

Рис. 2. Схема отнесения к актуальной угрозе безопасности ПДн

V. G. Mironova, A. A. Shelupanov

ANALYSIS OF STAGES PREPROJECT SURVEY INFORMATION SYSTEM OF PERSONAL DATA

This article describes and analyzes the main stages included in the first stage of creation of a system of protection of personal data, which is called "Preproject". The article examines the stages of audit information security for the stage of pre-survey information system of personal data.

Keywords: personal data, audit, information system.

© Миронова В. Г., Шелупанов А. А., 2011

УДК 519.62

В. А. Нестеров

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ РАСЧЕТ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ

Рассматривается новый конечный элемент балки, в расчетах которой учитывается трансверсальный сдвиг. При этом в каждом из узлов конечного элемента в качестве основных кинематических параметров присутствуют осредненные по толщине углы трансверсального сдвига. Представлены результаты численного исследования, демонстрирующие отсутствие эффекта сдвигового запираания в новой балочной конечно-элементной модели.

Ключевые слова: балка, трансверсальный сдвиг, метод конечных элементов, эффект сдвигового запираания.

В последнее время в авиационной и ракетно-космической отрасли все чаще применяются новые конструкционные материалы, позволяющие изготавливать технику разнообразного назначения с высокими удельными характеристиками. Среди прочих осо-

бое место занимают композиционные материалы. Обладая высокой удельной прочностью и жесткостью, композиты, кроме того, позволяют проектировать конструкции с требуемыми механическими свойствами в зависимости от их назначения и условий экс-

платации. Однако композитные конструкции, в том числе и балки, отличаются рядом особенностей, которые необходимо учитывать при проектировании и расчете. И основная среди них – низкая сдвиговая жесткость по отношению к трансверсальным напряжениям. Учет указанной особенности приводит к повышению порядка разрешающих уравнений за счет введения в рассмотрение углов трансверсального сдвига.

В данной работе представлен новый конечный элемент балки, в расчете которой учитывается трансверсальный сдвиг. При этом рассматривается модель, базирующаяся на математической теории пластин Рейсснера–Миндлина. При выводе основополагающих соотношений теории метода конечных элементов используется вариационный подход, при котором в качестве исходного фигурирует выражение потенциальной энергии деформации конструкции. Для сдвиговой модели балки это выражение имеет вид

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l \left(N \frac{du}{dx} + M \frac{d\theta}{dx} + Q\psi \right) dx - \int_0^l q w dx. \quad (1)$$

В выражении (1) фигурируют следующие кинематические параметры: θ – угол наклона сечения, измеряемый в плоскости XZ (рис. 1); u – перемещения точек начальной плоскости вдоль продольной оси балки; w – прогибы точек начальной плоскости; ψ – угол сдвига, или осредненная по высоте сечения деформация трансверсального сдвига, вычисляемая по формуле [1]

$$\psi = \frac{1}{h} \int_{-s}^{h-s} e_{xz} dz,$$

где h – высота сечения балки (толщина балки); $(h-s)$ и $(-s)$ – координаты по высоте верхней и нижней поверхности балки соответственно.

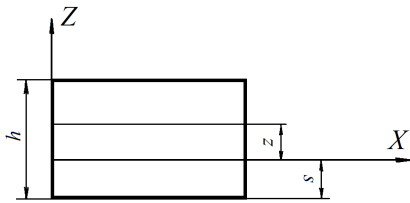


Рис. 1. Система координат в слоистой структуре

Полный угол наклона сечения представляет собой сумму двух слагаемых:

$$\theta = \psi - \frac{dw}{dx}, \quad (2)$$

где dw/dx – угол наклона сечения, происходящий за счет изгиба балки.

В энергетическом функционале (1) присутствуют силовые факторы: q – погонная балочная нагрузка и N, M, Q – внутренние балочные усилия (N – продольная сила; M – изгибающий момент; Q – перерезывающая сила), которые связаны с кинематическими параметрами посредством следующих физических соотношений:

$$N = B \frac{du}{dx} + C \frac{d\theta}{dx}, \quad M = C \frac{du}{dx} + D \frac{d\theta}{dx}, \quad Q = K\psi, \quad (3)$$

где B, C, D и K – жесткостные параметры балки: B определяет жесткость балки при растяжении-сжатии вдоль продольной оси; C – так называемая смешанная жесткость; D – изгибная жесткость; K – жесткость балки при трансверсальном сдвиге.

