

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Представлено решение задачи об определении основной частоты колебаний трехслойной пластины, у которой два смежных края жестко закреплены, а два других свободны. Пластина состоит из двух одинаковых композитных несущих слоев и ортотропного заполнителя. Для решения динамической задачи был применен обобщенный метод Галеркина. Получена формула для определения основной частоты колебаний трехслойной пластины с двумя свободными краями.

Ключевые слова: трехслойная пластина, частота колебаний, обобщенный метод Галеркина.

При проектировании трехслойных пластин часто возникает задача выбора геометрических и упругих параметров, которые обеспечивают максимальную изгибную жесткость и минимальную погонную массу конструкции [1; 2]. Особенностью этой задачи является взаимное влияние изгибной жесткости и погонной массы трехслойной пластины. Это влияние проявляется в том, что рост изгибной жесткости пластины всегда сопровождается увеличением ее погонной массы. Поэтому для проектирования трехслойных пластин необходим определенный критерий эффективности конструкции. В качестве такого критерия удобно использовать основную частоту колебаний трехслойной пластины.

Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину, которая состоит из двух одинаковых композитных несущих слоев и ортотропного заполнителя. Введем систему декартовых координат x, y, z , связанную со срединной плоскостью пластины. Обозначим размеры пластины по осям x и y через a и b соответственно. Пусть края пластины $x = 0$ и $y = 0$ будут жестко закреплены, а края пластины $x = a$ и $y = b$ свободны.

Получим вариационное уравнение изгибных колебаний трехслойной пластины, используя принцип Гамильтона. В соответствии с этим принципом, интеграл действия Гамильтона для действительного движения трехслойной пластины в некотором промежутке времени имеет стационарное значение. Выберем в качестве этого промежутка период колебаний с круговой частотой ω . Тогда условие стационарности интеграла действия Гамильтона примет вид

$$\delta(T_{\max} - U_{\max}) = 0, \quad (1)$$

где δ – знак вариации; $T_{\max}$ – максимальная кинетическая энергия трехслойной пластины; $U_{\max}$ – максимальная потенциальная энергия изгиба трехслойной пластины. Величины $T_{\max}$ и $U_{\max}$ определяются следующими выражениями:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 B_p \iint_0^a \iint_0^b w^2 dx dy,$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \iint_0^a \iint_0^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + D_{22} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right)^2 + D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2)$$

где $w = w(x, y)$ – прогиб пластины; $\theta_x = \theta_x(x, y)$, $\theta_y = \theta_y(x, y)$ – углы поворота нормали; D_{11} , D_{12} , D_{21} , D_{22} , D_{33} – изгибные жесткости трехслойной пластины ($D_{12} = D_{21}$); K_x , K_y – сдвиговые жесткости трехслойной пластины; B_p – инерциальный параметр. Функции w , θ_x и θ_y определяют форму трехслойной пластины при изгибных колебаниях.

Подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned} & \iint_0^a \iint_0^b \left[\left(D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. + \left(D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \theta_x + \right. \\ & \left. + K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \theta_y + \right. \\ & \left. + K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \omega^2 B_p w \delta w \right] dx dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Варьируя функционал (3), получим

$$\begin{aligned} & \iint_0^a \iint_0^b L \delta w dx dy - \int_0^a [\theta_x \delta w]_0^a dy - \int_0^b [\theta_y \delta w]_0^b dx = 0, \\ & \iint_0^a \iint_0^b L_x \delta \theta_x dx dy - \int_0^a [M_x \delta \theta_x]_0^a dy - \int_0^b [M_{xy} \delta \theta_x]_0^b dx = 0, \\ & \iint_0^a \iint_0^b L_y \delta \theta_y dx dy - \int_0^a [M_{xy} \delta \theta_y]_0^a dy - \int_0^b [M_y \delta \theta_y]_0^b dx = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L &= K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + K_y \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + B_p \omega^2 w, \\ L_x &= -K_x \frac{\partial w}{\partial x} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \\ & + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - K_x \theta_x + (D_{11} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y}, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_y &= -K_y \frac{\partial w}{\partial y} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \\
 &+ D_{33} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - K_y \theta_y; \\
 Q_x &= K_x \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad Q_y = K_y \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\
 M_x &= D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad M_y = D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \\
 M_{xy} &= D_{33} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь Q_x , Q_y – перерезывающие силы, M_x , M_y – изгибающие моменты, M_{xy} – крутящий момент.

