УДК 534.121.1

П. О. Деев

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТОЧКЕ

Представлено решение задачи определения основной частоты колебаний трехслойной пластины, жестко закрепленной в центральной точке. Для решения динамической задачи применен обобщенный метод Галеркина. Получена формула для определения основной частоты колебаний трехслойной пластины, закрепленной в центральной точке.

Ключевые слова: трехслойная пластина, частота колебаний, обобщенный метод Галеркина.

Важным критерием эффективности конструкции трехслойной пластины является основная частота ее колебаний. Ниже будет представлено решение задачи определения основной частоты колебаний для трехслойной пластины, закрепленной в центральной точке.

Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину, в центре которой расположим начало декартовой системы координат xy. Размеры пластины по осям и обозначим $\overline{a}$ и $\overline{b}$ соответственно. В центральной точке отсутствуют прогиб и углы поворота касательных к координатным линиям x и y.

Получим вариационное уравнение изгибных колебаний пластины в предположении, что линии $x=0$ и $y=0$ являются линиями симметрии. В этом случае можно исследовать движение только четверти пластины.

Воспользуемся для получения уравнения колебаний принципом Гамильтона:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt\,, \qquad (1)$$

где S – интеграл действия Гамильтона; t – время; (t_2-t_1) – интервал времени, в течение которого происходит движение четверти пластины; T – кинетическая энергия движения четверти пластины; U – потенциальная энергия изгиба четверти пластины: здесь T и U определяются следующим образом [1]:

$$T=\frac{1}{2}\omega^2B_\rho\int_0^a\int_0^b w^2dxdy\,,$$

$$\begin{aligned}U=\int_0^a\int_0^b\Bigg[&D_{11}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2+2D_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+D_{22}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2+\\&+D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2+K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\Bigg]dxdy,\end{aligned} \qquad (2)$$

где $w=w(x,y)$ – прогиб пластины; $\theta_x=\theta_x(x,y)$, $\theta_y=\theta_y(x,y)$ – углы поворота нормали; D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, D_{33} – изгибные жесткости трехслойной пластины $(D_{12}=D_{21})$; K_x, K_y – сдвиговые жесткости трехслойной пластины; B_ρ – инерциальный параметр. Функции w, θ_x и θ_y определяют форму трехслойной пластины при изгибных колебаниях.

Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{aligned}\int_0^a\int_0^b\Bigg[&\left(D_{11}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)+\left(D_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+D_{22}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)+\\&+D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}\right)+D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y}+\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)+\\&+K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\theta_x+K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\\&+K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\theta_y+K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\omega^2B_\rho w\delta w\Bigg]dxdy\,.\end{aligned} \qquad (3)$$

Варьируя функционал (3), будем иметь

$$\begin{aligned}&\int_0^a\int_0^b L\delta w dxdy-\int_0^b\left[Q_x\delta w\right]_0^a dy-\int_0^a\left[Q_y\delta w\right]_0^b dx=0\,,\\&\int_0^a\int_0^b L_x\delta\theta_x dxdy-\int_0^b\left[M_x\delta\theta_x\right]_0^a dy-\int_0^a\left[M_{xy}\delta\theta_x\right]_0^b dx=0\,,\\&\int_0^a\int_0^b L_y\delta\theta_y dxdy-\int_0^b\left[M_{xy}\delta\theta_y\right]_0^a dy-\int_0^a\left[M_y\delta\theta_y\right]_0^b dx=0\,,\end{aligned} \qquad (4)$$

где

$$\begin{aligned}&L=K_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+K_x\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+K_y\frac{\partial\theta_y}{\partial y}+B_\rho\omega^2 w\,;\\&L_x=-K_x\frac{\partial w}{\partial x}+D_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+D_{33}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial y^2}-\\&\quad-K_x\theta_x+\left(D_{12}+D_{33}\right)\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x\partial y};\\&L_y=-K_y\frac{\partial w}{\partial y}+\left(D_{12}+D_{33}\right)\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x\partial y}+\\&\quad+D_{33}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2\theta_y}{\partial y^2}-K_y\theta_y\,;\\&Q_x=K_x\left(\theta_x+\frac{\partial w}{\partial x}\right);\\&Q_y=K_y\left(\theta_y+\frac{\partial w}{\partial y}\right);\end{aligned} \qquad (5)$$

$$M_{xy} = D_{33}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right);$$

$$M_x = D_{11}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial\theta_y}{\partial y};$$

$$M_y = D_{12}\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial\theta_y}{\partial y}. \qquad (6)$$

Уравнения (4) являются основными вариационными уравнениями, которым должны удовлетворять собственные функции $w(x,y)$, $\theta_x(x,y)$ и $\theta_y(x,y)$, от которых зависит форма действительных изгибных колебаний трехслойной пластины.

