

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Приведены как необходимые, так и достаточные условия устойчивости цифрового рекурсивного фильтра в терминах, связанных с понятием амобы алгебраической поверхности. Получено достаточное условие устойчивости двумерного фильтра при некоторых дополнительных ограничениях на разностный оператор фильтра.

Ключевые слова: цифровой рекурсивный фильтр, амоба алгебраической гиперповерхности, устойчивость фильтра.

Устойчивость цифрового рекурсивного фильтра и амоба алгебраической гиперповерхности. Пусть $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbf{Z}^n = \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}$ – n -мерная целочисленная решетка и $\mathbf{Z}_+^n$ – подмножество этой решетки, состоящее из точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ с неотрицательными целыми координатами. Обозначим через δ_j оператор сдвига на единицу по j -й переменной: $\delta_j f(x) = f(x_1 + 1, \dots, x_j + 1, \dots, x_n)$. Кроме того, пусть $\delta^x = \delta_1^{x_1} \dots \delta_n^{x_n}$. Обозначим $P(\delta) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha \delta^\alpha$ и $Q(\delta) = \sum_{\beta \in B} a_\beta \delta^\beta$ – полиномиальные (т. е. A и B – конечные подмножества $\mathbf{Z}_+^n$) разностные операторы с постоянными коэффициентами. Цифровой рекурсивный фильтр определим как задачу Коши для разностного оператора $P(\delta)$:

$$P(\delta)f(x) = Q(\delta)g(x), x \in X \subset \mathbf{Z}^n, \quad (1)$$

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_0 \subset X, \quad (2)$$

где $\varphi(x)$ и $g(x)$ – заданные соответственно на множестве X_0 и множестве X функции – входные данные дискретной динамической системы (1)–(2); $f(x)$ – искомый выходной сигнал.

Важным свойством фильтра является его устойчивость. Фильтр называется устойчивым, если он переводит ограниченный входной сигнал $g(x)$ в ограниченный выходной сигнал $f(x)$.

Многочлен $P(z) = \sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$ называется характеристическим для разностного уравнения (1).

Многогранником Ньютона N_P характеристического многочлена $P(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbf{R}^n$ элементов множества A .

Амобой многочлена $P(z)$, или, эквивалентно, алгебраической гиперповерхности $V = \{z \in \mathbf{C}^n : P(z) = 0\}$ называется образ V при логарифмическом проектировании $\text{Log} : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|)$. Обозначается амоба через $\mathbf{A}_P$ или $\mathbf{A}_V$. Отметим необходимые нам факты [1], касающиеся амоб.

1. Дополнение амобы $\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{A}_P$ состоит из конечного числа связных компонент $\{E_v\}$, каждая из которых открыта и выпукла, а каждый ее прообраз $\text{Log}^{-1}(E_v)$ есть область сходимости соответствующего ряда Лорана для

рациональной функции $\frac{1}{P(z)} = \sum_x \frac{\mathbf{P}_v(x)}{z^x}$.

Коэффициенты $\mathbf{P}_v(x)$ данного разложения можно представить в виде интеграла $\mathbf{P}_v(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{z^x}{P(z)} \frac{dz}{z}$, где интегрирование ведется по n -мерному циклу

$\Gamma_v = \text{Log}^{-1}\xi$, а $\xi \in E_v$. Функция $\mathbf{P}_v(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \dots, x_n)$ является фундаментальным решением разностного оператора $P(\delta)$, т. е.

$$P(\delta)\mathbf{P}_v(x) = \delta_0(x), \text{ где } \delta_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. Число компонент $\{E_v\}$ дополнения амобы не меньше, чем число вершин многогранника N_P , так как всякой его вершине v соответствует непустая компонента E_v дополнения $\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{A}_P$, причем двойственный конус к вершине v многогранника N_P $C_v = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, v \rangle = \max_{\alpha \in N_P} \langle x, \alpha \rangle\}$ является асимптотическим для этой компоненты, т. е. для любой точки $\xi \in E_v$ справедливо включение $\xi + C_v \subset E_v$, и никакой другой содержащий C_v конус этому свойству не удовлетворяет.

Если v – вершина многогранника Ньютона, то рациональная функция $\frac{1}{P(z)}$ разлагается в области $\text{Log}^{-1}E_v$

в ряд Лорана вида $\frac{1}{P(z)} = \sum_{\beta} \frac{\mathbf{P}_v(\beta)}{z^{v+\beta}}$, где

$\beta \in \mathbf{Z}^n \cap K_v$, а K_v – конус, построенный на векторах $v - \alpha, \alpha \in A$.

