{\tau}_{xz} \tilde{e}_{xz} + \tilde{\tau}_{yz} \tilde{e}_{yz}) dx dy dz, \quad (2)$$

где напряжения и деформации являются функциями координат и времени

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(x, y, z, t); \quad \tilde{e} = \tilde{e}(x, y, z, t), \quad (3)$$

где $\tilde{\sigma}$ – любой параметр из $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\tau}_{xy}, \tilde{\tau}_{yz}, \tilde{\tau}_{xz}$; \tilde{e} – любой параметр из $\tilde{e}_x, \tilde{e}_y, \tilde{e}_z, \tilde{e}_{xy}, \tilde{e}_{yz}, \tilde{e}_{xz}$.

Геометрические соотношения имеют вид

$$\tilde{e}_x = \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x}; \quad \tilde{e}_y = \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y}; \quad \tilde{e}_z = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}; \quad \tilde{e}_{xy} = \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x};$$

$$\tilde{e}_{yz} = \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial y}; \quad \tilde{e}_{xz} = \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x}, \quad (4)$$

где $\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z$ – проекции перемещения произвольной точки на соответствующие оси координат. Они также являются функциями координат и времени:

$$\tilde{u}_x = \tilde{u}_x(x, y, z, t); \quad \tilde{u}_y = \tilde{u}_y(x, y, z, t);$$

$$\tilde{u}_z = \tilde{u}_z(x, y, z, t). \quad (5)$$

При гармонических колебаниях закон изменения перемещений по времени можно представить в следующем виде:

$$\tilde{u}_x = u_x \sin \omega t; \quad \tilde{u}_y = u_y \sin \omega t; \quad \tilde{u}_z = u_z \sin \omega t, \quad (6)$$

где ω – круговая частота колебаний, а перемещения u_x, u_y, u_z зависят только от координат:

$$u_x = u_x(x, y, z); \quad u_y = u_y(x, y, z); \quad u_z = u_z(x, y, z). \quad (7)$$

Подставляя (5) в (4), получим:

$$\tilde{e} = e \sin \omega t, \quad (8)$$

где e – любой параметр из $e_x, e_y, e_z, e_{xy}, e_{yz}, e_{xz}$, для которых справедливы геометрические соотношения

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x};$$

$$e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad e_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (9)$$

В силу линейности физических соотношений можно записать

$$\tilde{\sigma} = \sigma \sin \omega t, \quad (10)$$

где σ – любой из параметров $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$, для которых справедливы физические соотношения

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy} \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{xz} \frac{\sigma_z}{E_z}; \quad e_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx} \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{yz} \frac{\sigma_z}{E_z};$$

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E_z} - \mu_{zx} \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{zy} \frac{\sigma_y}{E_y}; \quad e_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}; \quad (11)$$

$$e_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}}; \quad e_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}},$$

где $E_{x(y,z)}$ – модуль упругости соответствующего направления; $G_{xy(yz,xz)}$ – модуль сдвига в соответствующей плоскости; $\mu_{xy}, \mu_{yx}, \mu_{yz}, \mu_{zy}, \mu_{xz}, \mu_{zx}$ – коэффициенты Пуассона.

Имеет место свойство симметрии упругих постоянных:

$$E_x \mu_{xy} = E_y \mu_{yx}; \quad E_y \mu_{yz} = E_z \mu_{zy}; \quad E_x \mu_{xz} = E_z \mu_{zx}. \quad (12)$$

Используя принятые в [1] допущения, выражение потенциальной энергии деформации (2) можно привести к виду

$$\tilde{U} = U \sin^2 \omega t, \quad (13)$$

где U определяется выражением

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} \left\{ \sigma_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + \tau_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \tau_{xz} \psi_x + \tau_{yz} \psi_y \right\} dx dy dz. \quad (14)$$

Выражение кинетической энергии колебания пластины имеет вид

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} (\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_y^2 + \tilde{v}_z^2) \rho dx dy dz, \quad (15)$$

