УДК 519.62

В. А. Нестеров, А. В. Лопатин

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧКИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В геометрически нелинейной постановке рассматривается вариационная задача о деформировании оболочки, податливой при трансверсальном сдвиге. Представлен вывод выражения потенциальной энергии деформации, которое может быть использовано для получения уравнений устойчивости для оболочек с низкой трансверсальной жесткостью.

Ключевые слова: оболочка, трансверсальный сдвиг, вариационная задача.

В последнее время в производстве ракетно-космической техники все чаще используются композиционные материалы, которые, обладая большой удельной прочностью и жесткостью, позволяют создавать конструкции высокой степени весового совершенства. Однако композиты, в отличие от традиционных конструкционных материалов, отличаются рядом особенностей, которые усложняют классические расчетные модели. Одной из таких особенностей является низкая сдвиговая жесткость по отношению к трансверсальным напряжениям.

Метод конечных элементов – самый распространенный среди современных численных методов расчета конструкций. В общем случае вывод разрешающих уравнений МКЭ предполагает формирование энергетического функционала полной потенциальной энергии объекта. При решении задачи об устойчивости оболочек необходимо оперировать выражением потенциальной энергии деформации в геометрически нелинейной постановке.

Общее выражение потенциальной энергии деформации запишем на основе уравнения, представленного в [1]:

$$U = \frac{1}{2}\iiint\limits_{(V)} \big(\sigma^*_\alpha \Delta_\alpha + \sigma^*_\beta \Delta_\beta + \sigma^*_\gamma \Delta_\gamma + \tau^*_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta} + \tau^*_{\alpha\lambda}\Delta_{\alpha\gamma} + \tau^*_{\beta\gamma}\Delta_{\beta\gamma}\big) H_1 H_2 \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma, \tag{1}$$

где коэффициент 1/2 перед интегралом обусловлен линейной зависимостью между напряжениями и деформациями (для линейно-упругого материала); $\sigma^*_\alpha, \sigma^*_\beta, \sigma^*_\gamma$, $\tau^*_{\alpha\beta}, \tau^*_{\alpha\gamma}$ и $\tau^*_{\beta\gamma}$ – обобщенные компоненты напряжения. Их выражения записываются следующим образом:

$$\sigma^*_\alpha = \frac{S_1^*}{S_1}\frac{\sigma_\alpha}{1+\xi_\alpha}; \quad \tau^*_{\alpha\beta} = \frac{S_1^*}{S_1}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{1+\xi_\beta}; \quad \tau^*_{\alpha\gamma} = \frac{S_1^*}{S_1}\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{1+\xi_\gamma};$$

$$\tau^*_{\beta\alpha} = \frac{S_2^*}{S_2}\frac{\tau_{\beta\alpha}}{1+\xi_\alpha}; \quad \sigma^*_\beta = \frac{S_2^*}{S_2}\frac{\sigma_\beta}{1+\xi_\beta}; \quad \tau^*_{\beta\gamma} = \frac{S_2^*}{S_2}\frac{\tau_{\beta\gamma}}{1+\xi_\gamma};$$

$$\tau^*_{\gamma\alpha} = \frac{S_3^*}{S_3}\frac{\tau_{\gamma\alpha}}{1+\xi_\alpha}; \quad \tau^*_{\gamma\beta} = \frac{S_3^*}{S_3}\frac{\tau_{\gamma\beta}}{1+\xi_\beta}; \quad \sigma^*_\gamma = \frac{S_3^*}{S_3}\frac{\sigma_\gamma}{1+\xi_\gamma}, \tag{2}$$

где ξ_α, ξ_β, ξ_γ – относительные удлинения волокон, первоначально направленных по k_1, k_2, k_3 (орты системы координат α, β, γ). Они вычисляются по формулам

$$\xi_\alpha = \sqrt{1+2\Delta_\alpha} - 1; \quad \xi_\beta = \sqrt{1+2\Delta_\beta} - 1;$$
$$\xi_\gamma = \sqrt{1+2\Delta_\gamma} - 1 \tag{3}$$