В данной работе будем рассматривать фильтры со следующими ограничениями на разностный оператор: если N_P – многогранник Ньютона характеристического

многочлена $P(z) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha$, то существует вершина

$m \in N_P$ такая, что $m \geq \alpha$ для всех $\alpha \in N_P$ (*).

Здесь «векторное» неравенство $m \geq \alpha$ означает, что для всех компонент этих векторов справедливы неравенства $m_j \geq \alpha_j, j = 1, 2, \dots, n$. Целочисленный вектор m назовем порядком уравнения (1). Соответствующую вершине m многогранника Ньютона N_P компоненту дополнения $\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{A}_P$ амобы назовем главной.

Уравнение (1) будем рассматривать на множестве $X = \mathbf{Z}_+^n$, а в качестве множества X_0 , на котором задаются начальные условия, возьмем $X_0 = \{x \in \mathbf{Z}_+^n : x \neg \geq m\}$, где соотношение $x \neg \geq m$ означает, что хотя бы для одного j_0 имеет место неравенство $x_{j_0} < m_{j_0}$.

В таком случае [1] задача (1)–(2) имеет единственное решение, причем [3] оно имеет вид $f(x) = f_0(x) + f_r(x)$, где

$$f_0(x) = \sum_{y \neg \geq 0} \left(\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \varphi(y + \alpha) \right) \mathbf{P}_m(x - y), \quad (3)$$

$$f_r(x) = \sum_{y \geq 0} (Q(\delta)g(y)) \mathbf{P}_m(x - y). \quad (4)$$

Здесь $f_0(x)$ – «общее» решение однородного уравнения, а $f_r(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Теорема 1. Пусть цифровой рекурсивный фильтр (1)–(2) удовлетворяет условию (*), тогда:

1) если цифровой рекурсивный фильтр устойчив, то фундаментальное решение $\mathbf{P}_m$ разностного уравнения (1), соответствующее главной компоненте E_m дополнения амобы, ограничено, а замыкание главной компоненты E_m дополнения амобы $\mathbf{A}_p$ содержит начало координат: $0 \in E_m \cup \partial E_m$;

2) если главная компонента E_m дополнения $\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{A}_p$ амобы содержит начало координат, $0 \in E_m$, то ряд из абсолютных величин значений фундаментального решения $\sum_{x \geq 0} |\mathbf{P}_m(x)|$ сходится, а фильтр устойчив.

Доказательство. 1. В качестве входных данных задачи (1)–(2) возьмем $\varphi \equiv 0$, а $g(y)$ выберем так, чтобы $Q(\delta)g(y) = \delta_0(x)$. В этом случае решением задачи (1)–(2) очевидным образом будет фундаментальное решение $f(x) = \mathbf{P}_m(x)$, так как входные данные задачи ограничены, а фильтр устойчив по условию, то и $\mathbf{P}_m(x)$ ограничено.

Из ограниченности фундаментального решения $\mathbf{P}_m(x)$ следует, что область сходимости $\text{Log}^{-1}E_m$ ряда Лорана $\sum_{x \geq 0} \frac{\mathbf{P}_m(x)}{z^x}$ содержит множество $\{z \in \mathbf{C}^n : |z_1| > 1, \dots, |z_n| > 1\}$, т. е. главная компонента E_m дополнения амобы содержит множество $\mathbf{R}_>^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$.

Из условия $m \geq \alpha$ для всех $\alpha \in A$ следует, что $\mathbf{R}_>^n$ содержится в двойственном конусе C_m и, согласно свойству 2 амобы, имеем $\mathbf{R}_>^n \subset E_m$, т. е. $0 \in E_m \cup \partial E_m$.

2. Множество $\text{Log}_{-1}E_m$ является областью сходимости ряда $\sum_{x \geq 0} \frac{\mathbf{P}_m(x)}{z^x}$. Условие $0 \in E_m$ означает, что точка (1,1) является внутренней точкой этого множества, поэтому числовой ряд $\sum_{x \geq 0} |\mathbf{P}_m(x)|$ сходится.