Получим матрицу жесткости конечного элемента и вектор эквивалентной узловой нагрузки для балки, нагруженной погонной нагрузкой q , для случая низкой трансверсальной сдвиговой жесткости. Будем полагать нагрузку постоянной вдоль одного конечного элемента. В качестве основных узловых неизвестных будем рассматривать прогиб w , изгибной угол наклона сечения, угол трансверсального сдвига и продольное перемещение u (рис. 2).

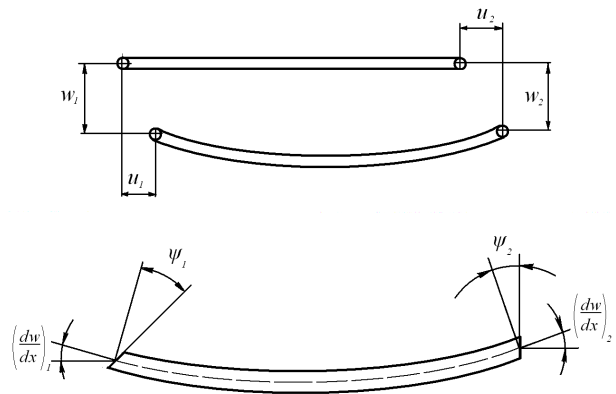


Рис. 2. Узловые параметры балочного конечного элемента

Будем полагать, что прогиб изменяется по кубическому закону вдоль длины элемента, а угол сдвига ψ и продольное перемещение u – по линейному закону:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3, \quad (4)$$

$$\psi(x) = \alpha_5 + \alpha_6 x, \quad u(x) = \alpha_7 + \alpha_8 x.$$

Основные кинематические параметры в произвольной точке конечного элемента можно выразить через их узловые значения:

$$\delta = \mathbf{P} \delta_e, \quad (5)$$

где

$$\delta = \left\{ w \quad \frac{dw}{dx} \quad \psi \quad u \right\}^T, \quad (6)$$

$$\delta_e = \left\{ w_1 \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 \quad \psi_1 \quad u_1 \quad w_2 \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \quad \psi_2 \quad u_2 \right\}^T. \quad (7)$$

Матрица \mathbf{P} имеет следующую структуру:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & p_{15} & p_{16} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 & p_{25} & p_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 & 0 & 0 & p_{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 & 0 & p_{48} \end{bmatrix}$$

и компоненты

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}, & p_{12} &= x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \\ p_{15} &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}, & p_{16} &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \\ p_{21} &= -p_{25} = -6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}, & p_{22} &= 1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}, \\ p_{26} &= -2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}, & p_{33} &= p_{44} = 1 - \frac{x}{l}, \\ p_{37} &= p_{48} = \frac{x}{l}. \end{aligned}$$

Здесь l – длина балочного элемента.

Запишем матричное выражение (5) в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} w &= \left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}\right)w_1 + \left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)_1 + \\ &+ \left(3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}\right)w_2 + \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)_2, \\ \frac{dw}{dx} &= \left(-6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3}\right)w_1 + \left(1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)_1 + \\ &+ \left(6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3}\right)w_2 + \left(-2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)_2, \\ \psi &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)\psi_1 + \frac{x}{l}\psi_2, & u &= \left(1 - \frac{x}{l}\right)u_1 + \frac{x}{l}u_2. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом соотношения углов (2) перепишем физические соотношения (3) в виде

$$\begin{aligned} N &= B\frac{du}{dx} + C\left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2}\right), \\ M &= C\frac{du}{dx} + D\left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

С помощью (8) вычислим фигурирующие в (9) производные:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{u_2 - u_1}{l}, & \frac{d\psi}{dx} &= \frac{\psi_2 - \psi_1}{l}, \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right)w_1 + \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)_1 + \\ &+ \left(\frac{6}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right)w_2 + \left(-\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим физические соотношения в перемещениях (9) в выражение полной потенциальной энергии (1), а затем заменим все фигурирующие в нем кинематические переменные (и соответствующие производные) их выражениями через узловые неизвестные (8), (10). Выполним интегрирование по длине конечного элемента балки. Полученную функцию полной потенциальной энергии продифференцируем по каждой из компонент вектора δ_e . В результате получим систему уравнений равновесия произвольного балоч-

ного элемента, которая в матричном представлении имеет следующий вид:

$$\mathbf{K}_e \delta_e = \mathbf{F}_e, \quad (11)$$

где \mathbf{K}_e – матрица жесткости балочного элемента; \mathbf{F}_e – вектор эквивалентных узловых сил.