В выражениях (2) – $\frac{S_1^*}{S_1}$; $\frac{S_2^*}{S_2}$; $\frac{S_3^*}{S_3}$ – коэффициенты изменения величины площадок, первоначально перпендикулярных k_1, k_2, k_3 соответственно. Они определяются через компоненты деформации Δ:

$$\frac{S_1^*}{S_1} = \sqrt{(1+2\Delta_\beta)(1+2\Delta_\gamma) - \Delta^2_{\beta\gamma}};$$
$$\frac{S_2^*}{S_2} = \sqrt{(1+2\Delta_\alpha)(1+2\Delta_\gamma) - \Delta^2_{\alpha\gamma}}; \tag{4}$$
$$\frac{S_3^*}{S_3} = \sqrt{(1+2\Delta_\alpha)(1+2\Delta_\beta) - \Delta^2_{\alpha\beta}}.$$

Для компонентов напряжения справедливо соотношение

$$\tau^*_{ij} = \tau^*_{ji}. \tag{5}$$

Введем допущение

$$\sigma^*_\alpha = \sigma_\alpha; \quad \sigma^*_\beta = \sigma_\beta; \quad \sigma^*_\gamma = \sigma_\gamma;$$
$$\tau^*_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}; \quad \tau^*_{\alpha\gamma} = \tau_{\alpha\gamma}; \quad \tau^*_{\beta\gamma} = \tau_{\beta\gamma}. \tag{6}$$

Оно справедливо при малых величинах Δ, когда комплексы

$$\frac{S_i^*}{S_i}\frac{1}{1+\xi_j}$$

можно принять равными единице.

Общие выражения для компонентов деформации Δ запишем в виде

$$\Delta_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2}\left[e_\alpha^2 + \left(\frac{1}{2}e_{\alpha\beta} + \Omega_\gamma\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta\right)^2\right];$$

$$\Delta_\beta = e_\beta + \frac{1}{2}\left[e_\beta^2 + \left(\frac{1}{2}e_{\alpha\beta} - \Omega_\gamma\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha\right)^2\right];$$

$$\Delta_\gamma = e_\gamma + \frac{1}{2}\left[e_\gamma^2 + \left(\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} + \Omega_\beta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} - \Omega_\alpha\right)^2\right]; \tag{7}$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + e_\alpha\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\beta} - \Omega_\gamma\right) + e_\beta\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\beta} + \Omega_\gamma\right) + \left(\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta\right)\left(\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha\right);$$

$$\Delta_{\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma} + e_\alpha\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} + \Omega_\beta\right) + e_\gamma\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta\right) + $$
$$+\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\beta} + \Omega_\gamma\right)\left(\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} - \Omega_\alpha\right);$$
$$\Delta_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma} + e_\beta\left(\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} - \Omega_\alpha\right) + e_\gamma\left(\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha\right) + $$
$$+\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\beta} - \Omega_\gamma\right)\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} + \Omega_\beta\right).$$

Введем упрощения:

– пренебрежем квадратами и произведениями деформаций e_α, e_β, $e_{\alpha\beta}$;

– примем угол поворота Ω_γ равным нулю;

– в выражениях трансверсальных деформаций оставим только линейные члены.

В результате вместо (7) получим

$$\Delta_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta\right)^2;\ \Delta_\beta = e_\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha\right)^2;$$
$$\Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta\right)\left(\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha\right); \qquad (8)$$
$$\Delta_\gamma = e_\gamma;\quad \Delta_{\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma};\quad \Delta_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma}.$$