Уравнения (4) являются основными вариационными уравнениями, которым должны удовлетворять собственные функции $w(x, y)$, $\theta_x(x, y)$ и $\theta_y(x, y)$, влияющие на форму действительных изгибных колебаний трехслойной пластины.

Полученные вариационные уравнения могут быть использованы для формирования традиционной краевой задачи определения основной частоты колебаний рассматриваемой трехслойной пластины. В силу произвольности вариаций δw , $\delta \theta_x$, $\delta \theta_y$ подынтегральные выражения в двойных интегралах дадут уравнения движения пластины:

$$L = 0, \quad L_x = 0, \quad L_y = 0. \quad (7)$$

Подынтегральные выражения в одинарных интегралах зададут естественные граничные условия на краях $x = 0, x = a$:

$$Q_x \delta w = 0, \quad M_x \delta \theta_x = 0, \quad M_{xy} \delta \theta_y = 0, \quad (8)$$

и на краях $y = 0, y = b$:

$$Q_y \delta w = 0, \quad M_{xy} \delta \theta_x = 0, \quad M_y \delta \theta_y = 0. \quad (9)$$

Для рассматриваемого нами закрепления трехслойной пластины граничные условия (8) и (9) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad w = 0, \quad \theta_x = 0, \quad \theta_y = 0, \\
 y = 0, \quad w = 0, \quad \theta_x = 0, \quad \theta_y = 0,
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 x = a, \quad Q_x = 0, \quad M_x = 0, \quad M_{xy} = 0, \\
 y = b, \quad Q_y = 0, \quad M_y = 0, \quad M_{xy} = 0.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Точное определение частот и форм колебаний исследуемой трехслойной пластины связано с решением однородной краевой задачи (7), (10) и (11), которое вызывает значительные математические затруднения и не получено до настоящего времени. Однако определение основной частоты колебаний данной пластины может быть выполнено с помощью весьма эффективных приближенных методов, одним из которых является обобщенный метод Галеркина. В этом методе прогиб $w(x, y)$ и углы поворота $\theta_x(x, y)$, $\theta_y(x, y)$ заменяются аналитическими выражениями, которые аппроксимируют первую форму колебаний пластины вдоль осей x и y . В качестве функций, задающих возможную первую форму таких колебаний, можно принять функции, полученные из решения задачи изгиба консольно закрепленной балки под действием постоянного давления.

Представим прогиб и углы поворота в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 w &= F U_x(x) U_y(y), \quad \theta_x = T_x V_x(x) U_y(y), \\
 \theta_y &= T_y U_x(x) V_y(y),
 \end{aligned} \quad (12)$$

где F , T_x , T_y – неизвестные числа; $U_x(x)$, $V_x(x)$, $U_y(y)$, $V_y(y)$ – аппроксимирующие функции, которые задаются выражениями

$$\begin{aligned}
 U_x(x) &= \frac{x}{a} \left[\frac{x^3}{a^3} - 4 \frac{x^2}{a^2} + 6 \frac{x}{a} - 12 \gamma_x \left(\frac{x}{a} - 2 \right) \right], \\
 V_x(x) &= \frac{x}{a} \left(\frac{x^2}{3a^2} - \frac{x}{a} + 1 \right),
 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 U_y(y) &= \frac{y}{b} \left[\frac{y^3}{b^3} - 4 \frac{y^2}{b^2} + 6 \frac{y}{b} - 12 \gamma_y \left(\frac{y}{b} - 2 \right) \right], \\
 V_y(y) &= \frac{y}{b} \left(\frac{y^2}{3b^2} - \frac{y}{b} + 1 \right).
 \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\gamma_x = \frac{D_{11}}{K_x a^2}, \quad \gamma_y = \frac{D_{22}}{K_y b^2}. \quad (15)$$

Безразмерные параметры γ_x и γ_y характеризуют сдвиговые податливости трехслойной пластины в плоскостях xz и yz соответственно.