Определение основной частоты колебаний трехслойной пластины, закрепленной в центральной точке, может быть выполнено и с помощью эффективных приближенных методов, одним из которых является обобщенный метод Галеркина. В рамках этого метода прогиб $w(x,y)$ и углы поворота $\theta_x(x,y)$ и $\theta_y(x,y)$ заменяются аналитическими выражениями, аппроксимирующими первую форму колебаний пластины вдоль осей x и y. В качестве выражений, задающих возможную первую форму пластины, закрепленной в центральной точке вдоль осей x и y, можно принять функции, полученные из решения задачи изгиба консольно закрепленной балки под действием постоянного давления.

Представим прогиб и углы поворота в следующем виде:

$$w = AU_x + BU_y + CU_xU_y,$$

$$\theta_x = DV_x + PV_xU_y, \qquad (7)$$

$$\theta_y = FV_y + TU_xV_y,$$

где A, B, C, D, P, F, T – неизвестные числа; $U_x(x)$, $V_x(x)$, $U_y(y)$, $V_y(y)$ – аппроксимирующие функции, которые задаются выражениями

$$U_x(x) = \frac{x}{a}\left[\frac{x^3}{a^3} - 4\frac{x^2}{a^2} + 6\frac{x}{a} - 12\gamma_x\left(\frac{x}{a} - 2\right)\right],$$

$$V_x(x) = \frac{x}{a}\left(\frac{x^2}{3a^2} - \frac{x}{a} + 1\right), \qquad (8)$$

$$U_y(y) = \frac{y}{b}\left[\frac{y^3}{b^3} - 4\frac{y^2}{b^2} + 6\frac{y}{b} - 12\gamma_y\left(\frac{y}{b} - 2\right)\right],$$

$$V_y(y) = \frac{y}{b}\left(\frac{y^2}{3b^2} - \frac{y}{b} + 1\right)$$

здесь

$$\gamma_x = \frac{D_{11}}{K_x a^2}, \quad \gamma_y = \frac{D_{22}}{K_y b^2}. \qquad (9)$$

Вариации функций прогиба и углов поворота будут иметь вид

$$\delta w = U_x\delta A + U_y\delta B + U_xU_y\delta C,$$

$$\delta\theta_x = V_x\delta D + V_xU_y\delta P, \qquad (10)$$

$$\delta\theta_y = V_y\delta F + U_xV_y\delta T.$$

Подставив (10) в (4), после группировки получим

$$\int_0^a\int_0^b LU_x\delta A\,dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_x\delta A\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_x\delta A\right]_0^b dx +$$
$$+\int_0^a\int_0^b LU_y\delta B\,dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_y\delta B\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_y\delta B\right]_0^b dx +$$
$$+\int_0^a\int_0^b LU_xU_y\delta C\,dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_xU_y\delta C\right]_0^a dy -$$
$$-\int_0^a\left[Q_yU_xU_y\delta C\right]_0^b dx = 0,$$

$$\int_0^a\int_0^b L_xV_x\delta D\,dxdy - \int_0^b\left[M_xV_x\delta D\right]_0^a dy -$$
$$-\int_0^a\left[M_{xy}V_x\delta D\right]_0^b dx + \int_0^a\int_0^b L_xV_xU_y\delta P\,dxdy - \qquad (11)$$
$$-\int_0^b\left[M_xV_xU_y\delta P\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_{xy}V_xU_y\delta P\right]_0^b dx = 0,$$

$$\int_0^a\int_0^b L_yV_y\delta F\,dxdy - \int_0^b\left[M_{xy}V_y\delta F\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_yV_y\delta F\right]_0^b dx +$$
$$+\int_0^a\int_0^b L_yU_xV_y\delta T\,dxdy - \int_0^b\left[M_{xy}U_xV_y\delta T\right]_0^a dy -$$
$$-\int_0^a\left[M_yU_xV_y\delta T\right]_0^b dx = 0.$$