Пусть начальные данные $\varphi(x)$ и правая часть уравнения $g(x)$ ограничены: $\|\varphi\|_0 = \max_{x \in X_0} |\varphi(x)| < +\infty$, $\|g\| < +\infty$. Оценим соответствующее этим входным данным решение задачи Коши. Для зависящей от начальных данных части $f_0(x)$ решения имеем

$$\begin{aligned} |f_0(x)| &= \sum_{y \geq 0} \left(\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha| \|\varphi(y + \alpha)\| \right) |\mathbf{P}_m(x - y)| \leq \\ & \left(\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha| \right) \|\varphi\|_0 \sum_{y \geq 0} |\mathbf{P}_m(x - y)| \leq \\ & \left(\sum_{\alpha \in A} |c_\alpha| \right) \|\varphi\|_0 \sum_{y \geq 0} |\mathbf{P}_m(y)|. \end{aligned} \quad (5)$$

Для «частного» решения $f_r(x)$ получим

$$|f_r(x)| \leq \sum_{y \geq 0} |g(y)| \|\mathbf{P}_m(x - y)\| \leq \|g\| \sum_{y \geq 0} |\mathbf{P}_m(y)|.$$

Таким образом, ограниченность решения $f(x) = f_0(x) + f_r(x)$ доказана.

Таким образом, условие $0 \in E_m$ обеспечивает устойчивость фильтра, а вот в случае, когда $0 \in \partial E_m$, ситуация следующая. Для некоторых разностных операторов $P(\delta)$ и $Q(\delta)$ фильтр устойчив, а для других нет. Для исследова-

ния устойчивости фильтра в случае, когда $0 \in \partial E_m$, удобно преобразовать формулу (4) к виду

$$f_r(x) = \sum_y g(y) h(x - y), \quad (6)$$

где функция $h(x)$ удовлетворяет разностному уравнению

$\sum_\alpha c_\alpha h(x + \alpha) = \sum_\beta b_\beta \delta_0(x + \beta)$ и называется импульсным откликом фильтра [4]. Несложно проверить, что $h(x) = Q(\delta)\mathbf{P}_m(x)$, где $\mathbf{P}_m(x)$ – фундаментальное решение задачи Коши, соответствующее порядку m уравнения. Производящая функция импульсного отклика (z -преобразование функции целочисленного аргумента $h(x)$)

$F(z) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} \frac{h(x)}{z^{x+1}}$ называется передаточной функцией

цифрового рекурсивного фильтра. Важным для приложений является случай, когда передаточная функция является рациональной функцией $F(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, где

$Q(z) = \sum_{\beta \in B} b_\beta z^\beta$ и $P(z) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha z^\alpha$ – многочлены. Если

$G(z) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} \frac{g(x)}{z^{x+1}}$ и $\Phi(z) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^n} \frac{f(x)}{z^{x+1}}$ – преобразование входного и выходного сигналов соответственно, то из соотношений $\Phi(z) = F(z)G(z)$ следует, что $P(z)\Phi(z) = Q(z)G(z)$.

Приведем необходимое и достаточное условие устойчивости фильтра в терминах, связанных со свойствами передаточной функции фильтра, в предположении, что начальные данные задачи фиксированы ($\varphi \equiv 0$).

Предложение 1. Фильтр устойчив тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд

$$\sum_{x \in \mathbf{Z}^n} |h(x)|, \quad (7)$$

образованный из модулей импульсного отклика $h(x)$ (см., например, [4]).

Доказательство. Достаточность следует из формулы (6). Действительно,

$$|f_r(x)| \leq \sum_{y \geq 0} |g(y)| \|h(x - y)\| \leq \|g\| \sum_y |h(x - y)| \leq \|g\| \sum_y |h(y)|.$$

Для доказательства необходимости зафиксируем $x \in \mathbf{Z}_+^n$ и в качестве входного сигнала $g_x(y)$ возьмем функцию

$$g_x(y) = \begin{cases} \frac{\overline{h(x - y)}}{|h(x - y)|}, & \text{для } 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{для остальных } y, \end{cases}$$

где $\overline{h}$ означает число, комплексно сопряженное к h .

Тогда соответствующий этому входному сигналу g_x выходной сигнал определится по формуле (6):

$$f_r(x) = \sum_y \frac{\overline{h(x - y)}}{|h(x - y)|} h(x - y) = \sum_y |h(x - y)| = \sum_{0 \leq y' \leq x} |h(y')|.$$

Но по условию $\|f_r\| < +\infty$, т. е. частичные суммы ряда $\sum_y |h(y)|$ ограничены, а ряд (7) сходится.

