

**ВОПРОСЫ РЕАЛИЗАЦИИ ГАРАНТИРОВАННЫХ МЕТОДОВ ВКЛЮЧЕНИЯ
ВЫЖИВАЮЩИХ ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ**

Описано применение гарантированных методов, позволяющих получать границы траекторий управляемых динамических систем, сохраняющихся (выживающих) до некоторого момента времени в пределах заданного множества. Такие количественные оценки являются границами множеств достижимости, удовлетворяющими условиям выживаемости. Приведены примеры расчетов границ выживающих траекторий.

Ключевые слова: гарантированные границы множеств достижимости, выживающие траектории.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которую входят члены, описывающие параметрические возмущения, или неточности задания коэффициентов системы. Известны лишь границы, в которых они могут лежать. Среди математических описаний подобных задач можно выделить задачи проверки гарантированных условий безопасности и задачи построения множеств достижимости, т. е. задачи выживания (термин взят из [1]).

Задачи выживания для управляемых динамических систем включают в себя большое число вполне конкретных приложений, интерес к которым не ослабевает с конца 50-х гг. прошлого столетия. К числу таких прикладных задач относятся задачи об обходе препятствия, о построении управления, удерживающего траектории системы в заранее заданном множестве, в частности на заданном многообразии, некоторые задачи математической экономики и многое другое.

Поведение управляемого объекта выражается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u), \quad u \in P, \quad t \in [t_0, \theta], \quad t_0 < \theta < \infty, \quad (1)$$

где y – m -мерный вектор системы; u – управление; P – компакт в евклидовом пространстве R^k . При этом предполагается, что выполнены следующие условия:

– функция $f(t, y, u)$ непрерывна по совокупности переменных в $I \times R^m \times P$, а для любой ограниченной замкнутой области $D \subset R^m$ существует постоянная $L = L(D) \in (0, \infty)$, такая что

$$\|f(t, y_*, u) - f(t, y^*, u)\| \leq L \|y_* - y^*\|$$

$$\forall (t, y_*, u), (t, y^*, u) \in I \times D \times P;$$

– существует постоянная $\mu \in (0, \infty)$, такая что

$$\|f(t, y, u)\| \leq \mu(1 + \|y\|) \quad \forall (t, y, u) \in I \times R^m \times P.$$

Допустимое управление $u(t)$ – измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая включению $u(t) \in P, t \in I$.

Решением уравнения (1), порожденным допустимым управлением, является абсолютно непрерывная

функция $y(t), t \in I$, такая что $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), u(t))$ почти всюду на I .

Множество достижимости $Y^*(t)$ определяется как множество всех точек из фазового пространства, в которые можно перейти на отрезке времени $[t^0, T]$ из всех точек начального множества фазовых состояний M^0 по решениям системы (1) с начальным условием $y(t^0) \in M^0$ и с допустимым управлением $u(t)$. Точное или приближенное описание множества достижимости управляемой системы позволяет оценить предельные возможности системы управления и выбрать оптимальное управление [2–6].

Включением (гарантированной оценкой) множества достижимости ОДУ $Y^*(t)$ называется многозначная функция $Y(t)$, такая что для любого $y(t^0) \in M^0$ и $t \in [t^0, T]$ решение $y(t, y^0) \in Y(t)$. Выбор возможных реализаций управляющих воздействий u стеснен ограничениями $u \in Q, t \in [t^0, T]$, отражающими особенности рассматриваемой задачи. Для многих задач ограничения на воздействия могут носить только геометрический характер. Это значит, что в каждый момент времени $t \in [t^0, T]$ значение $u(t)$ может быть любым из некоторого выпуклого компактного множества Q . Задача гарантированного оценивания состоит в определении множества (или его границ)

$$Y(t) \supseteq \bigcup_{y^0 \in Y^0} y(t, t^0, y^0). \quad (2)$$

Чтобы выделить выживающую траекторию $y(t) \in N$ при $t_0 \leq t \leq \eta$, необходимо контролировать выполнение включения $Y(\eta) \in M$ для любого движения $y(\cdot)$, исходящего из точек области допустимых начальных позиций Y^0 и заданных множествах N, M при переборе всех управляющих воздействий, удовлетворяющих ограничению $u \in Q$ [6]. Таким образом предполагается, что неопределенные факторы в математической модели управляемой системы не имеют вероятностного описания, а известны лишь с точностью до множеств, их содержащих. Одной из основ-

ных проблем теории управления, т. е. оценивания в условиях неопределенности, является проблема нахождения информационных множеств неопределенных динамических систем (2), а также подмножеств указанного семейства, состоящих из всех траекторий, удовлетворяющих дополнительному условию выживаемости. Таким образом, задача гарантированного оценивания состоит в описании множества решений системы (2) (траекторного пучка) и соответствующих сечений в момент времени t (сечений этого множества).