Учитывая произвольность вариаций δA, δB, δC, δD, δP, δF, δT, получим систему из семи разрешающих уравнений обобщенного метода Галеркина с естественными граничными условиями:

$$\int_0^a\int_0^b LU_x\,dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_x\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_x\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b LU_y\,dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_y\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b L_xV_x\,dxdy - \int_0^b\left[M_xV_x\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_{xy}V_x\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b L_yV_y\,dxdy - \int_0^b\left[M_{xy}V_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_yV_y\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b LU_xU_y\,dxdy - \int_0^b\left[Q_xU_xU_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[Q_yU_xU_y\right]_0^b dx = 0, \qquad (12)$$
$$\int_0^a\int_0^b L_xV_xU_y\,dxdy - \int_0^b\left[M_xV_xU_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_{xy}V_xU_y\right]_0^b dx = 0,$$
$$\int_0^a\int_0^b L_yU_xV_y\,dxdy - \int_0^b\left[M_{xy}U_xV_y\right]_0^a dy - \int_0^a\left[M_yU_xV_y\right]_0^b dx = 0,$$

где

$$L = K_x\frac{d^2U_x}{dx^2}A + K_x\frac{d^2U_x}{dx^2}U_yC + K_y\frac{d^2U_y}{dy^2}B +$$

$$+ K_y \frac{d^2U_y}{dy^2} U_x C + K_x \frac{dV_x}{dx} D + K_x \frac{dV_x}{dx} U_y P +$$

$$+K_y \frac{dV_y}{dy} F + K_y \frac{dV_y}{dy} U_x T + B_\rho \omega^2 \left(AU_x + BU_y + CU_x U_y \right);$$

$$L_x = -K_x \frac{dU_x}{dx} A - K_x \frac{dU_x}{dx} U_y C + D_{11} \frac{d^2V_x}{dx^2} D +$$

$$+ D_{11} \frac{d^2V_x}{dx^2} U_y P + D_{33} \frac{d^2U_y}{dy^2} V_x P - K_x V_x D - \qquad (13)$$

$$-K_x U_y V_x P + \left(D_{12} + D_{33} \right) \frac{dV_y}{dy} \frac{dU_x}{dx} T ;$$

$$L_y = -K_y \frac{dU_y}{dy} B - K_y \frac{dU_y}{dy} U_x C + \left(D_{12} + D_{33} \right) \times$$

$$\times \frac{dU_y}{dy} \frac{dV_x}{dx} P + D_{33} \frac{d^2U_x}{dx^2} V_y T + D_{22} \frac{d^2V_y}{dy^2} F +$$

$$+D_{22} \frac{d^2V_y}{dy^2} U_x T - K_y V_y F - K_y V_y U_x T ;$$

$$Q_x = K_x \left(DV_x + PV_x U_y + A \frac{dU_x}{dx} + C \frac{dU_x}{dx} U_y \right);$$

$$Q_y = K_y \left(FV_y + TU_x V_y + B \frac{dU_y}{dy} + C \frac{dU_y}{dy} U_x \right);$$

$$M_{xy} = D_{33} \left(P \frac{dU_y}{dy} V_x + T \frac{dU_x}{dx} V_y \right); \qquad (14)$$

$$M_x = D_{11} D \frac{dV_x}{dx} + D_{11} P \frac{dV_x}{dx} U_y + D_{12} F \frac{dV_y}{dy} + D_{12} T \frac{dV_y}{dy} U_x ;$$

$$M_y = D_{12} D \frac{dV_x}{dx} + D_{12} P \frac{dV_x}{dx} U_y + D_{22} F \frac{dV_y}{dy} + D_{22} T \frac{dV_y}{dy} U_x .$$

С учетом (14) разрешающая система уравнений примет вид

$$\int_0^a \int_0^b \Bigg[K_x \frac{d^2U_x}{dx^2} U_x A + K_x \frac{d^2U_x}{dx^2} U_y U_x C + K_y \frac{d^2U_y}{dy^2} U_x B +$$

$$+K_y \frac{d^2U_y}{dy^2} U_x^2 C + K_x \frac{dV_x}{dx} U_x D + K_x \frac{dV_x}{dx} U_y U_x P + K_y \frac{dV_y}{dy} U_x F +$$

$$+K_y \frac{dV_y}{dy} U_x^2 T + B_\rho \omega^2 \left(AU_x^2 + BU_x U_y + CU_x^2 U_y \right) \Bigg] dxdy -$$

$$-\int_0^b \Bigg[K_x D V_x U_x + K_x P V_x U_y V_x + K_x A \frac{dU_x}{dx} U_x + K_x C \frac{dU_x}{dx} U_x U_y \Bigg]_0^a dy -$$

$$-\int_0^a \Bigg[K_y F V_y U_x + K_y T U_x^2 V_y + K_y B \frac{dU_y}{dy} U_x + K_y C \frac{dU_y}{dy} U_x^2 \Bigg]_0^b dx = 0 ,$$