Матрица жесткости симметрична относительно главной диагонали:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & k_{15} & k_{16} & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ & & k_{33} & k_{34} & 0 & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ & & & k_{44} & 0 & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & 0 & 0 \\ & & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ c & u & m & m & & & k_{77} & k_{78} \\ & & & & & & & k_{88} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $k_{11} = 12\frac{D}{l^3}$; $k_{12} = 6\frac{D}{l^2}$; $k_{15} = -12\frac{D}{l^3}$; $k_{16} = 6\frac{D}{l^2}$;
 $k_{22} = 4\frac{D}{l}$; $k_{23} = -\frac{D}{l}$; $k_{24} = -\frac{C}{l}$; $k_{25} = -6\frac{D}{l^2}$;
 $k_{26} = 2\frac{D}{l}$; $k_{27} = \frac{D}{l}$; $k_{28} = \frac{C}{l}$; $k_{33} = \frac{D}{l} + \frac{Kl}{3}$; $k_{34} = \frac{C}{l}$;
 $k_{36} = \frac{D}{l}$; $k_{37} = -\frac{D}{l} + \frac{Kl}{6}$; $k_{38} = -\frac{C}{l}$; $k_{44} = \frac{B}{l}$; $k_{46} = \frac{C}{l}$;
 $k_{47} = -\frac{C}{l}$; $k_{48} = -\frac{B}{l}$; $k_{55} = 12\frac{D}{l^3}$; $k_{56} = -6\frac{D}{l^2}$;
 $k_{66} = 4\frac{D}{l}$; $k_{67} = -\frac{D}{l}$; $k_{68} = -\frac{C}{l}$; $k_{77} = \frac{D}{l} + \frac{Kl}{3}$;
 $k_{78} = \frac{C}{l}$; $k_{88} = \frac{B}{l}$.

Вектор эквивалентных узловых сил имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}_e = \left\{ \frac{ql}{2} \quad \frac{ql^2}{12} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{ql}{2} \quad -\frac{ql^2}{12} \quad 0 \quad 0 \right\}^T. \quad (13)$$

Рассмотрим балку длиной L , разбитую на n конечных элементов (рис. 3). Выделим i -й конечный элемент.

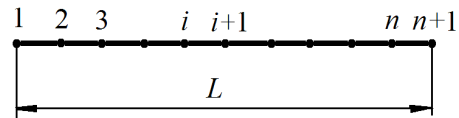


Рис. 3. Конечно-элементная модель балки

Полученная для него по описанной выше процедуре система уравнений равновесия имеет вид

$$\mathbf{K}_e^{(i)} \delta_e^{(i)} = \mathbf{F}_e^{(i)}, \quad (14)$$

где $\delta_e^{(i)}$ – вектор узловых неизвестных i -го элемента, соединяющего i -й и $i + 1$ -й узлы, $\mathbf{K}_e^{(i)}$ и $\mathbf{F}_e^{(i)}$ – матрица

жесткости и вектор эквивалентной узловой нагрузки i -го конечного элемента, определяемые как (12) и (13) соответственно.

Сформируем глобальный вектор узловых неизвестных. Для этого введем в рассмотрение вектор узловых неизвестных i -го узла одномерной КЭ сетки:

$$\delta_i = \left\{ w_i \left(\frac{dw}{dx} \right)_i \psi_i u_i \right\}. \quad (15)$$

Тогда глобальный вектор узловых неизвестных можно представить в виде

$$\Delta = \{ \delta_1 \delta_2 \dots \delta_i \dots \delta_{n+1} \}^T. \quad (16)$$

Чтобы получить глобальную матрицу жесткости и глобальный вектор узловых нагрузок, необходимо записать выражение полной потенциальной энергии для всего ансамбля конечных элементов:

$$E_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n (U_i + \Pi_i). \quad (17)$$

Выражения потенциальной энергии деформации и потенциала внешних сил отдельных элементов получаются по описанной выше процедуре. В результате преобразований получим выражение полной потенциальной энергии балки как функцию от всех узловых неизвестных:

$$E_{\Sigma} = f \left(w_i \left(\frac{dw}{dx} \right)_i \psi_i u_i \right), \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Дифференцируя (18) по каждой компоненте глобального вектора неизвестных (16), получим следующую СЛАУ, являющуюся системой уравнений равновесия всей балки:

$$\mathbf{K}_{\Sigma} \Delta = \mathbf{F}_{\Sigma}, \quad (19)$$

где \mathbf{K}_{Σ} – глобальная матрица жесткости балки; \mathbf{F}_{Σ} – глобальный вектор эквивалентных узловых сил.