Линеаризованные компоненты деформации e_α, e_β, e_γ, $e_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\gamma}$, $e_{\beta\gamma}$ и проекции угла поворота Ω_α, Ω_β, Ω_γ можно выразить через проекции перемещения U, V, W:

$$e_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}V + \frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}W,$$
$$e_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\beta} + \frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}W + \frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}U,$$
$$e_\gamma = \frac{1}{H_3}\frac{\partial W}{\partial\gamma} + \frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}U + \frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}V, \qquad (9)$$
$$e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha} = \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{V}{H_2}\right) + \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{U}{H_1}\right),$$
$$e_{\alpha\gamma} = e_{\gamma\alpha} = \frac{H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{W}{H_3}\right) + \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{U}{H_1}\right),$$
$$e_{\beta\gamma} = e_{\gamma\beta} = \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{V}{H_2}\right) + \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{W}{H_3}\right);$$
$$2\Omega_\alpha = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(H_3W) - \frac{\partial}{\partial\gamma}(H_2V)\right],$$
$$2\Omega_\beta = \frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1U) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(H_3W)\right], \qquad (10)$$
$$2\Omega_\gamma = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2V) - \frac{\partial}{\partial\beta}(H_1U)\right].$$

С учетом (9) и (10) запишем выражения комплексов, фигурирующих в (8):

$$\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_1}\left(H_1\frac{\partial U}{\partial\gamma} - U\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\right) - \right.$$
$$\left.-\frac{1}{H_1}\left(U\frac{\partial H_1}{\partial\gamma} + H_1\frac{\partial U}{\partial\gamma}\right) + \frac{1}{H_1}\frac{\partial W}{\partial\alpha}\right] = \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha} - U\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\right);$$

$$\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{H_2}\left(H_2\frac{\partial V}{\partial\gamma} - V\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\right) + \frac{1}{H_2}\frac{\partial W}{\partial\beta} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial W}{\partial\beta} - \right.$$
$$\left.-\frac{1}{H_2}\left(H_2\frac{\partial V}{\partial\gamma} - V\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\right)\right] = \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial W}{\partial\beta} - V\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\right).$$

Здесь учтено, что для оболочек $H_3 = 1$.

Для дальнейших преобразований понадобятся выражения для коэффициентов Ламе:

$$H_1 = A_1\left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right);\qquad H_2 = A_2\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) \qquad (11)$$

и следующие кинематические соотношения [2]:

$$U = u + \gamma\theta_\alpha;\ V = v + \gamma\theta_\beta;\ W = w; \qquad (12)$$
$$\theta_\alpha = \psi_\alpha + \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha};\ \theta_\beta = \psi_\beta + \frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\beta}. \qquad (13)$$

С учетом (11), (12) и (13) получим:

$$\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta = \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - (u + \gamma\theta_\alpha)\frac{A_1}{R_1}\right) =$$
$$= \frac{A_1}{H_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \frac{u}{R_1}\right) - \frac{A_1}{H_1}\frac{\gamma}{R_1}\theta_\alpha = \frac{A_1}{H_1}(\psi_\alpha - \theta_\alpha) - \qquad (14)$$
$$-\frac{A_1}{H_1}\frac{\gamma}{R_1}\theta_\alpha = \frac{A_1}{H_1}\psi_\alpha - \theta_\alpha\frac{A_1}{H_1}\left(1 + \frac{\gamma}{R_1}\right) = \frac{A_1}{H_1}\psi_\alpha - \theta_\alpha;$$
$$\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha = \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - (\upsilon + \gamma\theta_\beta)\frac{A_2}{R_2}\right) = \frac{A_2}{H_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \frac{\upsilon}{R_2}\right) -$$
$$-\frac{A_2}{H_2}\frac{\gamma}{R_2}\theta_\beta = \frac{A_2}{H_2}(\psi_\beta - \theta_\beta) - \frac{A_2}{H_2}\frac{\gamma}{R_2}\theta_\beta = \frac{A_2}{H_2}\psi_\beta -$$
$$-\theta_\beta\frac{A_2}{H_2}\left(1 + \frac{\gamma}{R_2}\right) = \frac{A_2}{H_2}\psi_\beta - \theta_\beta.$$

Соотношения для углов поворота (13) можно записать в следующем виде:

$$\theta_\alpha = \psi_\alpha + \omega_\alpha;\qquad \theta_\beta = \psi_\beta + \omega_\beta, \qquad (15)$$