$$\int_0^a \int_0^b \Bigg[K_x \frac{d^2U_x}{dx^2} U_y A + K_x \frac{d^2U_x}{dx^2} U_y^2 C + K_y \frac{d^2U_y}{dy^2} U_y B +$$

$$+K_y \frac{d^2U_y}{dy^2} U_x U_y C + K_x \frac{dV_x}{dx} U_y D + K_x \frac{dV_x}{dx} U_y^2 P + K_y \frac{dV_y}{dy} U_y F +$$

$$+K_y \frac{dV_y}{dy} U_x U_y T + B_\rho \omega^2 \left(AU_x U_y + BU_y^2 + CU_x U_y^2 \right) \Bigg] dxdy -$$

$$-\int_0^b \Bigg[K_x D V_x U_y + K_x P V_x U_y^2 + K_x A \frac{dU_x}{dx} U_y + K_x C \frac{dU_x}{dx} U_y^2 \Bigg]_0^a dy -$$

$$-\int_0^a \Bigg[K_y F V_y U_y + K_y T U_x V_y U_y + K_y B \frac{dU_y}{dy} U_y +$$

$$+ K_y C \frac{dU_y}{dy} U_x U_y \Bigg]_0^b dx = 0;$$

$$\int_0^a \int_0^b \Bigg[K_x \frac{d^2U_x}{dx^2} U_y U_x A + K_x \frac{d^2U_x}{dx^2} U_y^2 U_x C + K_y \frac{d^2U_y}{dy^2} U_y U_x B +$$

$$+K_y \frac{d^2U_y}{dy^2} U_x^2 U_y C + K_x \frac{dV_x}{dx} U_y U_x D + K_x \frac{dV_x}{dx} U_y^2 U_x P +$$

$$+K_y \frac{dV_y}{dy} U_y U_x F + K_y \frac{dV_y}{dy} U_x^2 U_y T + B_\rho \omega^2 \times$$

$$\times \left(AU_x^2 U_y + BU_x U_y^2 + CU_x^2 U_y^2 \right) \Bigg] dxdy -$$

$$-\int_0^b \Bigg[K_x D V_x U_x U_y + K_x P V_x U_x U_y^2 + K_x A \frac{dU_x}{dx} \times$$

$$\times U_x U_y + K_x C \frac{dU_x}{dx} U_x U_y^2 \Bigg]_0^a dy -$$

$$-\int_0^a \Bigg[K_y F V_y U_x U_y + K_y T U_x^2 V_y U_y + K_y B \frac{dU_y}{dy} \times$$

$$\times U_x U_y + K_y C \frac{dU_y}{dy} U_x^2 U_y \Bigg]_0^b dx = 0;$$

$$\int_0^a \int_0^b \Bigg[-K_x \frac{dU_x}{dx} V_x A - K_x \frac{dU_x}{dx} V_x U_y C + D_{11} \frac{d^2V_x}{dx^2} V_x D +$$

$$+ D_{11} \frac{d^2V_x}{dx^2} U_y V_x P + D_{33} \frac{d^2U_y}{dy^2} V_x^2 P - K_x V_x^2 D -$$

$$-K_x U_y V_x^2 P + \left(D_{12} + D_{33} \right) \frac{dV_y}{dy} \frac{dU_x}{dx} V_x T \Bigg] dxdy -$$

$$-\int_0^b \Bigg[D_{11} D \frac{dV_x}{dx} V_x + D_{11} P \frac{dV_x}{dx} U_y V_x + D_{12} F \frac{dV_y}{dy} V_x + D_{12} T \frac{dV_y}{dy} U_x V_x \Bigg]_0^a dy -$$

$$-\int_0^a \Bigg[D_{33} P \frac{dU_y}{dy} V_x^2 + D_{33} T \frac{dU_x}{dx} V_y V_x \Bigg]_0^b dx = 0 ;$$

$$\int_0^a \int_0^b \Bigg[-K_x \frac{dU_x}{dx} V_x U_y A - K_x \frac{dU_x}{dx} V_x U_y^2 C + D_{11} \frac{d^2V_x}{dx^2} V_x U_y D +$$

$$+D_{11} \frac{d^2V_x}{dx^2} U_y^2 V_x P + D_{33} \frac{d^2U_y}{dy^2} V_x^2 U_y P - K_x V_x^2 U_y D -$$

$$- K_x U_y^2 V_x^2 P + \left(D_{12}+D_{33}\right)\frac{dV_y}{dy}\frac{dU_x}{dx}V_xU_yT\Bigg]dxdy -$$