Выполнение гарантированных методов, основанных на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории [7–14], разделено на два этапа: предиктор и корректор.

На первом этапе (предикторе) происходит построение (запись) символьных формул приближенных решений как векторных функций $S^n(Y^0) \circ S^{n-1}(Y^0) \circ \dots \circ S^1(Y^0)$, где вектор Y^0 – вектор начальных значений, рассматриваемых как символьные величины. Затем вычисляется область значений S_y этой формулы.

На втором этапе (корректоре) определяется гарантированная оценка глобальной ошибки приближенного решения $R(Y^0, t)$.

Выполнение преобразований над символьными формулами является началом построения гарантированных границ решений задачи, после которого нужно провести числовые расчеты. Некоторые системы компьютерной алгебры позволяют исходя из построенных формул генерировать программы на подходящем для таких расчетов языке программирования. Однако получаемые формулы, как правило, являются громоздкими и непосредственные вычисления с их помощью неэкономны, особенно если речь идет о вычислениях в цикле. Кроме того, предоставляемая системами компьютерной алгебры возможность проводить вычисления с числами большой разрядности делает арифметические операции дорогими, так что проблема экономии вычислений стоит в этом случае еще более остро.

Используя последовательные подстановки и приведение подобных членов, символьную формулу можно преобразовать в выражение, зависящее только от Y^0 . При этом затраты памяти для хранения получающихся символьных формул будут крайне высокими.

Поэтому в общем случае для гарантированных методов предлагается алгоритм вычислений (преобразований и вычислений) символьных формул, основанный на поэтапном статичном хранении информации и ее преобразовании на завершающем этапе алгоритма. Таким образом, формула будет представлять рекурсивную структуру, размер которой изменяется. Для записи такой формулы в компьютере используются линейные динамические структуры. В силу этого модель вычислений (преобразований и вычислений) символьных формул осуществляется без явного вы-

писывания суперпозиций компонентов формулы, определяемых на каждом шаге. Связь между этими компонентами определяется посредством задания механизма адресации. Ссылки на адреса различных уровней хранятся в стековой памяти в виде дерева. Генерация кода вычислений по символьной формуле осуществляется в процессе обхода этого дерева, начиная с вершин.

В алгоритме получения символьных формул

$$Y^n = F^n(t^0, \dots, t^n, Y^0, Y^1, \dots, Y^n) = S^n(Y^0) \circ \dots \circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i)$$

используется приведенная ниже методика обработки последовательности символьных формул. Пусть $\varphi(y^0)$ – это однозначное отображение единичного интервала из R^1 на гиперкуб из R^n , которое каждой точке $t \in R$ сопоставляет точку $y = \varphi(t)$. При помощи такого отображения можно построить алгоритм исполнения, который для каждой точки $t \in R$ позволяет определить формулу отображения $F(Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_n^0)$ и процесс ее сборки по адресам. Для этого в качестве отображения $\varphi(y^0)$ предлагается использовать непрерывное, однозначное отображение единичного интервала на n -мерный куб, известное также под названием *кривой Пеано*, заполняющей пространство. Фактически кривая Пеано представляет собой непрерывную, нигде не дифференцируемую кривую, которая проходит через все точки единичного гиперкуба в пространстве R^n . Изобразить кривую Пеано нельзя, можно лишь дать последовательность кривых, которая в пределе сходится к ней [15]. Каждая такая кривая называется *приближением кривой Пеано* и имеет номер, определяющий ее номер в последовательности кривых.

Таким образом, $2m$ -приближение можно рассматривать как некоторую аппроксимацию m -функции в рекурсивной формуле. Это соответствие задано отображением элементов конечного множества отрезков из единичного интервала и элементами конечного множества гиперкубов, входящих в R^n .

Такое соответствие строится следующим образом. Гиперкуб разбивается на 2^n гиперкубов, называемых *квантами первого разбиения*. Длина ребра каждого такого кванта равна $1/2$, кванты нумеруются индексом i_1 от $2^n - 1$ так, чтобы номера квантов, имеющих общую грань, отличались на 1. Кванты первого разбиения будем обозначать через $r(i_1)$, $i_1 = 2^n - 1$.