Глобальную матрицу жесткости и глобальный вектор нагрузки можно сформировать по более простой процедуре [2]. Для этого матрицу жесткости элемента представим в блочном виде:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{K}_{II} \\ \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_{IV} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $\mathbf{K}_I, \mathbf{K}_{II}, \mathbf{K}_{III}, \mathbf{K}_{IV}$ – подматрицы размером 4×4 – имеют следующее представление:

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} \frac{12D}{l^3} & \frac{6D}{l^2} & 0 & 0 \\ \frac{6D}{l^2} & \frac{4D}{l} & \frac{D}{l} & \frac{C}{l} \\ 0 & \frac{D}{l} & \frac{2Kl^2+6D}{6l} & \frac{C}{l} \\ 0 & \frac{C}{l} & \frac{C}{l} & \frac{B}{l} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} \frac{12D}{l^3} & \frac{6D}{l^2} & 0 & 0 \\ \frac{6D}{l^2} & \frac{2D}{l} & \frac{D}{l} & \frac{C}{l} \\ 0 & \frac{D}{l} & \frac{Kl^2-6D}{6l} & \frac{C}{l} \\ 0 & \frac{C}{l} & \frac{C}{l} & \frac{B}{l} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{III} = \begin{bmatrix} \frac{12D}{l^3} & \frac{6D}{l^2} & 0 & 0 \\ \frac{6D}{l^2} & \frac{2D}{l} & \frac{D}{l} & \frac{C}{l} \\ 0 & \frac{D}{l} & \frac{Kl^2-6D}{6l} & \frac{C}{l} \\ 0 & \frac{C}{l} & \frac{C}{l} & \frac{B}{l} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{IV} = \begin{bmatrix} \frac{12D}{l^3} & \frac{6D}{l^2} & 0 & 0 \\ \frac{6D}{l^2} & \frac{4D}{l} & \frac{D}{l} & \frac{C}{l} \\ 0 & \frac{D}{l} & \frac{2Kl^2+6D}{6l} & \frac{C}{l} \\ 0 & \frac{C}{l} & \frac{C}{l} & \frac{B}{l} \end{bmatrix}.$$

Тогда глобальную матрицу жесткости однородной балки постоянной жесткости, состоящую из конечных элементов равной длины, можно сформировать следующим образом:

$$\mathbf{K}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_{IV} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_{IV} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_{IV} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_{IV} & \mathbf{K}_{II} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{III} & \mathbf{K}_{IV} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Здесь под $\mathbf{0}$ следует понимать нулевые матрицы размером 4×4 .

Для удобства интерпретации представлена глобальная матрица жесткости для балки, состоящей из 5 конечных элементов. Глобальный вектор нагрузки в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = \left\{ \frac{ql}{2} \quad \frac{ql^2}{2} \quad 0 \quad 0 \quad ql \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ql \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad ql \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (22)$$

$$\left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad ql \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{ql}{2} \quad -\frac{ql^2}{12} \quad 0 \quad 0 \right\}^T.$$

Следует иметь в виду, что в разрешающей СЛАУ (19) необходимо учесть граничные условия.

Одной из самых распространенных конструкций, в расчетах которых необходимо учитывать трансверсальный сдвиг, является трехслойная оболочка с податливым наполнителем. Рассмотрим модель трехслойной балки (рис. 4). Будем полагать, что жесткость несущих слоев существенно выше жесткости промежуточного слоя. В этом случае можно допустить, что параметры жесткости балки B, C и D обеспечены несущими слоями.

При совпадении начальной плоскости со срединной плоскостью балки и при симметричной структуре слоистого пакета смешанные жесткости (C) равны нулю. Остальные параметры жесткости вычисляются по формулам

$$B = \frac{2E_n b t}{1 - \mu_n^2}, \quad D = \frac{E_n b (H^3 - h^3)}{12(1 - \mu_n^2)}, \quad (23)$$

$$K = H^2 \left/ \left(\frac{2t}{G_n} + \frac{h}{G_3} \right) \right.,$$

где H – полная толщина пакета; h – толщина слоя заполнителя; t – толщина каждого из несущих слоев; b – ширина сечения; E_n – приведенный модуль упругости материала несущих слоев; G_n и G_3 – модули сдвига материалов несущих слоев и заполнителя соответственно.