$$-\int_0^b\Bigg[D_{11}D\frac{dV_x}{dx}V_xU_y + D_{11}P\frac{dV_x}{dx}U_y^2V_x +$$

$$+ D_{12}F\frac{dV_y}{dy}V_xU_y + D_{12}T\frac{dV_y}{dy}U_xV_xU_y\Bigg]_0^a dy -$$

$$-\int_0^a\Bigg[D_{33}P\frac{dU_y}{dy}V_x^2U_y + D_{33}T\frac{dU_x}{dx}V_yV_xU_y\Bigg]_0^b dx = 0;$$

$$\int_0^a\int_0^b\Bigg[-K_y\frac{dU_y}{dy}V_yB - K_y\frac{dU_y}{dy}U_xV_yC + \left(D_{12}+D_{33}\right)\times$$

$$\times\frac{dU_y}{dy}\frac{dV_x}{dx}V_yP + D_{33}\frac{d^2U_x}{dx^2}V_y^2T + D_{22}\frac{d^2V_y}{dy^2}V_yF +$$

$$+D_{22}\frac{d^2V_y}{dy^2}U_xV_yT - K_yV_y^2F - K_yV_y^2U_xT\Bigg]dxdy -$$

$$-\int_0^b\Bigg[D_{33}P\frac{dU_y}{dy}V_xV_y + D_{33}T\frac{dU_x}{dx}V_y^2\Bigg]_0^a dy -$$

$$-\int_0^a\Bigg[D_{12}D\frac{dV_x}{dx}V_y + D_{12}P\frac{dV_x}{dx}U_yV_y +$$

$$+ D_{22}F\frac{dV_y}{dy}V_y + D_{22}T\frac{dV_y}{dy}U_xV_y\Bigg]_0^b dx = 0; \qquad (15)$$

$$\int_0^a\int_0^b\Bigg[-K_y\frac{dU_y}{dy}V_yU_xB - K_y\frac{dU_y}{dy}U_x^2V_yC + \left(D_{12}+D_{33}\right)\times$$

$$\times\frac{dU_y}{dy}\frac{dV_x}{dx}V_yU_xP + D_{33}\frac{d^2U_x}{dx^2}V_y^2U_xT + D_{22}\frac{d^2V_y}{dy^2}V_yU_xF +$$

$$+D_{22}\frac{d^2V_y}{dy^2}U_x^2V_yT - K_yV_y^2U_xF - K_yV_y^2U_x^2T\Bigg]dxdy -$$

$$-\int_0^b\Bigg[D_{33}P\frac{dU_y}{dy}V_xV_yU_x + D_{33}T\frac{dU_x}{dx}V_y^2U_x\Bigg]_0^a dy -$$

$$-\int_0^a\Bigg[D_{12}D\frac{dV_x}{dx}V_yU_x + D_{12}P\frac{dV_x}{dx}U_yV_yU_x +$$

$$+ D_{22}F\frac{dV_y}{dy}V_yU_x + D_{22}T\frac{dV_y}{dy}U_x^2V_y\Bigg]_0^b dx = 0.$$

Выполнив в уравнениях (15) интегрирование, после некоторых преобразований получим однородную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую приведем в удобный для анализа безразмерный вид, для чего умножим первые три уравнения на величину $315ab\big/\sqrt{D_{11}D_{22}}$, четвертое и пятое уравнения – на величину $315b\big/\sqrt{D_{11}D_{22}}$, а шестое и седьмое – на величину $315a\big/\sqrt{D_{11}D_{22}}$. Тогда однородная СЛАУ в матричном виде запишется как

$$\mathbf{HZ} = \mathbf{O}, \qquad (16)$$

где $\mathbf{Z}$ – матрица неизвестных; $\mathbf{H}$ – матрица, элементы которой имеют следующий вид:

$$h_{11} = -\frac{108\alpha}{\gamma_x}\left(\gamma_{2x} + 35\gamma_{px}\right) + 8\eta\gamma_{1x},\ h_{12} = \frac{252}{5}\eta\gamma_{0x}\gamma_{0y},$$

$$h_{16} = 0,\ h_{17} = 0,$$

$$h_{13} = -\frac{\alpha\gamma_{0y}}{\gamma_x}\left(\frac{216}{5}\gamma_{2x} + 1512\gamma_{px}\right) + \frac{16}{5}\eta\gamma_{0y}\gamma_{1x},$$

$$h_{14} = -315\frac{\alpha}{\gamma_x}\bar{\gamma}_{3x},\ h_{15} = -126\frac{\alpha}{\gamma_x}\gamma_{0y}\bar{\gamma}_{3x},$$

