

Тогда мощность шумоподобного сигнала управления радиостанцией составит

$$P_{\text{шн}} = \frac{P_c}{h^2}, \quad (7)$$

а скорость передачи –

$$N_{\text{шн}} = \frac{N_c}{h^2}. \quad (8)$$

Таким образом, зная параметры информационного сигнала и требования к достоверности передачи информации, всегда можно рассчитать параметры служебного широкополосного сигнала.

Применение адаптивных радиолиний дециметрового диапазона характеризуется неэффективным использованием частотного диапазона из-за перерывов в связи для передачи команд управления взаимодействующими радиостанциями. Предлагаемый алгоритм пере-

дачи служебной информации на основе шумоподобных широкополосных сигналов обладает более высокой информационной эффективностью за счет одновременной передачи в одной полосе частот как информационного, так и служебного сигнала при условии обеспечения требуемой достоверности передачи информационных сообщений.

Библиографические ссылки

1. Игнатов В. В., Килимник Ю. П., Никольский И. Н. Военные системы радиосвязи / Воен. акад. связи. Л., 1989.
2. Зегерс А. Передача в общей полосе информационных сигналов и синхронизирующих последовательностей // Зарубеж. радиоэлектроника. 1970. № 1. С. 4–19.
3. Маковеева М. М., Шинаков Ю. С. Системы связи с подвижными объектами : учеб. пособие для вузов. М. : Радио и связь, 2002.

S. N. Nazarov, A. A. Shagarova, A. I. Pyatakov, A. S. Nazarov

NOISE-LIKE SIGNALS AT REMOTE CONTROL BY RADIO STATION ON LONG-DISTANCE COMMUNICATION CHANNELS

The work analyses issues of shortage of throughput in radio networks of decimeter gamut, including military-oriented networks. The work is devoted to investigation of algorithm of functioning of adaptive systems of radio communication with simultaneous transfer to one channel of information and commands, controlling radio station operating modes. The article also dwells upon technique of estimation for parameters of noise-like signals, used for carrying over commands of control.

Keywords: control command, spectral density of a signal, noise level.

© Назаров С. Н., Шагарова А. А., Пятаков А. И., Назаров А. С., 2011

УДК 519.71; 62.50

В. В. Осипов

О СВЯЗИ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЛАПЛАСУ

Рассматривается обращение преобразований Лапласа методом точечных представлений и связь точечных представлений функций-оригиналов и их изображений на некоторых частных случаях. Полученные модели могут использоваться при моделировании и проектировании динамических систем.

Ключевые слова: метод точечных представлений, точечное моделирование.

Теорема о точечном изображении свертки [1] явно указывает на наличие аналитической связи между преобразованиями Лапласа (L -преобразованиями) сворачиваемых функций и их точечными представлениями, ассоциированными с чебышевской сеткой первого рода.

Рассмотрим свертку функций $g(t)$ и δ -функции $\delta(t)$:

$$g \cdot \delta = \int_0^t g(t-\eta)\delta(\eta)d\eta = \int_0^t \delta(t-\eta)g(\eta)d\eta = g(t). \quad (1)$$

Точечное изображение δ -функций согласно [1] имеет вид

$$\begin{aligned} \delta(t) \xrightarrow{T_I} \delta_{T_I} &= \frac{1}{\lambda_0} (E_N + Z)^{-1} \bar{e}_1 = \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \text{Colon} [1, -1, \dots, (-1)^{N-1}, \dots, (-1)^{N-1}]. \end{aligned}$$

Поэтому получим две формы точечного представления свертки (1):

$$\begin{aligned} g \cdot \delta &= g(t) \xrightarrow{T_I} \bar{g}_{T_I} = \\ &= \begin{cases} \lambda_0 (E_N + Z) \cdot T_N(\bar{g}_{T_I}; Z) \bar{\delta}_{T_I} = \bar{\bar{g}}_{T_I}, \\ \frac{1}{\lambda_0} (E_N + Z)^{-2} \cdot T_N(\bar{W}^{(N)}; Z) \bar{e}_1 = \frac{1}{\lambda_0} (E_N + Z)^{-1} \bar{W}^{(N)}, \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

где $E_N = Z^0$ – единичная матрица размерности $N \times N$. Скалярный множитель $\lambda_0 = \frac{T}{2N}$ имеет смысл половины временного расстояния между узлами N -сетки. Символом Z^k ($k = 0, 1, \dots, (n-1)$) обозначены канонические матрицы сдвига размерности $N \times N$, введенные в [1]. Это теплицевы матрицы с элементными N -векторами в виде единичных векторов

$$\bar{e}_{k+1}^{(N)} = \text{Colon} \left[\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0 \right] \times \overline{(k=0, n-1)}.$$