где

$$\omega_\alpha = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha};\qquad \omega_\beta = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\beta}. \qquad (16)$$

С учетом (15) выражения для комплексов (14) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta = \psi_\alpha\left(\frac{A_1}{H_1} - 1\right) - \omega_\alpha;$$
$$\frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha = \psi_\beta\left(\frac{A_2}{H_2} - 1\right) - \omega_\beta. \qquad (17)$$

Введем еще одно упрощение: в нелинейных членах компонентов деформации положим $\psi_\alpha = 0$ и $\psi_\beta = 0$, тогда вместо (17) получим

$$\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma} - \Omega_\beta = -\omega_\alpha;\qquad \frac{1}{2}e_{\beta\gamma} + \Omega_\alpha = -\omega_\beta. \qquad (18)$$

Подставим (18) в (8) и запишем

$$\Delta_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2;\ \Delta_\beta = e_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2;$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \omega_\alpha \omega_\beta\ ;\ \ \Delta_\gamma = e_\gamma\ ;$$
$$\Delta_{\alpha\gamma} = e_{\alpha\gamma}\ ;\ \ \Delta_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma}. \qquad (19)$$

Подставим законы распределения перемещений (12) в первое, второе и четвертое соотношения системы (9). В результате получим

$$e_\alpha = \frac{A_1}{H_1}\left(\varepsilon_\alpha + \gamma\chi_\alpha\right);$$
$$e_\beta = \frac{A_2}{H_2}\left(\varepsilon_\beta + \gamma\chi_\beta\right); \qquad (20)$$
$$e_{\alpha\beta} = \frac{A_1}{H_1}\left(\varepsilon_{\alpha\beta} + \gamma\chi_{\alpha\beta}\right) + \frac{A_2}{H_2}\left(\varepsilon_{\beta\alpha} + \gamma\chi_{\beta\alpha}\right),$$

где

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\beta} + \frac{w}{R_1};$$
$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha} + \frac{w}{R_2};$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{u}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\beta};\ \ \varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{v}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha};$$
$$\chi_\alpha = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\theta_\beta}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\beta}; \qquad (21)$$
$$\chi_\beta = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\beta} + \frac{\theta_\alpha}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha};\ \ \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\theta_\beta}{\partial\alpha} - \frac{\theta_\alpha}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\beta};$$
$$\chi_{\beta\alpha} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial\beta} - \frac{\theta_\beta}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}.$$

Запишем общее выражение полной энергии деформации (1), заменив в нем компоненты напряжения в соответствии с (6), а компоненты деформации – выражениями (19):

$$U = \frac{1}{2}\iiint\Big\{\sigma_\alpha\left(e_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right) + \sigma_\beta\left(e_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right) + \sigma_\gamma e_\gamma + \qquad (22)$$
$$+\tau_{\alpha\beta}\left(e_{\alpha\beta} + \omega_\alpha\omega_\beta\right) + \tau_{\alpha\gamma}e_{\alpha\gamma} + \tau_{\beta\gamma}e_{\beta\gamma}\Big\} H_1H_2\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Физические соотношения в нелинейной теории имеют вид

$$\sigma_\alpha = A_{11}\Delta_\alpha + A_{12}\Delta_\beta\ ;\ \ \sigma_\beta = A_{21}\Delta_\alpha + A_{22}\Delta_\beta\ ;$$
$$\tau_{\alpha\beta} = A_{33}\Delta_{\alpha\beta}, \qquad (23)$$

где

$$\Delta_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\ ;\ \ \Delta_\beta = e_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\ ;$$
$$\Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \omega_\alpha\omega_\beta.$$

Для трансверсальных напряжений примем линейные соотношения

$$\tau_{\alpha\gamma} = G_{\alpha\gamma}e_{\alpha\gamma}\ ;\ \ \tau_{\beta\gamma} = G_{\beta\gamma}e_{\beta\gamma}. \qquad (24)$$

