

В. Я. Браверман, В. С. Белозерцев, Н. Н. Горяшин, А. Т. Лелеков

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕНЕНИЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ ЛУЧА ОТНОСИТЕЛЬНО СТЫКА ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ СВАРКЕ<sup>1</sup>

Рассматривается аналитическое описание процессов изменения тормозного рентгеновского излучения от положения луча относительно стыка свариваемых деталей при электронно-лучевой сварке. Математические модели используются для синтеза систем автоматического направления луча.

Ключевые слова: электронно-лучевая сварка, рентгеновское излучение, математическое ожидание положения луча, плотность распределения электронов.

Вопросы обеспечения точного позиционирования луча по стыку свариваемых деталей при электронно-лучевой сварке (ЭЛС) остаются актуальными при сварке протяженных стыков. В качестве источника информации о положении луча относительно стыка можно использовать тормозное рентгеновское излучение, сопутствующее процессу. Рентгеновское излучение (РИ) из зоны сварки, обладающее очевидной информационной насыщенностью, оказывается малоизученным с точки зрения применения его для управления формированием сварного шва. При этом, по сравнению с другими сопутствующими ЭЛС явлениями, РИ наиболее тесно и однозначно связано с процессами в канале проплавления и наименее подвержено влиянию различных дестабилизирующих факторов.

Информацию о положении электронного луча относительно стыка свариваемых соединений в процессе ЭЛС можно получить как из канала проплавления, так и в непосредственной близости от него. Последнее может быть реализовано, например, кратковременным выводом луча из канала, осуществлением измерительных операций и возвращением луча в зону сварки [1]. Очевидно, время вывода должно быть таким, чтобы не произошло заметных изменений в сварочной ванне. В связи с этим рассматривается возможность получения информации при отсутствии оплавления.

Интенсивность РИ определяется выражением [2]

$$J = K \cdot C \cdot U^2 \cdot Z \cdot I, \quad (1)$$

где  $K$  – коэффициент, учитывающий долю рентгеновского излучения, прошедшего через площадь кристалла датчика [3];  $C$  – коэффициент пропорциональности;  $U$  – ускоряющее напряжение;  $I$  – ток луча;  $Z$  – атомный номер мишени – свариваемых деталей.

Плотность тока в пучке электронов неодинакова по его сечению и носит вероятностный характер (рис. 1). В практике ЭЛС часто свариваются разнородные материалы, разнотолщинные детали, а конструктивные элементы и погрешности сборки соединения могут оказывать влияние на характер распространения и величину интенсивности РИ, возникающего при ЭЛС и регистрируемое датчиком. В связи с этим, ток пучка электронов представляется через функцию распределения электро-

нов по соответствующим осям и выражение (1) примет вид

$$J = K \cdot C \cdot U^2 \cdot I \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, y) \cdot \varphi(x, y) \cdot j_n(x, y) dx dy, \quad (2)$$

где  $\varphi(x, y)$  – коэффициент, зависящий от конструктивных особенностей свариваемого соединения;  $Z(x, y)$  – атомный номер свариваемых деталей;  $j_n$  – плотность распределения электронов в луче в координатах  $x, y$ , причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} j_n(x, y) dx dy = 1.$$

Плотность  $j_n(x, y)$  представляют нормальным законом распределения:

$$j_n(x, y) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \varepsilon_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \times \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - \varepsilon_y)^2}{2\sigma_y^2}\right], \quad (3)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y$  – среднеквадратические отклонения электронов от оси пучка по соответствующим осям;  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  – математические ожидания (положение оси луча в координатах  $x, y$ ) (рис. 1).

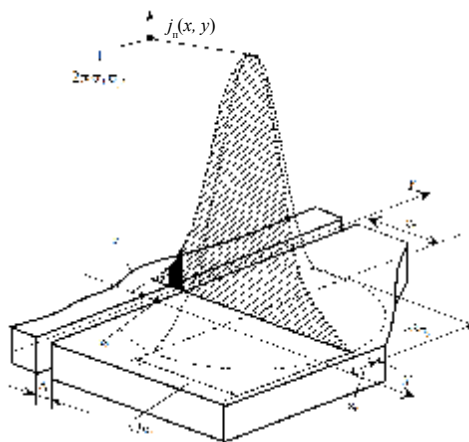


Рис. 1. К расчету интенсивности рентгеновского излучения при различных положениях луча относительно стыка

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-00179) и АВИЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2957).