Каждый квант первого разбиения таким же образом, как и гиперкуб в R^n , разбивается на кванты второго разбиения с длиной ребра $1/4$, которые нумеруются по тому же принципу, что и кванты первого разбиения. При этом нулевой квант второго разбиения, входящий в r_{i_1} , должен иметь общую грань с $(2^n - 1)$ -м

квантом второго разбиения, входящим в квант $r(i_1 - 1)$. Кванты второго разбиения обозначим через $r(i_1, i_2)$, где i_2 – номер кванта второго разбиения, входящего в квант $r(i_1)$.

Аналогично получаем кванты любого разбиения с номером $r(i_1, i_2, \dots, i_m)$, $0 \leq i_j \leq 2^n$. Способ соединения между собой квантов, номера которых отличаются на 1 в лексикографическом порядке, лежит в основе алгоритма, связывающего адреса, по которым хранятся компоненты символьной формулы.

Совокупность гиперкубов в пространстве R^n , рекурсивно квантованных m раз, носит название *дискретного пространства m разбиения* и обозначается G_m^n . Если в каждом разбиении число частей, на которые делится квант предыдущего разбиения, выбрать равным 2^n , то при любом m количество квантов в G_m^1 и G_m^n совпадет. Кванты m -разбиения G_m^1 , полученные из одного кванта $(m - 1)$ -го разбиения, нумеруются слева направо индексом i_m , $0 \leq i_m \leq 2^n$ и обозначаются $q(i_1, i_2, \dots, i_m)$. Сопоставив кванты G_m^1 и G_m^n с одинаковыми наборами индексов i_1, i_2, \dots, i_m , получим взаимно однозначное отображение $\phi_m: R_m^1 \rightarrow R_m^n$, для отдельных квантов $\phi_m(q(i_1, i_2, \dots, i_m))$. Отображение ϕ_m можно также интерпретировать как соответствие между равноотстоящими точками из R^1 (центрами квантов m -разбиения) и узлами равномерной прямоугольной решетки в R^n , где каждый узел также является центром кванта m -разбиения. Итогом работы описанного алгоритма будет возможность в любой точке t^k построить символьную формулу решения и получить на основе этой формулы численные значения решений.

Приведем примеры расчетов границ выживающих траекторий.

Первый пример – определение области при противоаварийном управлении.

При больших возмущениях в электроэнергетических системах (ЭЭС) возникают электромеханические переходные процессы, характеризующиеся взаимными движениями роторов синхронных машин в этих системах, существенными изменениями напряжений в узлах и токов в элементах ЭЭС. С электромеханическими переходными процессами связана проблема динамической устойчивости. Если динамическая устойчивость не нарушается, то в процессе электромеханических колебаний взаимные движения роторов синхронных машин происходят в некоторой ограниченной области. При нарушении динамической устойчивости разности углов, определяющих пространственное положение роторов синхронных машин, неограниченно возрастают. При развитии аварийных ситуаций в сложных ЭЭС имеют место длительные переходные процессы, связанные с отклонениями частот в отдельных частях этих систем. В случае не-

благоприятного развития таких ситуаций эти отклонения могут оказаться недопустимыми по условиям работы оборудования системы и потребителей. Подобные процессы часто происходят при системных авариях. С ними связано понятие живучести ЭЭС, определяемой как свойство системы противостоять возмущениям, не допуская их каскадного развития с массовым нарушением питания потребителей. При исследовании электромеханических переходных процессов система дифференциальных уравнений, описывающих динамику состояний ЭЭС, включает в себя уравнения следующих динамических элементов системы: движения роторов синхронных и асинхронных машин; электромагнитных переходных процессов в обмотках роторов: динамики регуляторов возбуждения и скорости синхронных машин; динамики регуляторов возбуждения и скорости синхронных машин; динамики регуляторов выпрямительных нагрузок и электропередач постоянного тока.

Границы множества решений в простейшей модели энергосистемы «станции – шины бесконечной мощности» [16] вычислялись при постоянно действующих возмущениях

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -16,52(y_2 + 1,134)\sin(y_1 + 1,256) + \\ &\quad + 2,161\sin 2(y_1 + 1,256) + 16,05, \\ \frac{dy_3}{dt} &= -0,257y_3 + 0,0674\cos(y_1 + 1,256) + \\ &\quad + 0,19u + 0,0235538. \end{aligned}$$

Результаты расчета приведены ниже (рис. 1).