где ρ – плотность материала (в общем случае является функцией координат); $\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z$ – проекции вектора скорости на соответствующие оси координат, связанные с перемещениями дифференциальными зависимостями

$$\tilde{v}_x = \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial t}; \quad \tilde{v}_y = \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial t}; \quad \tilde{v}_z = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial t}. \quad (16)$$

Подставляя (5) в (16), а затем результат – в (15), получим

$$\tilde{T} = T \cos^2 \omega t, \quad (17)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \rho \omega^2 dx dy dz. \quad (18)$$

Приравнивая максимальные значения потенциальной и кинетической энергии, которые определяются выражениями (14) и (18), получим

$$\frac{1}{2} \int \int \int_{(V)} \left\{ \sigma_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \sigma_x \left(\frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + \tau_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right] + \tau_{xz} \psi_x + \tau_{yz} \psi_y \right\} \times$$

$$\times dx dy dz - \frac{1}{2} \int \int \int_{(v)} \rho \omega^2 \left[(u + z\theta_x)^2 + (v + z\theta_y)^2 + w^2 \right] dx dy dz = 0. \quad (19)$$

При выводе (19) учтено, что

$$u_x = u + z\theta_x; \quad u_y = v + z\theta_y; \quad u_z = w, \quad (20)$$

где u и v – перемещения точек начальной плоскости вдоль осей X и Y соответственно; w – прогиб точек начальной плоскости; θ_x, θ_y – углы наклона сечения, определяемые соотношениями

$$\theta_x = \psi_x - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \theta_y = \psi_y - \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (21)$$

Проинтегрируем (19) по толщине пластины, т. е. по координате z в пределах от $-s$ до $h-s$. В результате преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy} + M_x \chi_x + \\ & + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy} + Q_x \psi_x + Q_y \psi_y) dx dy - \\ & - \frac{1}{2} \omega^2 \int \int_0^a \int_0^b \left\{ B_p (u^2 + v^2 + w^2) + \right. \\ & + 2C_p \left[u \left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \\ & \left. D_p \left[\left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь N, M, Q – внутренние погонные усилия, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11} \varepsilon_x + B_{12} \varepsilon_y + C_{11} \chi_x + C_{12} \chi_y; \\ N_y &= B_{21} \varepsilon_x + B_{22} \varepsilon_y + C_{21} \chi_x + C_{22} \chi_y; \\ N_{xy} &= B_{33} \varepsilon_{xy} + C_{33} \chi_{xy}; \quad Q_x = K_x \psi_x; \quad Q_y = K_y \psi_y; \\ M_{xy} &= C_{33} \varepsilon_{xy} + D_{33} \chi_{xy}; \\ M_x &= C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + D_{11} \chi_x + D_{12} \chi_y; \\ M_y &= C_{21} \varepsilon_x + C_{22} \varepsilon_y + D_{21} \chi_x + D_{22} \chi_y, \end{aligned} \quad (23)$$

где B, C, D и K – параметры мембранной, смешанной, изгибной и трансверсальной жесткости соответственно; B_p, C_p, D_p – параметры инерции пластины, вычисляемые по формулам

$$B_p = \int_{-s}^{h-s} \rho dz; \quad C_p = \int_{-s}^{h-s} \rho z dz; \quad D_p = \int_{-s}^{h-s} \rho z^2 dz. \quad (24)$$

Сделаем последние преобразования в функционале (22). Приведем его к виду, удобному для реализации КЭ процедуры. Для этого с помощью физических соотношений (23) выразим усилия через деформации, которые также выразим через перемещения и углы трансверсального сдвига с помощью геометрических соотношений

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x};$$

$$\chi_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}. \quad (25)$$

В итоге с учетом (21) получим

$$\begin{aligned} & \int \int_0^a \int_0^b \left\{ B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ & + 2B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & + 2D_{12} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \\ & + 2C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \\ & + B_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2C_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + D_{33} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + K_x \psi_x^2 + K_y \psi_y^2 \left. \right\} dx dy - \\ & - \omega^2 \int \int_0^a \int_0^b \left\{ B_p (u^2 + v^2 + w^2) + 2C_p \left[u \left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ & \left. + D_p \left[\left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Функционал (26) позволяет получить разрешающие уравнения для задачи о свободных колебаниях пластины.