Производные от аппроксимирующих функций (13) и (14) могут быть найдены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \frac{dU_y}{dy} &= \frac{4}{b} \left[\frac{y^3}{b^3} - 3 \frac{y^2}{b^2} + 3 \frac{y}{b} - 6 \gamma_y \left(\frac{y}{b} - 1 \right) \right], \\
 \frac{dV_y}{dy} &= \frac{1}{b} \left(\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{y}{b} + 1 \right),
 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dU_x}{dx} &= \frac{4}{a} \left[\frac{x^3}{a^3} - 3 \frac{x^2}{a^2} + 3 \frac{x}{a} - 6 \gamma_x \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right], \\
 \frac{dV_x}{dx} &= \frac{1}{a} \left(\frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x}{a} + 1 \right).
 \end{aligned} \quad (17)$$

Вариации функций (12) имеют вид

$$\delta w = U_x U_y \delta F, \quad \delta \theta_x = V_x U_y \delta T_x, \quad \delta \theta_y = U_x V_y \delta T_y. \quad (18)$$

Подставляя (12) и (18) в соотношения (4), (5), (6) и учитывая произвольность вариаций δF , δT_x и δT_y , получим

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^b L U_x U_y dx dy - \int_0^a [Q_x U_x U_y]_0^a dy - \int_0^a [Q_y U_x U_y]_0^b dx = 0, \\
 \int_0^a \int_0^b L_x V_x U_y dx dy - \int_0^a [M_x V_x U_y]_0^a dy - \int_0^a [M_{xy} V_x U_y]_0^b dx = 0, \\
 \int_0^a \int_0^b L_y U_x V_y dx dy - \int_0^a [M_{xy} U_x V_y]_0^a dy - \int_0^a [M_y U_x V_y]_0^b dx = 0,
 \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
 L &= \left(K_x \frac{d^2 U_x}{dx^2} U_y + K_y \frac{d^2 U_y}{dy^2} U_x \right) F + K_x \frac{dV_x}{dx} U_y T_x + \\
 &+ K_y \frac{dV_y}{dy} U_x T_y + B_p \omega^2 U_x U_y F = 0,
 \end{aligned}$$

$$L_x = -K_x \frac{dU_x}{dx} U_y F + \left(D_{11} \frac{d^2 V_x}{dx^2} U_y + D_{33} V_x \frac{d^2 U_y}{dy^2} - K_x V_x U_y \right) \times \\ \times T_x + (D_{12} + D_{33}) \frac{dU_x}{dx} \frac{dV_y}{dy} T_y = 0, \quad (20)$$

$$L_y = -K_y U_x \frac{dU_y}{dy} F + (D_{12} + D_{33}) \frac{dV_x}{dx} \frac{dU_y}{dy} T_x + \\ + \left(D_{33} \frac{d^2 U_x}{dx^2} V_y + D_{22} U_x \frac{d^2 V_y}{dy^2} - K_y U_x V_y \right) T_y = 0;$$

$$Q_x = K_x \left(V_x T_x + \frac{dU_x}{dx} F \right) U_y, \\ M_x = D_{11} \frac{dV_x}{dx} U_y T_x + D_{12} U_x \frac{dV_y}{dy} T_y; \quad (21)$$

$$Q_y = K_y \left(V_y T_y + \frac{dU_y}{dy} F \right) U_x, \\ M_y = D_{12} \frac{dV_x}{dx} U_y T_x + D_{22} U_x \frac{dV_y}{dy} T_y; \quad (22)$$

$$M_{xy} = D_{33} \left(V_x \frac{dU_y}{dy} T_x + \frac{dU_x}{dx} V_y T_y \right). \quad (23)$$

Уравнения (19) автоматически обеспечивают приближенное (интегральное) удовлетворение граничных условий (11) на свободных краях пластины.