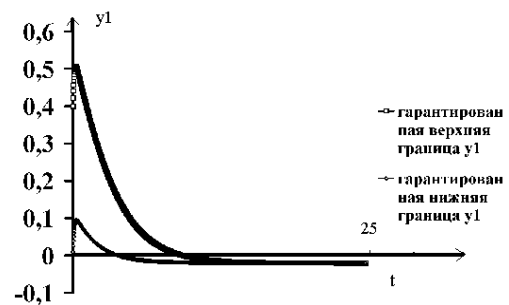


Рис. 1

Второй пример – расчет двойного маятника с общей управляемой точкой подвеса:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 + y_2 + u, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_4, \\ \frac{dy_4}{dt} &= y_1 - y_2 - w, \end{aligned}$$

Этот маятник можно рассматривать как систему из двух тел единичной массы, соединенных пружиной с единичным коэффициентом упругости и скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня. Уравнения модели совпадают с линеаризованными уравнениями, описывающими поведение двойного маятника.

Управляющее воздействие $u \in R$ прикладывается к левому телу для компенсации влияния внешних возмущений $w \in R$, действующих на правое тело. Возмущения предполагаются произвольными, но ограниченными в любой момент времени: $|w(t)| \leq 1$.

Обозначим через y_1, y_2 координату и скорость левого тела, а через y_3, y_4 – координату и скорость пра-

вого тела. Тогда $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in R^4$ является вектором фа-

зового состояния данной динамической системы, полностью описывающей движение двойного маятника. В качестве выхода возьмем вектор $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, харак-

теризующийся величиной управления и координатой второго тела, на которой действуют внешние возмущения. Полученные в результате расчета включения множеств точных решений компоненты y_2, y_3 представим в графическом виде (рис. 2).

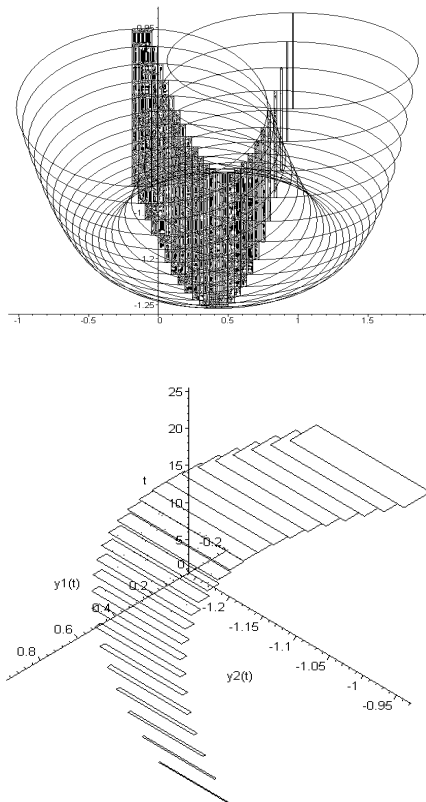


Рис. 2

Таким образом, результаты применения методов, основанных на аппроксимации оператора сдвига вдоль траектории, дают хорошие оценки множеств решений, отклонение которых от точных решений стремится к нулю при уменьшении шага сетки.

Библиографические ссылки

1. Aubin J.-P. Viability theory. Boston ; Basel ; Berlin : Birkhauser, 1991.
2. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения : тр. Мат. ин-та Рос. акад. наук. М., 1995. Т. 211. С. 304–315.
3. Незнахин А. А., Ушаков В. Н. Сеточный метод построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 6. С. 895–898.
4. Незнахин А. А. О построении ядра выживаемости для обобщенной динамической системы // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, № 5. С. 781–790.
5. Незнахин А. А., Ушаков В. Н. О построении ядра выживаемости для нелинейной управляемой системы при наличии целевого множества // Прикл. математика и механика. 2005. Т. 69, № 6. С. 976–985.
6. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
7. Новиков В. А., Рогалев А. Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 2. С. 219–231.
8. Рогалев А. Н. Исследование практической устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 5. С. 148–150.
9. Рогалев А. Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 102–116.
10. Рогалев А. Н. Гарантированные оценки безопасного функционирования технических и электроэнергетических систем // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф : тр. Всерос. конф. с междунар. участием / Ин-т вычисл. моделирования Сиб. отд-ния Рос. акад. наук. Красноярск, 2003. С. 42–48.
11. Рогалев А. Н. Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 1. С. 86–93.
12. Рогалев А. Н. Символьные вычисления в гарантированных методах, выполненные на нескольких процессорах // Вестник НГУ. Серия : Информационные технологии. 2006. Т. 4, № 1. С. 56–62.
13. Рогалев А. Н. Вопросы устойчивости ансамблей дифференциальных уравнений // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 3. С. 111–117.