$$h_{21} = \frac{252}{5}\eta\gamma_{0x}\gamma_{0y},\ h_{22} = -\frac{108}{\alpha\gamma_y}\left(\gamma_{2y} + 35\gamma_{py}\right) + 8\eta\gamma_{1y},$$

$$h_{24} = 0,\ h_{25} = 0,$$

$$h_{23} = -\frac{\gamma_{0x}}{\alpha\gamma_y}\left(\frac{216}{5}\gamma_{2y} + 1512\gamma_{py}\right) + \frac{16}{5}\eta\gamma_{0x}\gamma_{1y},$$

$$h_{26} = -\frac{315}{\alpha\gamma_y}\bar{\gamma}_{3y},\ h_{27} = -\frac{126}{\alpha\gamma_y}\gamma_{0x}\bar{\gamma}_{3y},$$

$$h_{31} = -\frac{\alpha\gamma_{0y}}{\gamma_x}\left(\frac{216}{5}\gamma_{2x} + 1512\gamma_{px}\right) + \frac{16}{5}\eta\gamma_{0y}\gamma_{1x},$$

$$h_{32} = -\frac{\gamma_{0x}}{\alpha\gamma_y}\left(\frac{216}{5}\gamma_{2y} + 1512\gamma_{py}\right) + \frac{16}{5}\eta\gamma_{0x}\gamma_{1y},$$

$$h_{33} = -96\frac{\alpha\gamma_{1y}}{\gamma_x}\left(\frac{\gamma_{2x}}{35} + \gamma_{px}\right) - 96\frac{\gamma_{1x}}{\alpha\gamma_y}\left(\frac{\gamma_{2y}}{35} + \gamma_{py}\right) + \frac{16}{315}\eta\gamma_{1x}\gamma_{1y},$$

$$h_{34} = -126\frac{\alpha\bar{\gamma}_{3x}}{\gamma_x}\gamma_{0y},\ h_{35} = -8\frac{\alpha\bar{\gamma}_{3x}}{\gamma_x}\gamma_{1y},$$

$$h_{36} = -126\frac{\bar{\gamma}_{3y}}{\alpha\gamma_y}\gamma_{0x},\ h_{37} = -8\frac{\bar{\gamma}_{3y}}{\alpha\gamma_y}\gamma_{1x},$$

$$h_{41} = -315\frac{\alpha\bar{\gamma}_{3x}}{\gamma_x},\ h_{42} = 0,\ h_{43} = -126\frac{\alpha\bar{\gamma}_{3x}}{\gamma_x}\gamma_{0y},$$

$$h_{44} = -15\frac{\alpha}{\gamma_x}\left(7\gamma_x + 3\right),$$

$$h_{45} = -63\frac{\alpha\gamma_{0y}}{\gamma_x}\left(2\gamma_x + \frac{1}{7}\right),\ h_{46} = -35\beta_{12},$$

$$h_{47} = -105\beta_{12}\gamma_{3x},\ h_{51} = -126\frac{\alpha\gamma_{0y}}{\gamma_x}\bar{\gamma}_{3x},\ h_{52} = 0,$$

$$h_{53} = -8\frac{\alpha\gamma_{1y}}{\gamma_x}\bar{\gamma}_{3x},\ h_{54} = -\frac{\alpha\gamma_{0y}}{\gamma_x}\left(\frac{126}{5}\gamma_x + 9\right),$$

$$h_{55} = -\frac{\alpha\gamma_{1y}}{\gamma_x}\left(\frac{8}{5}\gamma_x + \frac{4}{7}\right) - \beta_{33}\left(\frac{54}{7}\gamma_{2y} + 270\gamma_{py}\right),$$

$$h_{56} = -105\beta_{12}\gamma_{3y},$$

$$h_{57} = -315\left(\beta_{12}\gamma_{3x}\gamma_{3y} + \beta_{33}\bar{\gamma}_{3x}\bar{\gamma}_{3y}\right),\ h_{61} = 0,$$

$$h_{62} = -315\frac{\bar{\gamma}_{3y}}{\alpha\gamma_y},\ h_{63} = -126\frac{\bar{\gamma}_{3y}\gamma_{0x}}{\alpha\gamma_y},$$

$$h_{64} = -35\beta_{12},\ h_{65} = -105\beta_{12}\gamma_{3y},$$

$$h_{66} = -\frac{1}{\alpha\gamma_y}\left(63\gamma_y + \frac{315}{14}\right),$$

$$h_{67} = -\frac{\gamma_{0x}}{\alpha\gamma_y}\left(\frac{126}{5}\gamma_y + 9\right),\ h_{71} = 0,\ h_{72} = -126\frac{\gamma_{0x}\bar{\gamma}_{3y}}{\alpha\gamma_y},$$