Выполняя в уравнениях (19) интегрирование, получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left[K_x (I_{2x} - P_x) I_{1y} + K_y I_{1x} (I_{2y} - P_y) \right] \times \\ \times F + K_x (I_{3x} - S_x) I_{1y} T_x + \\ + K_y I_{1x} (I_{3y} - S_y) T_y + B_p \omega^2 I_{1x} I_{1y} F = 0, \quad (24) \\ -K_x J_{3x} I_{1y} F + \\ + \left[D_{11} (J_{2x} - R_x) I_{1y} + D_{33} J_{1x} (I_{2y} - P_y) - K_x J_{1x} I_{1y} \right] T_x + \\ + \left[D_{12} (J_{3x} - S_x) I_{3y} + D_{33} J_{3x} (I_{3y} - S_y) \right] T_y = 0, \\ -K_y J_{3y} I_{1x} F + \\ + \left[D_{22} (J_{2y} - R_y) I_{1x} + D_{33} J_{1y} (I_{2x} - P_x) - K_y J_{1y} I_{1x} \right] T_y + \\ + \left[D_{12} (J_{3y} - S_y) I_{3x} + D_{33} J_{3y} (I_{3x} - S_x) \right] T_x = 0,$$

где

$$I_{1x} = \int_0^a U_x^2 dx, \quad I_{1y} = \int_0^b U_y^2 dy, \\ J_{1x} = \int_0^a V_x^2 dx, \quad J_{1y} = \int_0^b V_y^2 dy, \\ I_{2x} = \int_0^a U_x \frac{d^2 U_x}{dx^2} dx, \quad I_{2y} = \int_0^b U_y \frac{d^2 U_y}{dy^2} dy, \\ J_{2x} = \int_0^a V_x \frac{d^2 V_x}{dx^2} dx, \quad J_{2y} = \int_0^b V_y \frac{d^2 V_y}{dy^2} dy, \quad (25) \\ I_{3x} = \int_0^a U_x \frac{dV_x}{dx} dx, \quad I_{3y} = \int_0^b U_y \frac{dV_y}{dy} dy, \\ J_{3x} = \int_0^a V_x \frac{dU_x}{dx} dx, \quad J_{3y} = \int_0^b V_y \frac{dU_y}{dy} dy,$$

$$P_x = \left[U_x \frac{dU_x}{dx} \right]_0^a, \quad R_x = \left[V_x \frac{dV_x}{dx} \right]_0^a, \\ S_x = [U_x V_x]_0^a, \quad (26)$$

$$P_y = \left[U_y \frac{dU_y}{dy} \right]_0^b, \quad R_y = \left[V_y \frac{dV_y}{dy} \right]_0^b, \\ S_y = [U_y V_y]_0^b.$$

Определим значения интегралов (25), используя (13), (14), (16) и (17):

$$I_{1x} = \frac{8a}{315} \gamma_{1x}, \quad J_{1x} = \frac{a}{14}, \\ I_{1y} = \frac{8b}{315} \gamma_{1y}, \quad J_{1y} = \frac{b}{14}, \\ I_{2x} = -\frac{12}{35a} \gamma_{2x}, \quad J_{2x} = -\frac{1}{5a}, \\ I_{2y} = -\frac{12}{35b} \gamma_{2y}, \quad J_{2y} = -\frac{1}{5b}, \quad (27) \\ I_{3x} = \frac{\gamma_{3x}}{35}, \quad J_{3x} = \frac{6\gamma_{3x}}{35}, \\ I_{3y} = \frac{\gamma_{3y}}{35}, \quad J_{3y} = \frac{6\gamma_{3y}}{35},$$

где

$$\gamma_{1x} = 91 + 999\gamma_x + 3024\gamma_x^2, \quad \gamma_{2x} = -5 + 28\gamma_x + 560\gamma_x^2, \\ \gamma_{3x} = 5 + 56\gamma_x, \quad \bar{\gamma}_{3x} = 5 + 14\gamma_x, \quad (28)$$

$$\gamma_{1y} = 91 + 999\gamma_y + 3024\gamma_y^2, \quad \gamma_{2y} = -5 + 28\gamma_y + 560\gamma_y^2, \\ \gamma_{3y} = 5 + 56\gamma_y, \quad \bar{\gamma}_{3y} = 5 + 14\gamma_y. \quad (29)$$