Подставим физические соотношения (23), (24) в (22) и получим

$$U = \frac{1}{2}\int\underset{(V)}{\int}\int\Big(A_{11}\Delta_\alpha^2 + 2A_{12}\Delta_\alpha\Delta_\beta + A_{22}\Delta_\beta^2 + \qquad (25)$$
$$+A_{33}\Delta_{\alpha\beta}^2 + G_{\alpha\gamma}e_{\alpha\gamma}^2 + G_{\beta\gamma}e_{\beta\gamma}^2\Big) H_1H_2\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

или

$$U = \frac{1}{2}\int\underset{(V)}{\int}\int\Big\{A_{11}\left(e_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)^2 + 2A_{12}\left(e_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)\times$$
$$\times\left(e_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right) + A_{22}\left(e_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)^2 + A_{33}\left(e_{\alpha\beta} + \omega_\alpha\omega_\beta\right)^2 + \qquad (26)$$
$$+G_{\alpha\gamma}e_{\alpha\gamma}^2 + G_{\beta\gamma}e_{\beta\gamma}^2\Big\} H_1H_2\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Подставим в (26) выражения для относительных деформаций (20):

$$U = \frac{1}{2}\iiint\Big\{A_{11}\left[\frac{A_1}{H_1}\left(\varepsilon_\alpha + \gamma\chi_\alpha\right) + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right]^2 +$$
$$+A_{22}\left[\frac{A_2}{H_2}\left(\varepsilon_\beta + \gamma\chi_\beta\right) + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right]^2 +$$
$$+2A_{12}\left[\frac{A_1}{H_1}\left(\varepsilon_\alpha + \gamma\chi_\alpha\right) + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right]\times \qquad (27)$$
$$\times\left[\frac{A_2}{H_2}\left(\varepsilon_\beta + \gamma\chi_\beta\right) + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right] +$$
$$+A_{33}\left[\frac{A_1}{H_1}\left(\varepsilon_{\alpha\beta} - \gamma\chi_{\alpha\beta}\right) + \frac{A_2}{H_2}\left(\varepsilon_{\beta\alpha} - \gamma\chi_{\beta\alpha}\right) + \omega_\alpha\omega_\beta\right]^2 +$$
$$+G_{\alpha\gamma}e_{\alpha\gamma}^2 + G_{\beta\gamma}e_{\beta\gamma}^2\Big\} H_1H_2\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Выполним в (27) следующие преобразования.
Выделим комплексы

$$\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\ ; \qquad \frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\ ;$$
$$\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{A_2}{H_2}\varepsilon_{\beta\alpha} + \omega_\alpha\omega_\beta\ .$$

Это позволит записать квадраты и произведения нелинейных деформаций в виде

$$\Delta_\alpha^2 = \left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)^2 + 2\gamma\frac{A_1}{H_1}\chi_\alpha\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right) + \gamma^2\frac{A_1^2}{H_1^2}\chi_\alpha^2\ ;$$
$$\Delta_\beta^2 = \left(\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)^2 + 2\gamma\frac{A_2}{H_2}\times$$
$$\times\chi_\beta\left(\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right) + \gamma^2\frac{A_2^2}{H_2^2}\chi_\beta^2\ ; \qquad (28)$$
$$\Delta_\alpha\Delta_\beta = \left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)\left(\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right) + \gamma\frac{A_1}{H_1}\times$$
$$\times\chi_\alpha\left(\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta + \frac{1}{2}\omega_\beta^2\right) + \gamma\frac{A_2}{H_2}\chi_\beta\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right) + \gamma^2\frac{A_1}{H_1}\frac{A_2}{H_2}\chi_\alpha\chi_\beta;$$
$$\Delta_{\alpha\beta}^2 = \left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{A_2}{H_2}\varepsilon_{\beta\alpha} + \omega_\alpha\omega_\beta\right)^2 +$$
$$+2\gamma\left(\frac{A_1}{H_1}\chi_{\alpha\beta} + \frac{A_2}{H_2}\chi_{\beta\alpha}\right)\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{A_2}{H_2}\varepsilon_{\beta\alpha} + \omega_\alpha\omega_\beta\right) +$$
$$+\gamma^2\left(\frac{A_1}{H_1}\chi_{\alpha\beta} + \frac{A_2}{H_2}\chi_{\beta\alpha}\right)^2.$$