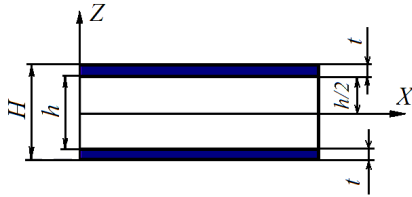


Рис. 4. Трехслойная конструкция

Как известно, в последнее время получила распространение конечно-элементная модель податливых при трансверсальном сдвиге балок, в которой в качестве основных узловых переменных фигурируют продольные перемещения и прогибы точек продольной оси и полный угол поворота сечения (θ). Эта модель с тремя кинематическими параметрами в узле обладает определенным недостатком, который называется эффектом сдвигового запираания (ЭСЗ).

Для того чтобы выяснить, не проявится ли эта же проблема в решениях с использованием нашей КЭ-модели, проведем следующий численный эксперимент. Выполним две серии расчетов для балок различной толщины. В первой серии будет задействована рассматриваемая в данной работе модель с 4 узловыми кинематическими параметрами. Во второй серии нужно использовать конечно-элементную модель, основывающуюся на классической теории оболочек Кирхгофа. В этой классической модели в каждом узле присутствует 3 кинематических переменных: продольное перемещение, прогиб и изгибной угол поворота нормали (dw/dx). Таким образом, вектор узловых неизвестных балочного элемента в данном случае имеет следующий вид:

$$\delta_e = \left\{ w_1 \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 u_1 w_2 \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 u_2 \right\}^T. \quad (24)$$

Процедура вывода разрешающих уравнений равновесия для одного конечного элемента точно такая же, что описана выше для модели, учитывающей трансверсальный сдвиг. Только во всех выражениях необходимо положить $\psi = 0$, и, следовательно,

$$\theta = -\frac{dw}{dx}.$$

Вариационное уравнение при этом будет иметь вид

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l \left(N \frac{du}{dx} - M \frac{d^2w}{dx^2} \right) dx - \int_0^l q w dx. \quad (25)$$

Размерность матрицы жесткости элемента сократится до 6:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & k_{15} & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & 0 \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ c & u & m & m & & k_{66} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

где $k_{11} = 12 \frac{D}{l^3}$; $k_{12} = 6 \frac{D}{l^2}$; $k_{14} = -12 \frac{D}{l^3}$; $k_{15} = 6 \frac{D}{l^2}$;
 $k_{22} = 4 \frac{D}{l}$; $k_{23} = -\frac{C}{l}$; $k_{24} = -6 \frac{D}{l^2}$; $k_{25} = 2 \frac{D}{l}$; $k_{26} = \frac{C}{l}$;
 $k_{33} = \frac{B}{l}$; $k_{35} = \frac{C}{l}$; $k_{36} = -\frac{B}{l}$; $k_{44} = 12 \frac{D}{l^3}$; $k_{45} = -6 \frac{D}{l^2}$;
 $k_{55} = 4 \frac{D}{l}$; $k_{56} = -\frac{C}{l}$; $k_{66} = \frac{B}{l}$.

Вектор эквивалентных узловых при этом содержит 6 компонент:

$$\mathbf{F}_e = \left\{ \frac{ql}{2} \quad \frac{ql^2}{12} \quad 0 \quad \frac{ql}{2} \quad -\frac{ql^2}{12} \quad 0 \right\}^T. \quad (27)$$

Рассмотрим трехслойную шарнирно-опертую балку со стальными несущими слоями толщиной в 1 мм каждый и весьма податливым заполнителем ($E_3 = 50$ МПа). Длина балки – 1 м, ширина сечения – 10 мм. С помощью специально разработанной программы [3] выполним серию статических расчетов этой балки при нагрузке равномерно распределенным балочным усилием (q , Н/м). В качестве основного результата будем оценивать прогиб в центре пролета. Будем сравнивать центральные прогибы, полученные для трехслойной балки с различной толщиной слоя заполнителя. Параллельно выполняются расчеты по двух КЭ-моделям: сдвиговой и без учета сдвига (Кирхгофа–Лява). Результаты сведем в таблицу. В первом столбце таблицы указана толщина среднего слоя, которая последовательно уменьшается от 50 мм и практически до нуля. Во втором столбце – величина погонной нагрузки, которую тоже приходится уменьшать, чтобы НДС конструкции всякий раз сохраняло адекватность линейной теории. Результаты расчетов по основной сдвиговой модели – в пятом столбце (жирно выделены). Прогибы, вычисленные по модели Кирхгофа–Лява – в третьем столбце, а в четвертом столбце – относительная разница прогибов, определенных по этим двум моделям. Эти данные наглядно демонстрируют, что по мере уменьшения толщины слоя заполнителя результаты решения с использованием сдвиговой модели приближаются к результатам, полученным на основе классического решения, что свидетельствует об отсутствии ЭСЗ в разработанной КЭ-модели. Эти же результаты лишней раз подчеркивают необходимость применения сдвиговой модели для расчета конструкций, весьма податливых при трансверсальном сдвиге.