Достаточное условие устойчивости двумерного цифрового рекурсивного фильтра. Вопрос устойчивости двумерного цифрового рекурсивного фильтра исследован в [5]. Для того чтобы сформулировать основной результат

этой работы, касающийся сходимости ряда (7) из модулей коэффициентов передаточной функции, удобно сделать замену $(z, w) \rightarrow (\frac{1}{z}, \frac{1}{w})$ и сформулировать задачу об устойчивости цифрового рекурсивного фильтра как задачу о сходимости ряда из модулей коэффициентов Тейлора рациональной функции двух переменных. Обозначим передаточную функцию фильтра, полученную после указанной замены так же, как и до замены, т. е.

$$F(z, w) = \frac{Q(z, w)}{P(z, w)}, \text{ и отметим, что } P(0, 0) \neq 0. \text{ Последнее}$$

условие есть следствие ограничения (*) на порядок m разностного уравнения. Пусть

$$F(z, w) = \sum_{x, y \geq 0} h(x, y) z^x w^y \quad (8)$$

разложение функции F в ряд Тейлора и D_m – область сходимости этого ряда. Как известно (см., например, [6]), это полная 2-круговая область, она логарифмически выпукла и $\text{Log} D_m = -E_m$, где E_m – главная компонента дополнения амёбы характеристического множества разностного уравнения.

Включение $0 \in \bar{E}_m$ эквивалентно включению $I \in \bar{D}_m$, где $I = (1, 1)$. Обозначим $U^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ – единичный бикруг и $T^2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1, |w| = 1\}$ – остов этого бикруга. Поскольку D_m – полная область, то условие $(1, 1) \in D_m$ эквивалентно условию $U^2 \subset D_m$. С точки зрения исследования устойчивости фильтра интерес представляет случай, когда множество нулей знаменателя $V = \{(z, w) : P(z, w) = 0\}$ не пересекается с бикругом U^2 , но $V \cap T^2 \neq \emptyset$. Обозначим $H^\lambda(\bar{U}^2)$ – класс функций, удовлетворяющих на U^2 условию Гельдера с показателем λ .

Задачу об устойчивости двумерного фильтра решает следующая теорема.

Теорема 2 [5]. Если функция $F = \frac{Q(z, w)}{P(z, w)}$ принадлежит классу $H^{\frac{1}{2}}(\bar{U}^2)$, то для нее ряд $F = \sum_{x, y \geq 0} |h(x, y)|$ сходится, а при любом $\lambda < \frac{1}{2}$ существует рациональная функция класса $H^\lambda(\bar{U}^2)$, для которой этот ряд расходится.

Этот результат представляет больше теоретический интерес, чем практический, ибо проверять свойство гольдерности не так просто.

Приведем один простой признак устойчивости двумерного фильтра. В работе [5] были введены величины, оказывающие решающее влияние на асимптотику коэффициентов рациональных функций двух переменных:

μ – порядок касания множества V и гиперболы $z^p w^q - t = 0$ в точке $(z_0, w_0) \in V$: $\mu := \text{ord}_{(z_0, w_0)}(z^p w^q - z_0^p w_0^q)|_V$; β – порядок нуля сужения числителя Q на множество V : $\beta := \text{ord}_Q|_V$.

Например, для комплексной прямой $z + w = 2$ порядок касания μ с гиперболой $zw = 1$ равен 2, так как $zw - 1|_V = -(z - 1)^2$, а для кривых $w - z^2 + 3z - 3 = 0$ и $5w + 3z^3 - 8z^2 + 18z - 18 = 0$ для этой же гиперболы $\mu = 3$.

Пусть рациональная функция $Q(z, w)/P(z, w)$ голоморфна в бикруге $U^2 = \{|z| < 1, |w| < 1\}$, а кривая $V = \{(z, w) : P(z, w) = 0\}$ пересекает остов $T^2 = \{|z| = 1, |w| = 1\}$ в конечном числе точек

$a_j = (a_{j_1}, a_{j_2})$. Для каждой точки a_j существует направление $(p, q) \in \mathbb{R}_+^2$, для которого a_j – ближайшая особая точка; порядок касания в точке a_j обозначим μ_j :