Выполним модальный расчет пластины с помощью МКЭ. Будем рассматривать четырехузловой конечный элемент пластины, для которого вектор узловых кинематических параметров имеет вид

$$\delta_e = \{ \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \}^T, \quad (27)$$

где δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – вектор неизвестных i -го узла

$$\delta_i = \left\{ w_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \psi_{xi} \psi_{yi} u_i v_i \right\}^T. \quad (28)$$

Кинематические переменные внутри элемента представим следующим вектором

$$\delta = \left\{ w \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \psi_x \psi_y u v \right\}^T. \quad (29)$$

Его компоненты определяются через узловые значения (28) с помощью соотношения

$$\delta = P \delta_e, \quad (30)$$

где P – матрица размерностью 7×28 . Это так называемая матрица функций формы.

Подставим выражения для компонент вектора δ (29) в функционал (26), выполним интегрирование по площади элемента, в результате получим функцию полной энергии колебания конечного элемента пластины. Эта функция зависит от компонент вектора узловых кинематических параметров (28), минимизация по которым приводит к системе однородных алгебраических уравнений:

$$K_e \delta_e - \omega^2 S_e \delta_e = 0, \quad (31)$$

где K_e – матрица жесткости; S_e – матрица инерциальных параметров конечного элемента пластины (обе – симметричные, размером 28×28).

В выражениях для компонентов матрицы K_e фигурируют параметры жесткости, а в выражениях для компонентов матрицы S_e – параметры инерции. Например:

$$k_{11} = \frac{2}{5} \frac{14D_{33}a^2b^2 + 5D_{12}b^2a^2 + 10D_{11}b^4 + 10D_{22}a^4}{a^3b^3};$$

$$s_{11} = \frac{1727B_p b^2 a^2 + 5520D_p b^2 + 5520D_p a^2}{12600ab}.$$

Если структура пакета пластины симметрична относительно срединной плоскости и система координат связана со срединной плоскостью, то в этом случае смешанные жесткости пластины C и инерционный параметр C_p становятся равным нулю, и структура матрицы инерции упрощается за счет появления в ней множества нулевых компонентов.

Представим матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента пластины в блочном виде:

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{I-I} & K_{I-II} & K_{I-III} & K_{I-IV} \\ K_{II-I} & K_{II-II} & K_{II-III} & K_{II-IV} \\ K_{III-I} & K_{III-II} & K_{III-III} & K_{III-IV} \\ K_{IV-I} & K_{IV-II} & K_{IV-III} & K_{IV-IV} \end{bmatrix};$$

$$S_e = \begin{bmatrix} S_{I-I} & S_{I-II} & S_{I-III} & S_{I-IV} \\ S_{II-I} & S_{II-II} & S_{II-III} & S_{II-IV} \\ S_{III-I} & S_{III-II} & S_{III-III} & S_{III-IV} \\ S_{IV-I} & S_{IV-II} & S_{IV-III} & S_{IV-IV} \end{bmatrix}; \quad (32)$$

где K_{i-j} и S_{i-j} ($i, j = I, II, III, IV$) – подматрицы размером 7×7 . Ненулевые компоненты этих матриц определяются теми же выражениями, что и соответствующие компоненты матриц жесткости и инерции, фигурирующих в уравнениях системы (31).

Глобальная система разрешающих уравнений в задаче модального расчета пластины имеет вид

$$K_\Sigma \Delta - \omega^2 S_\Sigma \Delta = 0, \quad (33)$$

где Δ – глобальный вектор узловых неизвестных,

$$\Delta = \{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_i \dots \delta_N\}^T, \quad (34)$$

где N – общее число узлов в системе; K_Σ – глобальная матрица жесткости; S_Σ – глобальная матрица инерции.