В пределах пятна нагрева поверхность свариваемых деталей можно считать однородной в направлении оси  $OY$ . Тогда функции  $\varphi(x, y)$  и  $Z(x, y)$  не зависят от  $y$ , т. е.  $\varphi(x, y) = \varphi(x)$  и  $Z(x, y) = Z(x)$ . Подставляя в формулу (2) значение  $j_n(x, y)$  из выражения (3) и учитывая, что

$$\frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(y - \varepsilon_y)^2}{2\sigma_y^2} \right] dy = 1,$$

как интеграл от плотности распределения в бесконечных пределах, получим

$$J(\varepsilon) = K \cdot C \cdot U^2 \cdot \frac{I}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{\infty} Z(x) \cdot \varphi(x) \cdot \exp \left[ -\frac{(x - \varepsilon)^2}{2\sigma^2} \right] dx, \quad (4)$$

где  $\sigma = \sigma_x$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_x$ .

Выражение (4) в общем виде определяет зависимость интенсивности РИ от положения луча относительно стыка при отсутствии оплавления свариваемых кромок. Ниже рассмотрены некоторые частные случаи, представляющие практический интерес.

Для стыка, изображенного на рис. 1, при регистрации РИ датчиком, расположенным со стороны ввода луча, нет элементов, изменяющих направление распространения или интенсивность излучения (кроме зазора), поэтому  $\varphi(x) = 1$ . Интенсивность РИ с поверхности свариваемых деталей определяется в соответствии с формулой (1). Излучение из зазора в стыке ( $\Delta = x_2 - x_1$ ) практически отсутствует, так как в условиях ЭЛС зазор – это глубокий вакуум. В связи с этим,  $Z(x)$  может быть представлен следующим образом:

$$Z(x) = \begin{cases} Z_1 & -\infty \leq x \leq x_1, \\ 0 & x_1 < x < x_2, \\ Z_2 & x_1 \leq x \leq \infty, \end{cases} \quad (5)$$

где  $Z_1$  и  $Z_2$  – атомные номера свариваемых материалов. Тогда

$$J = K \cdot C \cdot U^2 \cdot I \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times \left\{ Z_1 \cdot \int_{-\infty}^{x_1} \exp \left[ -\frac{(x - \varepsilon)^2}{2\sigma^2} \right] dx + Z_2 \cdot \int_{x_2}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x - \varepsilon)^2}{2\sigma^2} \right] dx \right\}. \quad (6)$$

Если свариваемые материалы однородны, то  $Z_1 = Z_2 = Z$  и выражение интенсивности РИ будет иметь вид

$$J = K \cdot C \cdot U^2 \cdot I \cdot Z \times \left\{ 1 - \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp \left[ -\frac{(x - \varepsilon)^2}{2\sigma^2} \right] dx \right\}, \quad (7)$$

Результаты расчетов по формуле (7) представлены на рис. 2. Здесь  $J_{отн} = J/K \cdot C \cdot U^2 \cdot I \cdot Z$ . Видно, что зависимости носят экстремальный характер. Экстремум (минимум) соответствует совпадению координат луча и стыка, следовательно, может служить критерием наведения луча на стык.

Расчеты показывают, что при реальных зазорах в стыке (до 0,1 мм) относительное изменение интенсивности РИ оказывается в пределах 0,03...0,6 при изменении  $\Delta$  от 0,01 до 0,1 мм. Это свидетельствует о необходимости применения специальных средств для надежного выделения информации о положении луча относительно стыка.

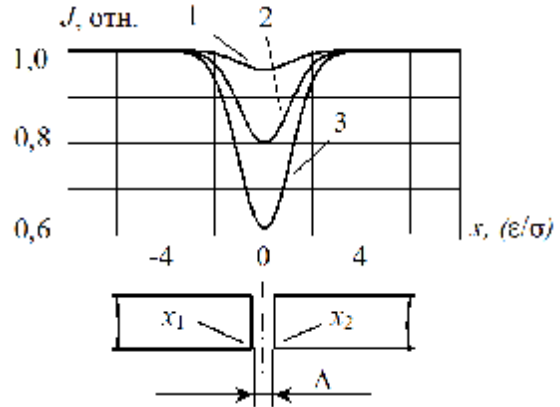


Рис. 2. Зависимость интенсивности рентгеновского излучения от положения луча относительно стыка:  $\sigma = \text{const} = 0,1 \text{ мм}$ ;  $\Delta = \text{var}$ ; 1 –  $\Delta/\sigma = 0,1$ ; 2 –  $\Delta/\sigma = 0,5$ ; 3 –  $\Delta/\sigma = 1$