$$\mu_j = \text{ord}_{a_j}(z^p w^q - a_{j_1}^p a_{j_2}^q)|_V.$$

Наряду с числовой характеристикой μ_j кривой V нам потребуется еще одна, определенная в [5], которая выражает порядок касания в a_j кривой V с тором T^2 (или порядок примыкания V к бикругу $\bar{U}^2$). Для ее определения мы можем считать (после замены $(z, w) \rightarrow (ze^{i\theta_1}, we^{i\theta_2})$), что $a_j = (1, 1)$. Рассмотрим неявную функцию $u = \Phi(v)$, определяемую уравнением $P(u, ie^{iv}) = 0$ со свойством $\Phi(0) = 1$ (т. е. росток кривой V в точке $(1, 1)$, записанный в координатах $u = z$, $v = -\ln(w/z)$). Полагая, что $\theta = \text{Rev}$, определим искомый порядок касания V с T^2 как $\delta_j = \text{ord}_0(|\Phi(\theta)| - 1)$. Скажем, для комплексной прямой $z + w = 2$ в точке $(1, 1)$ имеем $\delta = 2$, а для кривых $w - z^2 + 3z - 3 = 0$ и $w - 1 + (z - 1) - (z - 1)^2 + 3/5(z - 1)^3$ величина δ равна 3 и 6 соответственно.

Теорема 3. Если комплексная алгебраическая кривая $V = \{P = 0\}$ пересекает замкнутый единичный бикруг $\bar{U}^2$ в конечном числе точек $a_j \in T^2$, причем с порядком $\delta_j = 2$, то для рациональной функции $F(z, w) = Q(z, w)/P(z, w)$ следующие условия эквивалентны:

а) порядок нуля числителя Q в каждой точке a_j не меньше трех: $\text{ord}_{a_j} Q \geq 3$ (напомним, что порядок функции в точке – это наименьший порядок ее производных, отличных от нуля в этой точке);

б) ряд Тейлора с центром в нуле для F абсолютно сходится в $\bar{U}^2$;

в) функция F непрерывна в $\bar{U}^2$.

Замечание 1. В [5] показано, что всегда $\delta_j \geq \mu_j \geq 2$, следовательно, в условиях теоремы 3 имеем $\delta_j = \mu_j = 2$ для всех точек a_j . Именно благодаря этому условию свойства б и в эквивалентны. До публикации статьи [5] существовала гипотеза Ш. А. Даутова [7; 8] о том, что эти свойства эквивалентны в общей ситуации. Однако в [5] было доказано, что, вообще говоря, из непрерывности F в $\bar{U}^2$ еще не следует абсолютная сходимость ряда Тейлора в $\bar{U}^2$. Таким образом, теорема 3 выявляет рамки справедливости гипотезы Ш. А. Даутова, состоящие в равенствах $\delta_j = \mu_j = 2$ в точках касания a_j кривой V и тора T^2 .

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Воспользуемся утверждением предложения 2.1 работы [5], которое гласит, что каждая точка a_j вносит свой аддитивный асимптотический вклад $a_j(k_1, k_2)$ в последовательность $h(k_1, k_2)$ коэффициентов Тейлора функции $F = Q/P$. При этом в условиях $\delta_j = \mu_j = 2$ имеет место оценка

$$|a_j(k_1, k_2)| \leq \begin{cases} \text{const} \cdot (k_1 + k_2)^{-\frac{\beta_j + 1}{2}}, & \text{если } k_1 \geq (pk_2 - qk_1)^2, \\ \text{const} \cdot e^{-C(k_1 + k_2)^\chi}, & \text{если } k_1 < |pk_2 - qk_1|^2, \end{cases}$$

где $\beta_j = \text{ord}_{a_j} P$; χ – любое положительное число; $C > 0$ – некоторое фиксированное число; вектор (p, q) – направление, для которого a_j – ближайшая особая точка. Иными словами, вне параболы $k_1 = |pk_2 - qk_1|^2$ последовательность $a_j(k_1, k_2)$ экспоненциально убывает, а внутри убывает степенным образом. Заметим, что для области

$D = \{k_1 > 1, k_2 > 1, k_1 > (pk_2 - qk_1)^2\}$ при $\beta_j \geq 3$ имеем

$$\iint_D (k_1 + k_2)^{-\frac{\beta_j+1}{2}} dk_1 dk_2 \leq \iint_D \frac{dk_1 dk_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

После замены переменных $k_1 = s_1, pk_2 - qk_1 = s_2$ последний интеграл мажорируется с точностью до некоторого множителя сходящимся интегралом

$$\int_{s_1 > s_2^2} \frac{ds_1 ds_2}{s_1^2} = \int_1^\infty \frac{ds_1}{s_1^2} \int_1^{\sqrt{s_1}} ds_2 = \int_1^\infty \frac{ds_1}{s_1^{3/2}}.$$

По интегральному признаку сравнения получаем, что

ряд $\sum_{z_+^2} |a_j(k_1, k_2)|$ сходится, следовательно, и полный ряд

$\sum_{z_+^2} |h(k_1, k_2)|$ сходится. Тем самым импликация $a) \Rightarrow b)$ доказана.