Определим значения величин $P_x, R_x, S_x, P_y, R_y, S_y$, входящих в коэффициенты уравнений системы (24). Учитывая равенства (24), (25) и (26), соотношения (26) можно представить в следующем виде:

$$P_x = \frac{12}{a} (1 + \gamma_x), \quad R_x = 0, \quad S_x = 1 + \gamma_x, \\ P_y = \frac{12}{b} (1 + \gamma_y), \quad R_y = 0, \quad S_y = 1 + \gamma_y. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (24), после некоторых преобразований имеем

$$\left(K_x \bar{I}_{2x} I_{1y} + K_y I_{1x} \bar{I}_{2y} \right) F - K_x J_{3x} I_{1y} T_x - \\ - K_y I_{1x} J_{3y} T_y + B_p \omega^2 I_{1x} I_{1y} F = 0, \\ -K_x J_{3x} I_{1y} F + \left(D_{11} J_{2x} I_{1y} + D_{33} J_{1x} \bar{I}_{2y} - K_x J_{1x} I_{1y} \right) T_x - \\ - \left(D_{12} I_{3x} I_{3y} - D_{33} J_{3x} J_{3y} \right) T_y = 0, \\ -K_y J_{3y} I_{1x} F - \left(D_{12} I_{3x} I_{3y} - D_{33} J_{3x} J_{3y} \right) T_x + \\ + \left(D_{33} J_{1y} \bar{I}_{2x} + D_{22} J_{2y} I_{1x} - K_y J_{1y} I_{1x} \right) T_y = 0, \quad (31)$$

где

$$\bar{I}_{2x} = -\frac{24\bar{\gamma}_{2x}}{35a}, \quad \bar{I}_{2y} = -\frac{24\bar{\gamma}_{2y}}{35b}, \quad (32)$$

здесь

$$\bar{\gamma}_{2x} = 15 + 84\gamma_x + 280\gamma_x^2,$$

$$\bar{\gamma}_{2y} = 15 + 84\gamma_y + 280\gamma_y^2. \quad (33)$$

Преобразуем уравнения (31) таким образом, чтобы коэффициенты при неизвестных стали безразмерными. Для этого подставим соотношения (27) и (32) в систему (31), а затем умножим каждое уравнение на величину $99\,225\,ab/\sqrt{D_{11}D_{22}}$. В результате преобразований получим

$$\begin{aligned} 1\,728a_{11}F + 432a_{12}F_x + 432a_{13}F_y &= 64b_{11}\eta F, \\ 432a_{21}F + 36a_{22}F_x + 81a_{23}F_y &= 0, \\ 432a_{31}F + 81a_{32}F_x + 36a_{33}F_y &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$F_x = aT_x, \quad F_y = bT_y. \quad (35)$$

Коэффициенты $a_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \alpha \frac{\bar{\gamma}_{2x}\bar{\gamma}_{1y}}{\gamma_x} + \alpha \frac{1}{\gamma_y} \frac{\bar{\gamma}_{1x}\bar{\gamma}_{2y}}{\gamma_y}, \quad a_{22} = \alpha \frac{\bar{\gamma}_{3x}\bar{\gamma}_{1y}}{\gamma_x} + 135\beta_{33} \frac{\bar{\gamma}_{2y}}{\gamma_y}, \\ a_{33} &= \alpha \frac{1}{\gamma_y} \frac{\bar{\gamma}_{1x}\bar{\gamma}_{3y}}{\gamma_y} + 135\beta_{33} \frac{\bar{\gamma}_{2x}}{\gamma_y}, \\ a_{13} &= a_{31} = \alpha \frac{1}{\gamma_y} \frac{\bar{\gamma}_{1x}\bar{\gamma}_{3y}}{\gamma_y}, \quad a_{12} = a_{21} = \alpha \frac{\bar{\gamma}_{1y}\bar{\gamma}_{3x}}{\gamma_x}, \\ a_{23} &= a_{32} = \beta_{12}\bar{\gamma}_{3x}\bar{\gamma}_{3y} + 36\bar{\gamma}_{3x}\bar{\gamma}_{3y}, \quad b_{11} = \gamma_{1x}\bar{\gamma}_{1y}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\alpha, \beta_{12}, \beta_{33}$ – безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \frac{b^2}{a^2}, \quad \beta_{12} = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \\ \beta_{33} &= \frac{D_{33}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Величина η , входящая в первое уравнение системы (34), является безразмерным частотным параметром:

$$\eta = \frac{B_p \omega^2 a^2 b^2}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}. \quad (38)$$

Таким образом, задача об определении основной частоты колебаний рассматриваемой трехслойной пластины сведена к вычислению безразмерного параметра η , при котором однородная система уравнений (34) будет иметь решение, отличное от нуля.