Относительное изменение интенсивности РИ возрастает с уменьшением  $\sigma$ . Это может служить критерием степени фокусировки электронного луча (при минимально возможном диаметре луча для данной электронно-лучевой пушки максимум относительного изменения интенсивности будет соответствовать острой фокусировке луча на поверхности свариваемых деталей).

В случае ЭЛС разнородных металлов расчет характеристик производится по выражению (6). Результаты расчета для ЭЛС меди ( $Z_1 = 29$ ) и стали ( $Z_2 = 26$ ) приведены на рис. 3. Для графика на рис. 3, а

$$J'_{отн} = \frac{J\sigma\sqrt{2\pi}}{K \cdot C \cdot U^2 \cdot I}.$$

Для удобства анализа результатов  $J'_{отн}$  отнесено к значению  $J'_{отн}$  при  $\varepsilon = \text{const} = -0,4 \text{ мм}$  (луч находится на медной детали):

$$J_{отн} = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ Z_1 \cdot \int_{-\infty}^{x_1} \exp \left[ -\frac{(x - \varepsilon)^2}{2\sigma^2} \right] dx + Z_2 \cdot \int_{x_2}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x - \varepsilon)^2}{2\sigma^2} \right] dx \right\}}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot Z_1 \cdot \int_{-\infty}^{x_1} \exp \left[ -\frac{(x - 0,4)^2}{2\sigma^2} \right] dx}.$$

График, соответствующий последнему соотношению показан на рис. 3, б. Согласно графикам (рис. 3) при ЭЛС разнородных металлов ветви характеристик имеют разные наклоны. Металлу с большим атомным номером соответствует больший наклон. Это вполне согласуется с формулой (1) – интенсивность РИ пропорциональна атомному номеру элемента, на котором тормозится электронный луч. По этой же причине значения насыщения интенсивности при полном выходе луча на одну из дета-

лей отличаются на величину, зависящую от атомного номера материала. В относительных единицах эти значения для Cu и Fe равны их атомным номерам – 29 и 26 соответственно (рис. 3, а).

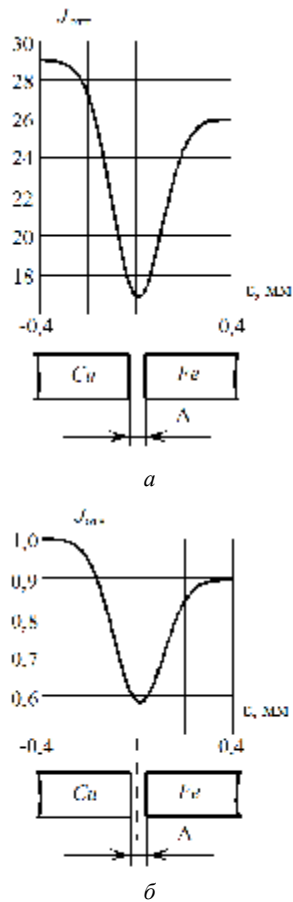


Рис. 3. Зависимость интенсивности рентгеновского излучения от положения луча относительно стыка при ЭЛС разнородных металлов

Другой особенностью этих характеристик является смещение экстремума по оси абсцисс в сторону материала с меньшим атомным номером. Это можно объяснить следующим образом. При отсутствии зазора интенсивность РИ в относительных единицах изменяется от 29 (Cu) до 26 (Fe), и характеристика в этом случае не экстремальная. При наличии зазора в стыке часть электронов луча не участвует в создании РИ, и интенсивность излучения при некотором положении луча может оказаться меньше 26, а затем увеличится до 26 – появляется экстремум. Координата экстремума определяется равенством излучения с соответствующих поверхностей, которое пропорционально току пучка электронов, а следовательно, и площади пятна, находящейся на данном металле. Так как  $Z_{Cu} > Z_{Fe}$ , то для выполнения названного равенства необходимо, чтобы площадь пятна на стальной детали была больше площади пятна на медной детали. В связи с этим, луч должен быть смещен в сторону стальной детали. Следовательно, положение стыка не совпадает с положением экстремума характеристики, что необходимо учитывать при ЭЛС разнородных материалов.