Система (33) в математическом смысле является обобщенной задачей на собственные значения, решая которую (после учета в ней граничных условий), определим частоты и формы собственных колебаний пластины.

Протестируем полученный алгоритм решения на примере модального расчета изотропной квадратной пластины, жестко защемленной по контуру. Зададим следующие размеры пластины и механические свойства материала: длина стороны пластины $a = b = 1$ м,

толщина пластины $h = 3$ мм, модуль упругости $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м³.

В результате расчета, выполненного по нашей модели с двадцатью элементами вдоль каждой из сторон пластины, определены первые пять значений собственных частот (табл. 1) и соответствующие им формы колебаний. Здесь в качестве формы колебаний будем рассматривать распределение функции прогибов. Для оценки полученных результатов выполнен расчет в пакете COSMOS/M, где для моделирования использованы элементы тонкой оболочки SHELL4.

Таблица 1

Значения частот собственных колебаний

Номер моды	Частоты собственных колебаний, Гц	
	Тестируемое решение	Решение COSMOS/M
1	26,908	26,976
2	54,831	55,017
3	54,831	55,017
4	80,483	81,112
5	98,287	98,630

Результаты модального расчета, выполненного с помощью нашей модели (рис. 1), имеют хорошее совпадение с решением в пакете COSMOS/M (рис. 2). Это касается и частот собственных колебаний (см. табл. 1) и форм мод (рис. 3–6).

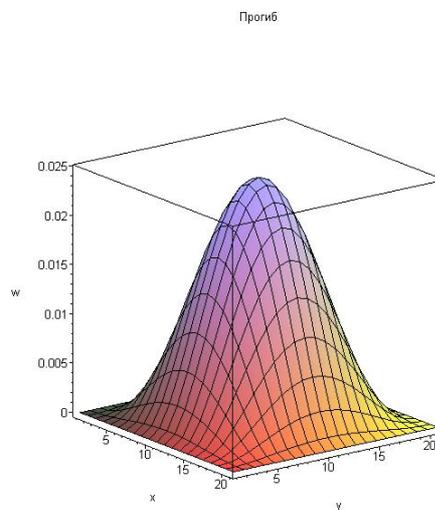


Рис. 1. Форма колебаний, соответствующая первой собственной частоте

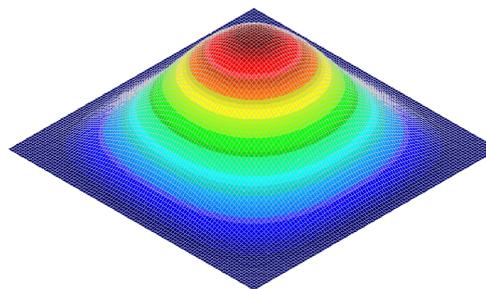


Рис. 2. Форма колебаний, соответствующая первой собственной частоте (COSMOS/M)

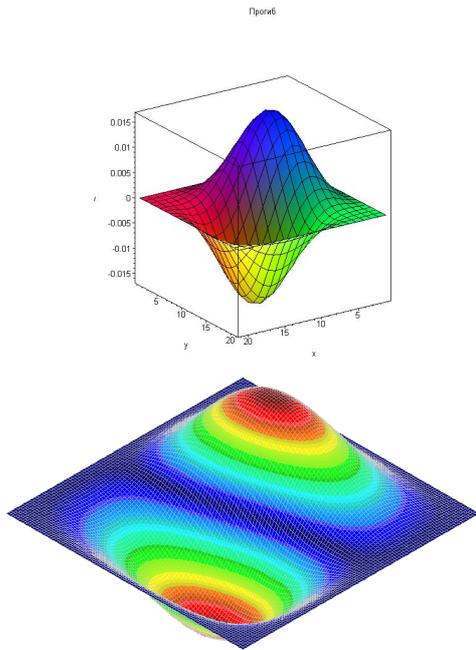


Рис. 3. Форма колебаний, соответствующая второй собственной частоте

Выполним численное исследование влияния вида граничных условий на величины частот собственных колебаний квадратной композитной пластины. Будем сравнивать два вида защемления: классическое (I) и со свободным сдвигом (II). Примем длины сторон пластины $a = b = 1$ м, а ее толщину $h = 10$ мм.