Заменим истинные деформации трансверсального сдвига их осредненными значениями

$$e_{\alpha\gamma}=\psi_{\alpha}\ ;\qquad e_{\beta\gamma}=\psi_{\beta}. \qquad (29)$$

Перепишем (27) с учетом (28), (29):

$$U=\frac{1}{2}\int\int\limits_{(V)}\int\Bigg\{A_{11}\left[\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)^2+2\gamma\frac{A_1}{H_1}\times\right.$$
$$\left.\times\chi_\alpha\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+\gamma^2\frac{A_1^2}{H_1^2}\chi_\alpha^2\right]+$$
$$+A_{22}\left[\left(\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)^2+2\gamma\frac{A_2}{H_2}\chi_\beta\left(\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+\gamma^2\frac{A_2^2}{H_2^2}\chi_\beta^2\right]+$$
$$+2A_{12}\left[\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)\left(\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+\gamma\frac{A_1}{H_1}\chi_\alpha\left(\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma\frac{A_2}{H_2}\chi_\beta\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+\gamma^2\frac{A_1}{H_1}\frac{A_2}{H_2}\chi_\alpha\chi_\beta\right]+ \qquad (30)$$
$$+A_{33}\left[\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_{\alpha\beta}+\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)^2+2\gamma\left(\frac{A_1}{H_1}\chi_{\alpha\beta}+\frac{A_2}{H_2}\chi_{\beta\alpha}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{A_1}{H_1}\varepsilon_{\alpha\beta}+\frac{A_2}{H_2}\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)+\gamma^2\left(\frac{A_1}{H_1}\chi_{\alpha\beta}+\frac{A_2}{H_2}\chi_{\beta\alpha}\right)^2\right]+$$
$$+G_{\alpha\gamma}\psi_\alpha^2+G_{\beta\gamma}\psi_\beta^2\Bigg\}H_1H_2d\alpha\, d\beta\, d\gamma\ .$$

Запишем (30) для случая, когда не учитывается изменение метрики по толщине:

$$U=\frac{1}{2}\int\int\limits_{(V)}\int\Bigg\{A_{11}\left[\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)^2+2\gamma\chi_x\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+\gamma^2\chi_\alpha^2\right]+$$
$$+A_{22}\left[\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)^2+2\gamma\chi_\beta\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+\gamma^2\chi_\beta^2\right]+ \qquad (31)$$
$$+2A_{12}\left[\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+\gamma\chi_\alpha\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma\chi_\beta\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+\gamma^2\chi_\alpha\chi_\beta\right]+$$
$$+A_{33}\left[\left(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)^2+2\gamma\left(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}\right)\left(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma^2\left(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}\right)^2\right]+G_{\alpha\gamma}\psi_\alpha^2+G_{\beta\gamma}\psi_\beta^2\Bigg\}\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Проинтегрируем (31) по толщине оболочки:

$$U=\frac{1}{2}\int\int\Bigg\{B_{11}\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)^2+2C_{11}\chi_\alpha\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+D_{11}\chi_\alpha^2+$$
$$+\ B_{22}\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)^2+\ 2C_{22}\chi_\beta\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+D_{22}\chi_\beta^2+$$
$$+2B_{12}\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+2C_{12}\chi_\alpha\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+ \qquad (32)$$
$$+\ 2C_{12}\chi_\beta\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+2D_{12}\chi_\alpha\chi_\beta+B_{33}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)^2+$$
$$+2C_{33}\left(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}\right)\left(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)+$$
$$+D_{33}\left(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}\right)^2+K_\alpha\psi_\alpha^2+K_\beta\psi_\beta^2\Bigg\}\,d\alpha\, d\beta.$$