Зависимости интенсивности РИ от положения луча относительно стыка при ЭЛС разнородных материалов

представлены на рис. 4. Видно, что заметные рассогласования положений экстремума характеристик и стыка проявляются при отношении  $\Delta/\sigma \leq 1$ . Такой случай является наиболее распространенным на практике и еще раз подтверждает необходимость учета этого рассогласования.

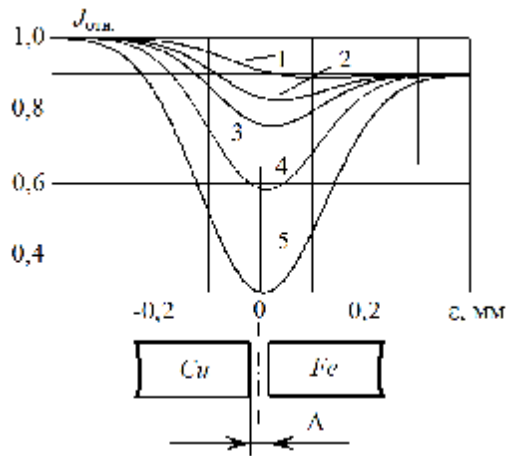


Рис. 4. Зависимости РИ от положения луча относительно стыка (ЭЛС разнородных металлов):  $\sigma = 0,1$  мм; 1 –  $\Delta = 0,01$  мм; 2 –  $\Delta = 0,03$  мм; 3 –  $\Delta = 0,05$  мм; 4 –  $\Delta = 0,1$  мм; 5 –  $\Delta = 0,2$  мм

Дифференцируя выражение (6) по  $\epsilon$  и приравняв производную нулю, можно найти  $\epsilon_0$  – абсциссу экстремума и зависимость ее от зазора в стыке  $\Delta$ :

$$\epsilon_0 \approx \frac{0,0011}{\Delta}, \quad (8)$$

т. е. абсцисса экстремума при ЭЛС разнородных металлов связана с зазором в стыке гиперболическим законом. При зазорах, меньших 0,01 мм, рассогласование положений экстремума и стыка могут составлять заметные величины и вызывать значительные погрешности позиционирования луча по положению экстремума.

Значения смещения экстремума для некоторых значений зазора в стыке при ЭЛС меди и стали ( $\sigma = 0,1$  мм) приведены в таблице.

Рассмотрим случаи, когда имеется превышение кромок или ЭЛС ведется по технологическим буртам (присадочным или маркировочным, определяющим положение стыка закрытого соединения). Изменение интенсивности излучения происходит в результате того, что часть рентгеновских лучей ослабляется слоем материала бурта (рис. 5). Поэтому представляет практический интерес определение  $\phi(x)$  – зависимости коэффициента ослабления от положения луча относительно такого элемента.

При прохождении лучом пути от  $\epsilon = 0$  до  $\epsilon_{max} = zr/H$  часть РИ при прохождении пути до датчика ослабляется в слое  $l$  материала бурта (рис. 5). Этот слой изменяется от  $l_{max}$  при  $\epsilon = 0$  до 0 при  $\epsilon = \epsilon_{max} = zr/H$ . Из геометрических построений можно определить  $l$ :

$$l = \sqrt{\left(\frac{rz - \epsilon H}{H + z}\right)^2 + \left[\frac{rz - \epsilon H}{(R + \epsilon) \sin \gamma}\right]^2}. \quad (8)$$

В связи с наличием перепада уровней поверхностей, на которых возникает РИ, необходимо учитывать телесные углы на кристалл датчика из точки взаимодействия

луча с поверхностью. На интервале  $(-\Delta, -\Delta/2)$  коэффициент  $K$  (выражение (1)) определяется следующим образом:

$$K_1 = \frac{\arctg^2 \frac{r}{\sqrt{H^2 + \text{ctg}^2 \gamma (H+z)}}}{\pi};$$

на интервале  $(-\Delta/2, +\Delta)$   $K$  определяется

$$K_2 = \frac{\arctg^2 \frac{r}{\frac{H}{\sin \gamma} + \frac{z}{\sin \gamma}}}{\pi}.$$

При выводе последних выражений принято равенство телесных углов.