Центральные прогибы трехслойной шарнирно-опертой балки

h , мм	Нагрузка, q , Н/м	Прогиб в модели Кирхгофа–Лява, w_1 , мм	Δ (w_1, w_2), %	Прогиб в основной сдвиговой модели, w_2 , мм	Δ (w_2, w_3), %	Прогиб во второй сдвиговой модели, w_3 , мм
50	1000	4,767	71,60	16,786	5,84	17,767
40	500	3,688	66,65	11,057	6,84	11,813
30	500	6,450	59,61	15,971	8,21	17,283
20	200	5,620	48,87	10,992	10,26	12,120
10	100	10,220	30,64	14,735	13,47	16,720
5	10	3,413	16,27	4,076	15,63	4,713
3	5	3,796	9,32	4,186	16,58	4,880
1	1	2,862	2,45	2,934	19,70	3,512
0,5	0,5	2,400	1,07	2,426	25,72	3,050
0,1	0,2	1,607	0,19	1,610	80,56	2,907
0,05	0,2	1,727	0,12	1,729	145,05	4,237
0,01	0,2	1,8322	0,03	1,8328	709,61	14,832

Иногда в тех случаях, когда жесткость несущих слоев существенно выше жесткости слоя заполнителя, используется сдвиговая модель, в которой при определении коэффициента трансверсальной сдвиговой жесткости не учитывается вклад несущих слоев, и для вычисления этого параметра используется формула

$$K = G_3 h. \quad (28)$$

Результаты расчетов, выполненных по этой сдвиговой модели, помещены в последнем столбце таблицы. В предпоследнем столбце даны отклонения этих результатов от прогибов, полученных с применением основной сдвиговой модели. Эти данные свидетельствуют о том, что обе сдвиговые модели дают примерно одинаковые решения для трехслоек с относительно толстым слоем заполнителя. По мере уменьшения толщины среднего слоя результаты двух решений начинают расходиться, достигая существенных величин ($\approx 20\%$) в том случае, когда толщина этого слоя (заполнителя) становится сопоставимой с толщиной несущих слоев. Если толщина промежуточного слоя заметно меньше толщины несущих слоев, то, как видно из приведенных данных, нельзя пользоваться формулой (28) для определения сдвиговой трансверсальной жесткости трехслойных конструкций.

Итак, разработана конечно-элементная модель балки, податливой при трансверсальном сдвиге. Разрешающие уравнения теории МКЭ получены вариационным способом. Вектор узловых неизвестных содержит 4 независимых кинематических параметра,

включая осредненный по высоте сечения угол трансверсального сдвига. В результате численного эксперимента на примерах расчетов трехслойной балки показано, что в КЭ-модели с полным набором узловых кинематических параметров отсутствует эффект сдвигового заклинивания. Выполнено сравнение результатов расчета трехслойных балок по двум сдвиговым моделям. Определены границы применимости упрощенной формулы для коэффициента трансверсальной сдвиговой жесткости.

Библиографические ссылки

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1988.
2. Комплекс программ для получения основных матриц и векторов теории МКЭ для конечных элементов балки, пластины и оболочки, податливых при трансверсальном сдвиге : программа для ЭВМ : свидетельство о гос. регистрации № 2010611594 от 26.02.2010 / Нестеров В. А. № 2009617627 ; заявл. 31.12.2009.
3. Исследование НДС, устойчивости и собственных колебаний трехслойной балки с податливым заполнителем с помощью МКЭ при учете трансверсального сдвига в качестве узлового неизвестного: программа для ЭВМ : свидетельство о гос. регистрации № 2010611781 от 09.03.2010 / Нестеров В. А. № 2010610178 ; заявл. 18.01.2010.

V. A. Nesterov

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SANDWICH BEAM

The author considers a new finite element of a beam with low value of transverse shear stiffness. As the basic kinematic variables transverse shear strains are appointed. Results of numerical analysis showing urgency of the model are presented.

Keywords: beam, finite element method, transverse shear strains.

© Нестеров В. А., 2011