$b) \Rightarrow c)$. Эта импликация вытекает из теоремы Вейерштрасса о непрерывности суммы равномерно сходящегося степенного ряда и из признака Вейерштрасса о равномерной сходимости ряда, который мажорируется сходящимся числовым рядом.

$c) \Rightarrow a)$. Предположим, что хотя бы один из порядков $\text{ord}_{a_j} Q \leq 2$. Без ограничения общности можно считать, что $a_j = (1, 1)$. По определению числа δ имеем

$$|\Phi(\theta)| = 1 + d\theta^2 + o(\theta^2), \quad d \neq 0 (**).$$

Более того, поскольку $|\Phi(\theta)| > 1$ при $\theta \neq 0$, необходимо $d > 0$.

Если $\Phi(\theta) = 1 + b_1\theta + b_2\theta^2 + o(\theta^2)$, $b_1 \neq 0$, то рассмотрим семейство функций $\varphi_c(\theta) = 1 + b_1\theta + (b_2 + c)\theta^2 + o(\theta^2)$, $c \in \mathbf{R}$, для которого согласно (**) $|\varphi_c(\theta)| = 1 + (c + d)\theta^2 + o(\theta^2)$.

Таким образом, при $c < -d$ путь $\gamma_c = (\varphi_c(\theta), \varphi_c(\theta)e^{i\theta})$ лежит в бикруге U^2 и касается V с порядком 2 (у φ_c и Φ одинаковые линейные части $1 + b_1\theta$ и различные квадратичные части). Таким образом, $P|_{\gamma_c}$ имеет порядок 2: $Q|_{\gamma_c} = k(c)\theta^2 + \dots$, где $k(c) \neq \text{const}$.

И если бы $\text{ord}_{(1,1)} Q$ был меньше 3, то сужение $Q|_{\gamma_c}$ имело бы вид $k_1\theta^l + o(\theta^l)$, $l \leq 2$, причем k_1 не зависит от c . Поэтому при $l \leq 2$ функция $F = Q/P$ неограничена на пути $\gamma_c \in \bar{U}^2$, а при $l = 2$ пределы этой функции на γ_c различны при разных c . Противоречие с непрерывностью F .

Важнейшей характеристикой цифрового рекурсивного фильтра является импульсный отклик, характеризующий его устойчивость. В двумерном случае проблема устойчивости решена в работе А. К. Циха [5], где полученный результат сводит вопрос об определении устойчивости цифрового рекурсивного фильтра к свойству гёльдеровости передаточной функции фильтра, проверить которое не всегда просто. В данной работе получено два результата об устойчивости многомерных цифровых фильтров: приведено необходимое и (отдельно) достаточное условие устойчивости фильтра в терминах амёб алгебраических гиперповерхностей, а также дано простое достаточное условие устойчивости двумерного рекурсивного фильтра. Для формулировки этого условия используются числовые характеристики, отражающие геометрию пересечения характеристической кривой с единичным бикругом.

Библиографические ссылки

1. Forsberg M., Passare M., Tsikh A. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. in Math. 2000. № 151. С. 45–70.
2. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Mathematics. 2000. Vol. 225. P. 51–75.
3. Лейнартас Е. К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений // Сиб. мат. журн. 2007. № 48. С. 335–340.
4. Даджон Д., Мерсеро О. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988.
5. Цих А. К. Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных // Мат. сб. 1991. № 11. С. 1588–1612.
6. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.
7. Даутов Ш. А. Об абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора рациональных функций двух переменных. Устойчивость двумерных цифровых рекурсивных фильтров // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257(6). С. 1302–1305.
8. Некоторые нерешенные вопросы многомерного комплексного анализа / ред. Е. М. Чирка / Ин-т физики СО АН СССР. Красноярск, 1987.

D. E. Leynartas

ON STABILITY OF DIGITAL RECURSIVE FILTERS

In this paper the author gives both necessary and sufficient stability conditions of digital recursive filter in the terms connected with concept of amoeba of algebraic hypersurface. Sufficient condition of stability of the two-dimensional filter is received at some additional restrictions on the differential operator of the filter.

Keywords: digital recursive filter, amoeba of algebraic hypersurface, stability of filter.

© Лейнартас Д. Е., 2011