Будем полагать пластину изготовленной из однонаправленного композита с углами укладки $\varphi = \pm 45^\circ$. Зададим следующие механические свойства (углепластик):

- модуль упругости вдоль волокон $E_1 = 180$ ГПа;
- модуль упругости поперек волокон $E_2 = 6,2$ ГПа;
- модуль сдвига $G_{12} = 5$ ГПа;
- коэффициент Пуассона $\mu_{12} = 0,007$;
- плотность $\rho = 1\,500$ кг/м³.

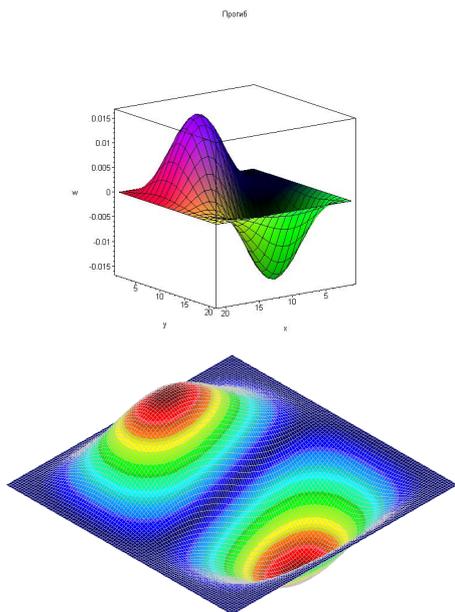


Рис. 4. Форма колебаний, соответствующая третьей собственной частоте

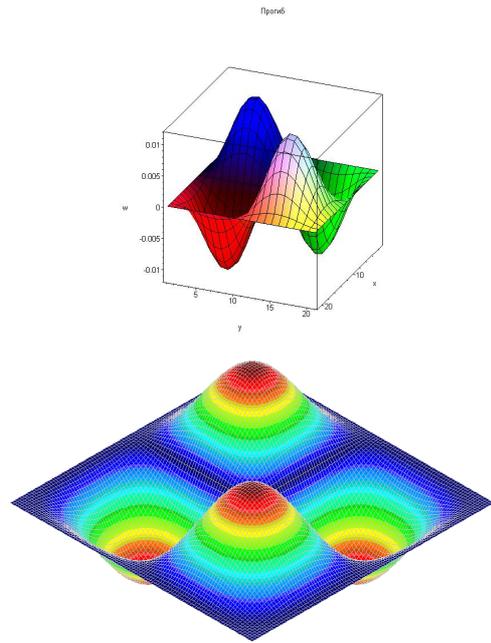


Рис. 5. Форма колебаний, соответствующая четвертой собственной частоте

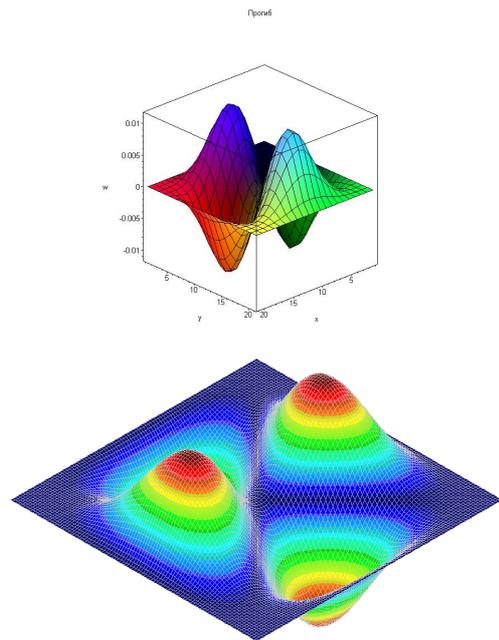


Рис. 6. Форма колебаний, соответствующая пятой собственной частоте

Упругие параметры пластины, которую будем считать однослойной и условно однородной, вычислим по формулам

$$A_{11} = \bar{E}_1 \cos^4 \varphi + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi ;$$

$$A_{22} = \bar{E}_1 \sin^4 \varphi + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi + 2(\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi ;$$

$$A_{12} = A_{21} = \bar{E}_1 \mu_{12} + (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2(\bar{E}_1 \mu_{12} + 2G_{12})) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi ;$$

$$A_{33} = (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \mu_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos^2 2\varphi ,$$