Две формы (2) точечного представления свертки приближенно равны друг другу. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\bar{g}_{Tl} = \frac{1}{\lambda_0} (E_N + Z)^{-1} \cdot \bar{W}^{(N)} \Leftrightarrow \lambda_0 (E_N + Z) \bar{g}_{Tl} = \bar{W}^{(N)}, \quad (3)$$

устанавливающему аналитическую связь между точечными N -векторами:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{Tl} &= \text{Colon} [g_{1l}, \dots, g_{vl}, \dots, g_{Nl}, \dots], \\ \bar{W}^{(N)} &= \text{Colon} [W_0, 2W_1, \dots, 2W_k, \dots, 2W_{N-1}], \end{aligned} \quad (4)$$

причем координаты вектора $\bar{W}^{(N)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2k!} \frac{d^k}{dz^k} W^*(z) \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^k \frac{(2\lambda_0)^q}{q!} \binom{k-1}{q-1} [F_g^*(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}^{[q]}, \quad k=1, (N-1), \\ W_0 &= F_g^*(\lambda_0) = W^*(0). \end{aligned} \quad (5)$$

Векторно-матричное равенство (3) в развернутой форме дает систему

$$\begin{aligned} \lambda_0 (E_N + Z) \bar{g}_{Tl} &= \\ = \bar{W}^{(N)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda_0 g_{1l} &= W_0, \\ \lambda_0 (g_{1l} + g_{2l}) &= 2W_1, \\ &\dots \\ \lambda_0 (g_{(v-1)l} + g_{vl}) &= 2W_{v-1}, \\ &\dots \\ \lambda_0 (g_{(N-1)l} + g_{Nl}) &= 2W_{N-1}, \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

или рекуррентное равенство

$$\lambda_0 g_{vl} = 2W_{v-1} - \lambda_0 g_{(v-1)l} \quad (v=2, 3, \dots, N) \quad (7)$$

при начальном условии

$$\lambda_0 g_{1l} = W_0 = F_g^*(\lambda_0). \quad (8)$$

Этим устанавливается явная связь между координатами N -векторов (4), т. е. между отсчетами $g(T\tau_v^{(N)}) = g_{vl}$ ($v=1, N$) временной функции $g(t) = g(T\tau) \in M(0, 1)$ в узлах чебышевской N -сетки первого рода и, в конечном счете, между производными инверсного преобразования Лапласа $F_g^*(\lambda)$ этой функции при $\lambda = \lambda_0$.

Рекуррентное соотношение (7) позволяет находить приближенные значения координат точечного изображающего N -вектора g_{Tl} временной функции $g(t) \in M(0, T)$ по ее операторному изображению $F_g(p)$ через предварительный переход к инверсному изобра-

жению $F_g^*(\lambda) = F_g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ с последующим определением ее $(N-1)$ первых производных в точке $\lambda = \lambda_0$, по которым находятся величины (5), а затем по рекуррентным равенствам (7) – и отсчеты $g_{vl} = g(T\tau_v^{(N)})$ ($v=1, N$) функции $g(t) = g(T\tau)$, $\tau \in [0, 1]$.

Таким образом, мы получаем способ (алгоритм) приближенного обращения L -преобразования в форме точечного изображающего N -вектора $\bar{g}_{Tl}$ функции-оригинала $g(t)$ в промежутке $[0, T]$, который в подобной трактовке становится достаточно конструктивным лишь в некоторых частных случаях.

Это связано с тем, что процедура непосредственного определения производных инверсной функции $F_g^*(\lambda)$ в формулах (5) с ростом их порядка становится все более громоздкой и трудновыполнимой даже при сравнительно простых формульных представлениях, хотя в отдельных случаях эта задача может быть эффективно решена путем применения некоторых нестандартных приемов. В частности, величины W_k ($k=1, (N-1)$) могут быть найдены по инверсному изображению $F_g^*(\lambda) = F_g^*(\lambda(z))$, предварительно преобразованному в виде функции комплексного переменного z , поскольку они оказываются просто коэффициентами частичной N -суммы степенного разложения этой функции в центральном единичном круге:

$$\begin{aligned} F_g^*(\lambda) &= F_g^*(\lambda(z)) = \\ &= W^*(z) \cong W_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} W_k Z^k, \quad |z| \leq 1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2k!} \frac{d^k W^*(z)}{dz^k} \Big|_{z=0} \quad (k=1, (N-1)); \\ W_0 &= W^*(0) = F_g^*(\lambda_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Однако для простых инверсных функций $F_g^*(\lambda(z))$ дробно-рационального вида полиномиальные представления могут быть получены без использования общих формул (10), а в результате алгебраических преобразований с последующим использованием уже известных разложений. Такой способ определения величин W_k ($k=1, (N-1)$) оказывается более конструктивным, однако он также ограничен по своим возможностям.