$$h_{73} = -8\frac{\gamma_{1x}\bar{\gamma}_{3y}}{\alpha\gamma_y}, \tag{17}$$

$$h_{74} = -105\beta_{12}\gamma_{3x},\ h_{75} = -315\left(\beta_{12}\gamma_{3x}\gamma_{3y} + \beta_{33}\bar{\gamma}_{3x}\bar{\gamma}_{3y}\right),$$

$$h_{76} = -\frac{\gamma_{0x}}{\alpha\gamma_y}\left(\frac{126}{5}\gamma_y + 9\right),$$

$$h_{77} = -\beta_{33}\left(\frac{54}{7}\gamma_{2x} + 270\gamma_{px}\right) - \frac{\gamma_{1x}}{\alpha\gamma_y}\left(\frac{8}{5}\gamma_y + \frac{4}{7}\right).$$

Безразмерные комплексы

$$\gamma_{0x} = 3 + 20\gamma_x,\ \gamma_{0y} = 3 + 20\gamma_y,$$

$$\gamma_{1x} = 91 + 999\gamma_x + 3024\gamma_x^2,\ \gamma_{px} = 3 + 12\gamma_x,$$

$$\gamma_{1y} = 91 + 999\gamma_y + 3024\gamma_y^2,\ \gamma_{2x} = -5 + 28\gamma_x + 560\gamma_x^2,$$

$$\gamma_{2y} = -5 + 28\gamma_y + 560\gamma_y^2,$$

$$\gamma_{3x} = \frac{1}{7} + \frac{8}{5}\gamma_x,\ \gamma_{3y} = \frac{1}{7} + \frac{8}{5}\gamma_y,\ \bar{\gamma}_{3x} = \frac{6}{7} + \frac{12}{5}\gamma_x,$$

$$\bar{\gamma}_{3y} = \frac{6}{7} + \frac{12}{5}\gamma_y,\ \gamma_{py} = 3 + 12\gamma_y, \tag{18}$$

$$\gamma_x = \frac{D_{11}}{K_x a^2},\ \gamma_y = \frac{D_{22}}{K_y b^2},\ \alpha = \frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}},$$

$$\beta_{12} = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}},\ \beta_{33} = \frac{D_{33}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}$$

и безразмерный частотный параметр

$$\eta = \frac{B_\rho \omega^2 a^2 b^2}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \tag{19}$$

определяются только жесткостными и геометрическими характеристиками материалов несущих слоев и заполнителя трехслойной пластины.

Таким образом, задача определения основной частоты изгибных колебаний трехслойной пластины, закрепленной в центре, сведена к нахождению безразмерного частотного параметра η, который вычисляется как наименьший вещественный корень кубического уравнения $\det(\mathbf{X}) = 0$, полученного из условия существования нетривиального решения однородной СЛАУ (16).

Когда частотный параметр η найден, то основная частота колебаний может быть получена из формулы (19) с учетом равенств $a = \bar{a}/2$ и $b = \bar{b}/2$:

$$\omega = \frac{4\sqrt{\eta}}{\bar{a}\bar{b}}\sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}}{B_\rho}}. \tag{20}$$

В качестве примера определим основную частоту колебаний для нескольких трехслойных пластин, закрепленных в центральной точке и отличающихся размерами в плане, толщинами несущих слоев и заполнителя. Несущие слои выполнены из материала со следующими параметрами: $E_x^{(t)}$ = 54,55 ГПа, $E_y^{(t)}$ = = 54,55 ГПа, $G_{xy}^{(t)}$ = 20,67 ГПа, $G_{xz}^{(t)}$ = 3,78 ГПа, $G_{yz}^{(t)}$ = = 3,78 ГПа, $\nu_{xy}^{(t)}$ = 0,32, $\nu_{yx}^{(t)}$ = 0,32, ρ_t = 1 500 кг/м³. Материал заполнителя характеризуется модулями сдвига $G_{xz}^{(h)}$ = 440 МПа, $G_{yz}^{(h)}$ = 220 МПа и плотностью ρ_h = 83 кг/м³. Пластины имеют размеры в плане: b = 1 м, a = 1 и 2 м. Суммарная толщина несущих слоев t равна 0,001 и 0,002 м, а толщина заполнителя δ будет 0,01; 0,05; 0,1 м.