Получим формулу для параметра η . Используя второе и третье уравнения системы (34), исключим из первого уравнения неизвестные F_x и F_y . Затем, учитывая, что $F \neq 0$, получим для η следующее выражение:

$$\eta = \frac{27}{b_{11}} \left[a_{11} + 27 \frac{9a_{12}a_{13}a_{23} - 2(a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2)}{16a_{22}a_{33} - 81a_{23}^2} \right]. \quad (39)$$

Частотный параметр η зависит от безразмерных параметров $\alpha, \beta_{12}, \beta_{33}, \gamma_x, \gamma_y$, значения которых определяются жесткостными и геометрическими характеристиками трехслойной пластины с композитными несущими слоями и ортотропным заполнителем.

Основная частота колебаний ω этой пластины при известном параметре η определяется по равенству (38):

$$\omega = \frac{\lambda}{ab} \sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}}{B_p}}, \quad (40)$$

где $\lambda = \sqrt{\eta}$.

В качестве примера определим основную частоту колебаний для нескольких трехслойных пластин с двумя свободными краями, отличающихся размерами в плане, толщинами несущих слоев и заполнителя. Пусть несущие слои выполнены из материала со следующими параметрами: $E_x^{(i)} = 54,55$ ГПа, $E_y^{(i)} = 54,55$ ГПа, $G_{xy}^{(i)} = 20,67$ ГПа, $G_{xz}^{(i)} = 3,78$ ГПа, $G_{yz}^{(i)} = 3,78$ ГПа, $\nu_{xy}^{(i)} = 0,32$, $\nu_{yx}^{(i)} = 0,32$, $\rho_i = 1\,500$ кг/м³. Материал заполнителя характеризуется модулями сдвига $G_{xz}^{(h)} = 440$ МПа, $G_{yz}^{(h)} = 220$ МПа и плотностью $\rho_h = 83$ кг/м³. Рассмотрим пластины со следующими размерами в плане: $b = 1$ м, $a = 1$ и 2 м. Пусть суммарная толщина несущих слоев t равна $0,001$ и $0,002$ м, а толщина заполнителя h будет $0,01$; $0,05$; $0,1$ м. Безразмерный параметр η определяется с помощью формул (34), (38), (39). Для вычисления круговой частоты колебаний ω используется уравнение (40). Частоты колебаний $f = \omega/2\pi$ трехслойных пластин с различными значениями размеров a, t и h приведены в табл. 1.

Для проверки полученных результатов определим основную частоту колебаний трехслойной пластины с двумя свободными краями с помощью метода конечных элементов. Расчет выполним в пакете COSMOS/M. Для моделирования воспользуемся конечным элементом SHELL4L. Значения частот колебаний, вычисленных с помощью метода конечных элементов, представлены в табл. 2.

Сравнивая соответствующие частоты из табл. 1 и 2, можно сделать вывод, что разница между полученными результатами не превышает 5 %. Это дает основания утверждать, что определение основной частоты колебаний трехслойной пластины с двумя свободными краями может быть достоверно выполнено с помощью предложенного в данной статье способа.

Таким образом, было получено решение задачи об определении основной частоты колебаний трехслойной

Таблица 1

Частоты колебаний трехслойной пластины с двумя свободными краями

$t, \text{ м}$	$a = 1 \text{ м}$			$a = 2 \text{ м}$		
	$h = 0,01 \text{ м}$	$h = 0,05 \text{ м}$	$h = 0,1 \text{ м}$	$h = 0,01 \text{ м}$	$h = 0,05 \text{ м}$	$h = 0,1 \text{ м}$
0,001	30,759	93,808	139,648	19,084	58,426	87,377
0,002	35,492	117,428	179,770	22,038	73,458	113,415

Таблица 2

Частоты колебаний трехслойной пластины с двумя свободными краями (МКЭ-решение)