где \bar{E}_1 и \bar{E}_2 – приведенные модули упругости, вычисляемые по формуле

$$\bar{E}_{1(2)} = \frac{E_{1(2)}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}},$$

а коэффициент Пуассона μ_{21} определяется из условия симметрии упругих постоянных:

$$\mu_{21} = \frac{\mu_{12}E_1}{E_2}.$$

Модули трансверсального сдвига примем равными G_{12} .

Коэффициенты жесткости пластины вычислим по формулам

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}h; \quad B_{22} = A_{22}h; \quad B_{21} = A_{21}h; \\ B_{33} &= A_{33}h; \quad D_{11} = \frac{A_{11}h^3}{12}; \quad D_{22} = \frac{A_{22}h^3}{12}; \\ D_{12} &= \frac{A_{12}h^3}{12}; \quad D_{21} = \frac{A_{21}h^3}{12}; \quad D_{33} = \frac{A_{33}h^3}{12}; \\ K_x &= K_y = G_{12}h; \\ C_{ij} &= 0 \quad (ij = 11, 22, 12, 21, 33), \end{aligned}$$

а параметры инерции – по формулам

$$B_p = \rho h; \quad C_p = 0; \quad D_p = \rho h^3/12$$

Результаты вычислений в виде значений первых пяти частот собственных колебаний поместим в таблицу (табл. 2). Здесь же приведены частоты для пластин с толщинами 30 и 50 мм.

Формы колебаний соответствуют тем, что приведены на рис. 2–6.

Анализ представленных результатов говорит о том, что в задаче модального расчета результаты, полученные при защемлении со свободным сдвигом краев, отличаются от тех, что определены при классическом защемлении. Это различие нарастает по мере увеличения толщины пластины, достигая максимума (по первой частоте) в рассматриваемой модели в 10,6 %.

Проведенная работа позволяет сформулировать следующие выводы.

1. Получен энергетический функционал для решения задачи о собственных колебаниях пластин с низкой трансверсальной жесткостью.

2. Разработана конечно-элементная модель податливой при сдвиге пластины, вектор узловых неизвестных которой включает углы трансверсального сдвига. Сформированы матрица жесткости и матрица инерции для соответствующего элемента пластины.

3. В результате проведенного численного исследования на примере расчета композитной пластины показана актуальность разработанной модели при проведении модального анализа конструкций с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью, а также при учете граничных условий неклассического вида.

Библиографическая ссылка

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988.

Таблица 2

Значения частот собственных колебаний композитной пластины

Номер моды	Значения собственных частот, Гц					
	h = 10 мм		h = 30 мм		h = 50 мм	
	Полное защемление	Защемление со свободным сдвигом	Полное защемление	Защемление со свободным сдвигом	Полное защемление	Защемление со свободным сдвигом
1	111,24	110,42	323	306	509	455
2	222,09	220,72	634	608	975	900
3	222,09	220,72	634	608	975	900
4	349,33	347,40	977	943	1 457	1 370
5	380,66	378,74	1 066	1 033	1 592	1 512

V. A. Nesterov

VIBRATION OF A PLATE WITH LOW TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS

Modal finite element analysis of a plate with low transverse shear stiffness is considered. There are two transverse shear strains at each of four nodes. In modal analysis of a composite plate the urgency of the developed finite element model is shown. Results of numerical research of influence of nonclassic boundary conditions are presented.

Keywords: a plate, finite element method, transverse shear strains, modal analysis.

© Нестеров В. А., 2010