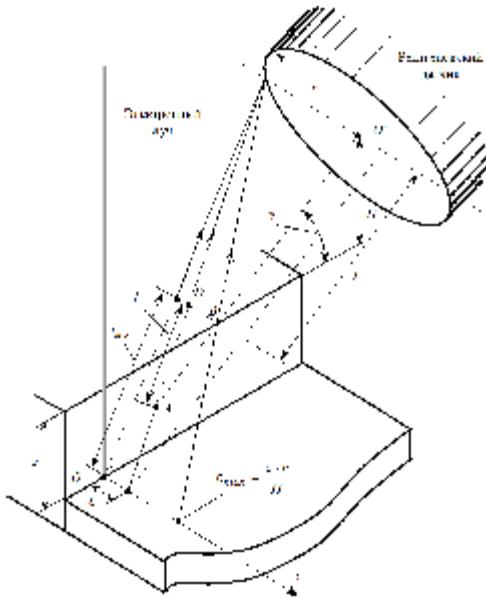


Рис. 5. К определению  $\varphi(x)$

Учитывая вышесказанное, зависимость интенсивности РИ от положения луча относительно стыка с превышением кромок будет иметь следующий вид:

$$J_{\text{отн}} = K_1 \int_{-\infty}^{\frac{\Delta}{2}} e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{2\sigma^2}} dx + K_2 e^{-(\mu l)} \times \left[ \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\frac{zr}{H}} e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{2\sigma^2}} dx + K_2 \int_{\frac{zr}{H}}^{\infty} e^{-\frac{(x-\varepsilon)^2}{2\sigma^2}} dx \right] \quad (9)$$

где  $\mu$  – коэффициент линейного ослабления рентгеновского излучения, прошедшего слой материала  $l$  [4].

Графики, построенные в соответствии с выражением (9), представлены на рис. 6. Характеристики имеют различный наклон ветвей. Со стороны верхней кромки ветви характеристик круче, чем со стороны нижней кромки. Это можно объяснить тем, что при переходе луча с верхней кромки на нижнюю излучение ослабляется не только

наличием зазора в стыке, но и ослаблением его на пути к датчику в материале верхней кромки.

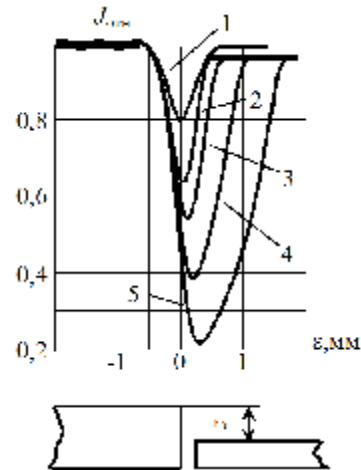


Рис. 6. Зависимость РИ от положения луча относительно стыка с превышением кромок:  $\sigma = 0,2$  мм;  $\Delta = 0,1$  мм;  $1 - z = 0$ ;  $2 - z = 2$ ;  $3 - z = 3$ ;  $4 - z = 5$ ;  $5 - z = 8$  мм

С увеличением  $z$  увеличивается смещение экстремума от стыка. Анализ соотношений (8) и (9) показывает, что смещение координаты экстремума  $\varepsilon_0$  пропорционально радиусу  $r$  кристалла датчика, превышению кромок  $z$  и обратно пропорционально расстоянию  $H$  датчика до верхней кромки:

$$\varepsilon_0 \approx rz/H.$$

Отсюда видно, что превышение кромок не будет влиять на положение экстремума, если датчик обладает точечными размерами. Однако уменьшение размеров датчика приведет к уменьшению коэффициента передачи. Увеличение расстояния до верхней кромки также приводит к уменьшению коэффициента передачи датчика.

Интенсивность излучения с нижней кромки оказывается меньше интенсивности с верхней кромки. Это также объясняется меньшими телесными углами при взаимодействии луча с нижней кромкой стыка.

Анализ приведенных характеристик свидетельствует о возможности получения информации о положении луча относительно стыка с превышением кромок, однако необходимо учитывать смещение экстремума с увеличением превышения.

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

Характер изменения интенсивности рентгеновского излучения аналогичен закономерностям изменения вторично-эмиссионного тока при изменении положения электронного луча относительно стыка.