Рассмотрим физические соотношения (23). Вычислим с их помощью усилия и моменты по формулам

$$N_\alpha=\int_{-s}^{h-s}\sigma_\alpha\, d\gamma\ ;\quad N_{\alpha\beta}=\int_{-s}^{h-s}\tau_{\alpha\beta}\, d\gamma\ ;\quad N_\beta=\int_{-s}^{h-s}\sigma_\beta\, d\gamma\ ;$$
$$Q_\alpha=\int_{-s}^{h-s}\tau_{\alpha\gamma}\, d\gamma\ ;\quad Q_\beta=\int_{-s}^{h-s}\tau_{\beta\gamma}\, d\gamma\ ;$$
$$M_\alpha=\int_{-s}^{h-s}\gamma\,\sigma_\alpha\, d\gamma\ ;\quad M_{\alpha\beta}=\int_{-s}^{h-s}\gamma\,\tau_{\alpha\beta}\, d\gamma\ ;$$
$$M_\beta=\int_{-s}^{h-s}\gamma\,\sigma_\beta\, d\gamma. \qquad (33)$$

Подставим в (33) соотношения для напряжений (23), в которых предварительно выразим Δ_α , Δ_β , $\Delta_{\alpha\beta}$ через относительные деформации e_α, e_β, $e_{\alpha\beta}$. Последние, в свою очередь, выразим через обобщенные деформации ε_α, ε_β, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\beta\alpha}$, χ_α, χ_β, $\chi_{\alpha\beta}$, $\chi_{\beta\alpha}$, т. е. используя формулы (4.20), в которых не будем учитывать изменение метрики по толщине:

$$e_\alpha=\varepsilon_\alpha+\gamma\,\chi_\alpha\ ;\quad e_\beta=\varepsilon_\beta+\gamma\,\chi_\beta\ ;$$
$$e_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\gamma\,(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}). \qquad (34)$$

Тогда физические соотношения (23) примут вид

$$\sigma_\alpha=A_{11}\left(\varepsilon_\alpha+\gamma\,\chi_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+A_{12}\left(\varepsilon_\beta+\gamma\,\chi_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right);$$
$$\sigma_\beta=A_{21}\left(\varepsilon_\alpha+\gamma\,\chi_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+A_{22}\left(\varepsilon_\beta+\gamma\,\chi_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right);\quad (35)$$
$$\tau_{\alpha\beta}=A_{33}\left[\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\gamma\left(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}\right)+\omega_\alpha\omega_\beta\right].$$

Подставим (35) в (33) и получим

$$N_\alpha=B_{11}\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+B_{12}\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+C_{11}\chi_\alpha+C_{12}\chi_\beta\ ;$$
$$N_\beta=B_{21}\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+B_{22}\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+C_{21}\chi_\alpha+C_{22}\chi_\beta\ ;$$
$$N_{\alpha\beta}=B_{33}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)+C_{33}\left(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}\right)\ ;\quad (36)$$
$$M_\alpha=C_{11}\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+C_{12}\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+D_{11}\chi_\alpha+D_{12}\chi_\beta\ ;$$
$$M_\beta=C_{21}\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+C_{22}\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+D_{21}\chi_\alpha+D_{22}\chi_\beta\ ;$$
$$M_{\alpha\beta}=C_{33}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)+D_{33}\left(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha}\right)\ ;$$
$$Q_\alpha=K_\alpha\psi_\alpha\ ;\ Q_\beta=K_\beta\psi_\beta.$$

С учетом (36) выражение для потенциальной энергии деформации можно записать в следующем виде:

$$U=\frac{1}{2}\int\int\Bigg\{N_\alpha\left(\varepsilon_\alpha+\frac{1}{2}\omega_\alpha^2\right)+N_\beta\left(\varepsilon_\beta+\frac{1}{2}\omega_\beta^2\right)+$$
$$+N_{\alpha\beta}\left(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\omega_\alpha\omega_\beta\right)+M_\alpha\chi_\alpha+M_\beta\chi_\beta+ \qquad (37)$$
$$+\ M_{\alpha\beta}(\chi_{\alpha\beta}+\chi_{\beta\alpha})+Q_\alpha\psi_\alpha+Q_\beta\psi_\beta\Bigg\}\,d\alpha\, d\beta.$$

Функционал (37) является выражением потенциальной энергии деформации, которое следует использовать при решении нелинейных задач о деформировании оболочек с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью.