14. Rogalyov A. N. Computation of reachable sets guaranteed bounds // Control, Diagnostics, and Automation (ACIT-CDA-2010) : Proc. of the IASTED Intern. Conf. on Automation, Control, and Inform. Technology. Calgary, Canada, 2010. P. 132–139.

15. Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программы. М. : Мир, 1985.

16. Руденко Ю. И., Ушаков И. А. К вопросу оценки живучести сложных систем энергетики // Изв. АН СССР. Серия : Энергетика и транспорт. 1979. № 1. С. 14–19.

A. N. Rogalyov

IMPLEMENTATION OF CONTRIBUTED METHODS OF CONTAINMENT OF VIABLE TRAJECTORIES OF CONTROLLED SYSTEMS

The article describes implementation of contributed methods, which give the bounds of the trajectory of controlled systems, remaining (viable) to a certain time within a given set. Such quantitative estimations are bounds of reachable sets, satisfying the conditions of survival. Examples of computations of surviving trajectories bounds are presented.

Keywords: guaranteed bounds of the reachable sets, viable trajectories.

© Рогалев А. Н., 2011

УДК 551.510.534

Т. В. Рублева, В. Б. Кашкин, В. М. Мясников, С. А. Селиверстов

ИЗМЕНЧИВОСТЬ ПОЛЯРНОГО СТРАТОСФЕРНОГО ОЗОНА ЮЖНОГО ПОЛУШАРИЯ ПО СПУТНИКОВЫМ ДАННЫМ (АППАРАТУРА TOMS, OMI)

Рассмотрены пространственно-временные особенности весенней озоновой аномалии в Антарктиде (озоновой дыры). На основе спутниковых данных и с помощью корреляционно-экстремального алгоритма рассчитаны зональные скорости масс озона в южной полярной стратосфере. Приведены результаты расчетов площади озоновой дыры для области, где общее содержание озона (ОСО) меньше 220 единиц Добсона, и дефицита массы озона в стратосфере над Антарктидой. Обнаружена тесная связь дефицита массы озона в озоновой дыре и зональной скорости области накопления общего содержания озона в циркумполярном вихре за 1996–2009 гг.

Ключевые слова: истощение озонового слоя, динамика нижней стратосферы.

Исследование вариаций параметров озоносферы и поиски физических причин этих изменений до настоящего времени остаются проблемой, актуальность которой определяется существенной ролью озона в сложной системе «Солнце – атмосфера – поверхность Земли – космос». Поглощая ИК-излучение Земли в полосе 9,57 мкм, озон вносит вклад в изменение температуры атмосферных слоев, а поглощая УФ-излучение Солнца в диапазоне 200...320 нм, он влияет на температурную стратификацию стратосферы, регулируя в этом слое планетарные тепловые и циркуляционные процессы.

С экологической точки зрения наиболее важен стратосферный озон, максимальная концентрация которого приходится на область высот 16...25 км (нижнюю стратосферу). Если собрать весь озон в слой вблизи поверхности Земли при давлении 760 мм рт. ст. и температуре 0 °С, то толщина этого слоя, т. е. общее содержание озона (ОСО), составит всего около 3 мм, или 300 единиц Добсона (ЕД) (1 ЕД = 10⁻⁵ м).

Несмотря на большое количество экспериментальных и теоретических исследований причины уменьшения общего содержания озона до сих пор не известны. По оценкам [1], до введения запрета на

производство озоноразрушающих веществ озоновый слой в северном полушарии истощался на 3,4 % за 10 лет, в Южном – на 4,8 %. После введения этого запрета в северном полушарии наблюдается уменьшение озона на 2,9 %, а в южном – на 1,0 %. Погрешность оценки скорости деградации ОСО не превышает 0,02 % за десятилетие. Эти оценки свидетельствуют о том, что уменьшение озонового слоя над северным полушарием происходит быстрее, чем над южным.

Проблема истощения озонового слоя обратила внимание на существующие межполушарные различия в сезонном ходе полярного стратосферного озона, особенно в весенний период [2]. Так, весной в северном полушарии ОСО снижается с 420 до 340 ЕД, а в южном – с 360 до 200 ЕД (рис. 1). Различия в значениях ОСО обусловлены особенностями циркуляционных процессов нижней стратосферы, а также климатическими изменениями в этих регионах.

Для Арктики характерна наибольшая межгодовая и внутрисезонная изменчивость суммарного озона. Сильное и устойчивое уменьшение ОСО в этом регионе началось в конце 1980-х гг., продолжалось до 1998 г. и сменилось периодом колебаний озона. Наи-