$t, \text{ м}$	$a = 1 \text{ м}$			$a = 2 \text{ м}$		
	$h = 0,01 \text{ м}$	$h = 0,05 \text{ м}$	$h = 0,1 \text{ м}$	$h = 0,01 \text{ м}$	$h = 0,05 \text{ м}$	$h = 0,1 \text{ м}$
0,001	30,057	90,811	134,722	18,692	57,169	85,203
0,002	34,402	113,229	171,913	21,555	71,766	110,381

пластины, у которой два смежных края жестко закреплены, а два других свободны. Пластина состоит из двух одинаковых композитных несущих слоев и ортотропного заполнителя. Для решения динамической задачи был применен обобщенный метод Галеркина.

Выведена формула для определения основной частоты колебаний трехслойной пластины с двумя свободными краями. Верификация этой формулы для пластин с различными жесткостными параметрами выполнена с помощью метода конечных элементов. Сравнение между собой результатов вычислений позволило сделать вывод о

пригодности выведенной в статье формулы для надежного и быстрого определения основной частоты колебаний трехслойной пластины с двумя свободными краями.

Библиографические ссылки

1. Zenkert D. An Introduction to sandwich construction. London : Chameleon Press, 1995.
2. Vinson J. R. The Behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials. Lancaster : Technomic, 1999.

A. V. Lopatin, P. O. Deev

DETERMINATION OF THE FUNDAMENTAL FREQUENCY FOR RECTANGULAR SANDWICH PLATE WITH TWO FREE EDGES

In the article the problem of fundamental frequency determination for sandwich plate with two clamped edges and two free edges is solved. Variation equations of plate dynamics were solved by generalized Galerkin method. The formula for general frequency determination has been obtained.

Keywords: sandwich plate, vibration frequency, generalized Galerkin method.

© Лопатин А. В., Деев П. О., 2011

УДК 681.332.53/519.676

В. Б. Малинкин, Е. И. Алгазин, А. В. Малинкин

ИНВАРИАНТНАЯ МНОГОВОЛНОВАЯ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ПЕРЕДАЧИ

Предложена структура инвариантной многоволновой волоконно-оптической системы передачи, позволяющая существенно повысить помехоустойчивость рассматриваемой системы.

Ключевые слова: инвариант, помехоустойчивость, вероятность ошибки, отношение сигнал/шум.

В работах [1–5] проведен анализ технических характеристик инвариантных методов передачи. Эти методы используют линейные и нелинейные операции обработки. К достоинствам данных методов можно отнести существенное (более чем на 3 порядка) уменьшение вероятности ошибочного приема. К недостаткам авторы относят сложность определения параметров канала связи, а также ухудшение качественных характеристик при увеличении алфавита инвариантной системы передачи информации (ИСПИ).

Постановка задачи. Имеется многоволновая волоконно-оптическая система передачи. Длины волн в окнах прозрачности обозначим через $\lambda_1 - \lambda_N$. Окна прозрачности выбраны для сигналов передачи таким образом, что сохраняется линейный режим обработки. На вход волоконно-оптической системы передачи (ВОСП) поступает цифровой поток со скоростью V_0 . Требуется спроектировать многоволновую ИСПИ.

Решение поставленной задачи. Повышение мощности передаваемого сигнала в ВОСП приводит к появлению нелинейных эффектов. Поэтому повышение мощности

сигнала передачи не гарантирует уменьшения вероятности ошибочного приема.

Уменьшения вероятности ошибки в ВОСП можно достичь с помощью линейных инвариантных методов обработки с ограниченной мощностью передаваемого сигнала.

Данную задачу решим следующим образом. Цифровой поток со скоростью передачи V_0 разобьем на N отдельных подканалов. В каждом подканале скорость информационного сигнала будет $V_0/(N-1)$; N -й подканал отведен для передачи обучающего сигнала, как это принято в инвариантных системах. Каждый из подканалов модулирует соответствующую длину волны.

На приемной стороне каждая длина волны принимается оптическим фильтром, преобразуется в электрический вид, а затем подвергается обработке с помощью алгоритмов [1; 2]. Этот метод в научной литературе носит название «параллельной передачи».

В классических системах параллельной передачи по кабельным линиям и радиоканалам можно выделить следующие достоинства и недостатки.