Оно также необходимо для получения разрешающих уравнений устойчивости оболочек, в расчетных моделях которых учитывается трансверсальный сдвиг.

Библиографические ссылки

1. Новожилов В. В. Теория упругости. Л. : Судпромгиз, 1958.

2. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988.

V. A. Nesterov, A. V. Lopatin

ENERGY DERIVATION OF DEFORMATION OF THE SHELL IN GEOMETRICAL NONLINEAR ARRANGEMENT

In geometrically nonlinear arrangement a variational problem of deformation of shell with low value of transverse shear stiffness is considered. The conclusion of expression of potential energy of deformation which can be used for generation of the equations of stability for shells with low value of transverse shear stiffness.

Keywords: a shell, transverse shear, variational problem.

УДК 535.5; 538

Е. А. Попов

ВЛИЯНИЕ УПРУГОЙ ПОДСИСТЕМЫ МАГНИТНОГО ДИЭЛЕКТРИКА НА ЕГО ОПТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Обсуждаются результаты изменения тонкой структуры оптического спектра антиферромагнитного диэлектрика под действием одноосного давления. По расщеплению и смещению полос поглощения света определены состояния ионов, порождающие серии полос поглощения, оценено изменение компонент кристаллического поля на поглощающем свет ионе.

Ключевые слова: экситон, магнон, поглощение света, антиферромагнетик.

Спектры поглощения света кристаллов, содержащих 3d-, 4f- и другие ионы, формируются из спектров входящих в их состав ионов, изменённых действием кристаллического поля и взаимодействиями между ионами. Положение полос поглощения хорошо описывается в теории поля лигандов [1]. Интенсивность полос поглощения и тонкая структура спектров не объясняется в рамках этой теории и является следствием коллективных возбуждений различных подсистем кристалла (электронной, магнитной, упругой), хотя исходно и порождается прямыми электронными переходами в 3d-, 4f- и других ионах. В антиферромагнитных кристаллах, содержащих $3d^5$-ионы (Mn^{2+}, Fe^{3+}), основное состояние которых ^6S, прямые электронные переходы запрещены по спину и по чётности в электродипольном приближении. Поэтому интенсивные линии в спектрах поглощения света таких кристаллов имеют сложную многочастичную природу. Связать полосы поглощения спектра с конкретными электронными переходами возможно лишь после анализа реакции полос спектра на внешние воздействия. В данной работе рассмотрено изменение спектра оптического поглощения антиферромагнитного кристалла Rb_2MnCl_4 при действии на него одноосного давления с целью выявления прямых источников серий полос поглощения в районе частот ~26 500 см$^{-1}$, образованных с участием перехода $^6A_{1g}(^6S) \rightarrow {}^4T_{2g}(^4D)$ в ионах Mn^{2+}.

Кристаллы Rb_2MnCl_4 при комнатной температуре имеют тетрагональную структуру симметрии D_{4h}^{17}. При температуре ниже $T_N = 57$ К в кристалле устанавливается антиферромагнитный порядок с анизотропией типа лёгкая ось. Магнитные моменты направлены параллельно C_4 оси симметрии кристалла [2]. Элементарная ячейка при переходе из парамагнитного в антиферромагнитное состояние удваивается, а симметрия понижается до ромбической.

Рассмотрим поляризованные спектры поглощения света кристалла Rb_2MnCl_4 в области энергии ~26 000 см$^{-1}$ при температуре $T = 4{,}2$ К при приложенном к нему внешнем одноосном давлении, направленном вдоль оси C_4 (рис. 1). Поглощение света в этой области энергии происходит благодаря переходам $^6A_{1g}(^6S) \rightarrow {}^4T_{2g}(^4D)$ в ионах Mn^{2+}. Поляризация полос поглощения света, связанных с прямыми переходами (экситонными полосами) и парными экситон-магнонными в этой области спектра, должна соответ-