Частоты колебаний трехслойных пластин, вычисленные по формуле (20) для указанных выше размеров, приведены в табл. 1.

Для проверки полученных результатов определим основную частоту колебаний трехслойной пластины, закрепленной в центральной точке, методом конечных элементов (МКЭ). Расчет выполним в пакете COSMOS/M, используя конечный элемент SHELL4L [2]. Значения частот, вычисленных с помощью МКЭ, приведены в табл. 2.

Таблица 1

Частоты колебаний трехслойной пластины, закрепленной в центральной точке, Гц

t, м	a = 1 м, b = 1 м			a = 2 м, b = 1 м		
	δ = 0.01 м	δ = 0,05 м	δ = 0,1 м	δ = 0,01 м	δ = 0,05 м	δ = 0,1 м
0,001	50,186	153,72	230,01	15,052	46,428	70,067
0,002	57,961	193,36	298,73	17,408	58,877	92,508

Таблица 2

Частоты колебаний трехслойной пластины, закрепленной в центральной точке, Гц, полученные МКЭ

t, м	a = 1 м, b = 1 м			a = 2 м, b = 1 м		
	δ = 0,01 м	δ = 0,05 м	δ = 0,1 м	δ = 0,01 м	δ = 0,05 м	δ = 0,1 м
0,001	49,221	149,19	223,70	14,592	45,880	68,051
0,002	56,868	189,31	290,56	16,925	57,961	67,123

Сравнивая соответствующие частоты из табл. 1 и 2, можно сделать вывод, что разница не превышает 5 %. Таким образом, определение основной частоты колебаний трехслойной пластины, закрепленной в центральной точке, может быть достоверно выполнено обобщенным методом Галеркина.

Таким образом, с помощью обобщенного метода Галеркина решена задача определения основной частоты колебаний прямоугольной трехслойной пластины, которая закреплена от прогиба и углов поворота в центральной точке. Данная задача сводится к нахождению безразмерного частотного параметра, который является наименьшим вещественным корнем кубического уравнения.

Сравнение полученной формулы с решением, выполненным методом конечных элементов, показывает, что данная формула обеспечивает высокую точность и минимальные вычислительные затраты при определении основных частот колебаний пластин, закрепленных в центральной точке.

Библиографические ссылки

1. Vasiliev V. V. Mechanics of Composite Structures. London : Taylor & Francis, 1993.

P. O. Deev

DETERMINATION OF FUNDAMENTAL OSCILLATION FREQUENCY OF THE RECTANGULAR SANDWICH PLATE TIGHTENED IN THE CENTRAL POINT

In the article the problem of determination of fundamental frequency of the sandwich plate, tightened in the central point, is solved. Variation equations of plate dynamics were solved by generalized Galerkin method. The formula for fundamental frequency determination is obtained.

Keywords: sandwich plate, fundamental oscillation frequency, generalized Galerkin method.

УДК 621.9.06; 621.822.572.001.04

С. П. Ереско, С. С. Шатохин

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЗАМКНУТОЙ АДАПТИВНОЙ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ ОПОРЫ С НЕЗАВИСИМЫМ ПЛАВАЮЩИМ РЕГУЛЯТОРОМ

Рассмотрены конструкция и принцип оптимизации конструктивно-режимных параметров незамкнутой адаптивной гидростатической опоры с независимым плавающим регулятором расхода рабочей жидкости в сравнении с традиционными гидростатическими опорами дроссельного регулирования для направляющих узлов тяжелых металлорежущих станков. Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований нагрузочных характеристик и конструктивных параметров по критерию податливости.

Ключевые слова: металлорежущий станок, адаптивная гидростатическая опора, плавающий регулятор расхода рабочей жидкости.

В тяжелом и прецизионном станкостроении, а также в других областях техники широкое применение находят адаптивные гидростатические опоры и направляющие с плавающими регуляторами расхода в магистрали нагнетания рабочей жидкости [1; 2]. По сравнению с мембранными плавающие регуляторы позволяют обеспечить опоре более стабильные характеристики и имеют значительно меньшие габаритные размеры, благодаря чему их можно встраивать непосредственно в неподвижное основание направляющей.

В отличие от известных и ранее исследованных незамкнутых опор с плавающими регуляторами [3], опоры с независимыми плавающими регуляторами способны обеспечить необходимую податливость несущего смазочного слоя без дополнительного (точнее – сведенного к минимуму) потока рабочей жидкости, поддерживающего плавающее рабочее состояние подвижного элемента (плунжера) регулятора. Следовательно, они отличаются значительно более высокой экономичностью.