Экстремальный характер зависимости рентгеновского излучения от положения луча относительно стыка свидетельствует об очевидной возможности технической реализации поиска экстремума известными методами и оп-

Значения смещений экстремума  $\varepsilon_0$  от зазора  $\Delta$  в стыке (ЭЛС меди и стали)

$\Delta$ , мм	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,2
$\varepsilon_0$ , мм	1,1	0,22	0,11	0,022	0,011	0,005 5

ределения, тем самым, положения луча относительно стыка.

Определение положения стыка при ЭЛС разнородных металлов, а также стыков с превышением кромок и другими околостыковыми конструктивными элементами, в случае отсутствия оплавления, требует учета смещения экстремума характеристик относительно стыка, особенно при ЭЛС разнородных металлов с малыми зазорами (что часто встречается на практике).

Относительное изменение интенсивности рентгеновского излучения при перемещении луча относительно стыка может служить критерием фокусировки луча на поверхности свариваемых деталей при регистрации излучения без оплавления кромок, а также критерием чувствительности датчика к перемещению луча относительно стыка.

## Библиографический список

1. Reichmann, A. State of the art of a FEP control unit of beam scanning for electron beam equipment / A. Reichmann, D. Leffler, R. Bartel // 6<sup>th</sup> Intern. conf. on Beam Technology. Halle (Saale). 2004. P. 102–107.
2. Хараджа, Ф. Н. Общий курс рентгенотехники / Ф. Н. Хараджа. М. : Энергия, 1966.
3. Быстров, Ю. А. Ускорительная техника и рентгеновские приборы / Ю. А. Быстров, С. А. Иванов. М. : Высш. шк., 1983.
4. Браверманн, В. Я. Экспериментальные исследования рентгеновского излучения при электронно-лучевой сварке / В. Я. Браверманн, В. С. Белозерцев, А. Н. Успенский // Вестник Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева : сб. науч. тр. : под ред. проф. Г. П. Белякова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Вып. 6. Красноярск, 2005. С. 196–200.

V. Ya. Braverman, V. S. Belozertsev, N. N. Goryashin, A. T. Lelekov

## MATHEMATICAL MODELS FOR THE PROCESS OF CHANGING THE X-RAY RADIATION FROM THE BEAM POSITION RELATIVELY THE SEAM DURING THE ELECTRON BEAM WELDING

*We provide an analytical description of changing the braking X-ray radiation processes based on the beam position along the seam of the welded parts during the Electron Beam Welding. The quantitative models are used for the synthesis of the automatic beam positioning systems.*

*Keywords: electron beam welding, X-ray radiation, mathematical expectation of beam position, electron density of distribution.*

УДК 621.833

К. Я. Иванов

## ОПТИМИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОНИЧЕСКО-ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕДУКТОРА

*Рассматривается оптимизация основных параметров коническо-цилиндрического редуктора. Приводится методика оптимизации, основанная на разбивке общего передаточного отношения по ступеням редуктора.*

*Ключевые слова: коническо-цилиндрический редуктор, двухступенчатый редуктор, разбивка передаточного отношения по ступеням редуктора.*

Основная задача при проектировании зубчатых редукторов – разработка конструктивных условий формирования параметров ступеней и передаточного отношения каждой ступени. Разбивка общего передаточного отношения редуктора зависит от требований, которые предъявляются к данной конструкции.

Критериями оптимизации наиболее часто выступают следующие:

- стоимость конструкции;
- минимальные габаритные размеры;
- минимальная масса;
- минимальный приведенный момент инерции редуктора;
- минимальная кинематическая погрешность редуктора.

Рассмотрим методику определения оптимальных параметров коническо-цилиндрического редуктора. Основным условием работоспособности редуктора является условие контактной прочности колес, которое одновременно предусматривает минимальную массу. Поэтому металлоемкость и стоимость редуктора будут зависеть от габаритных размеров редуктора: длины  $L$ , высоты  $H$ ; ширины  $B$ .

Необходимо учитывать, что на величину оптимального передаточного отношения ступени оказывают непосредственное влияние такие параметры, как коэффициент ширины зубчатого венца цилиндрической передачи –  $\psi_{ba}$ , коэффициент ширины зубчатого венца конической передачи –  $\psi_{bRe}$ , контактное напряжение колес –