В качестве примера рассмотрим обращение преобразования Лапласа вида простейшей рациональной дроби

$$F_g(p) = \frac{1}{p+a} \rightarrow e^{-at} = g(t) \quad (a > 0), \quad (11)$$

т. е. найдем покоординатное приближение точечного изображающего N -вектора $\bar{g}_{Tl} = \bar{g}_l$ функции $g(t) = e^{-at}$ на отрезке $[0, T]$ по ее L -изображению $F_g(p)$.

Перейдем к инверсному преобразованию

$$F_g\left(\frac{1}{\lambda}\right) = F_g^*(\lambda) = F_g^*(\lambda(z)) = \frac{\lambda(z)}{1+a\lambda(z)}. \quad (12)$$

Принимая $\lambda(z) = \lambda_0 \frac{1+z}{1-z}$, найдем для $F_g^*(\lambda(z))$ как для функции уже комплексной переменной z , определенной в круге $|z| \leq 1$, представление в виде разложения по степеням z . При этом возможно использование уже известного разложения и без применения общего метода. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(z)}{1+a\lambda(z)} &= \frac{\lambda_0(1+z)}{(1-z)+a\lambda_0(1+z)} = \\ &= \frac{\lambda_0}{1+a\lambda_0} \cdot \frac{1+z}{\left(1-\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}z\right)} = W^*(z). \end{aligned} \quad (13)$$

При положительных значениях вещественного параметра a окажется, что $\left|\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}\right| < 1$ и $\left|\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}z\right| < 1$ в центральном единичном круге $|z| \leq 1$, поэтому дробно-рациональная функция в (13) будет в этом круге аналитической и представимой рядом Тейлора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}z} &= 1 + \\ &+ \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}\right)^v z^v = \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}\right)^v z^v, \quad |z| \leq 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, для $W^*(z)$ получим

$$\begin{aligned} F_g^*(\lambda(z)) = W^*(z) &= \frac{\lambda_0}{1+a\lambda_0} \cdot \frac{(1+z)}{\left(1-\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}z\right)} = \\ &= \frac{\lambda_0}{1+a\lambda_0} (1+z) \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}\right)^v z^v = \\ &= \frac{\lambda_0}{1+a\lambda_0} \left[1 + \frac{2}{1+a\lambda_0} \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}\right)^{v-1} \cdot z^v \right] = \\ &= W_0 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} W_v \cdot z^v, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{\lambda_0}{1+a\lambda_0}, \\ W_v &= \frac{\lambda_0(1-a\lambda_0)^{v-1}}{(1+a\lambda_0)^{v+1}} \quad (v=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (16)$$

По этим величинам с использованием рекуррентного равенства (7) могут быть последовательно найдены и g_{vl} ($v=1, 2, \dots, N$) – приближенные координаты точечного изображающего N -вектора функции $g(t) = e^{-at}$ на отрезке $[0, T]$, ассоциированного с чебышевской N -сет-

кой $t_v^{(N)} = T\tau_v^{(N)} = T \cdot \frac{2v-1}{2N}$ ($v=\overline{1, N}$). Общая рекуррентная формула для определения искомых координат точечного изображающего N -вектора $\bar{g}_{TI}$ функции $g(T\tau) = e^{-aT\tau}$ имеет вид

$$\begin{aligned} g_{vl} &= \frac{2(1-a\lambda_0)^{v-2}}{(1+a\lambda_0)^v} - \frac{(1-a\lambda_0)^{v-2}}{(1+a\lambda_0)^{v-1}} = \\ &= \frac{(1-a\lambda_0)^{v-1}}{(1+a\lambda_0)^v} = \frac{1}{1+a\lambda_0} \cdot \left(\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}\right)^{v-1} \quad (v=\overline{1, N}). \end{aligned} \quad (17)$$

Точные значения этих координат, т. е. отсчеты экспоненты $e^{-at} = e^{-aT\tau}$ в узлах чебышевской N -сетки первого

рода $\tau_v^{(N)} = \frac{2v-1}{2N}$, ($v=\overline{1, N}$), будут следующими:

$$\begin{aligned} e^{-aT\tau_v^{(N)}} &= e^{-\frac{aT}{2N}(2v-1)} = e^{-a\lambda_0(2v-1)} = \\ &= \exp(-a\lambda \cdot (2v-1)) \quad (v=\overline{1, N}). \end{aligned} \quad (18)$$

Производя численные расчеты, можно увидеть хорошее совпадение значений координат, вычисленных по формуле (17), с их точными значениями и только по последней координате расхождение оказывается более значительным. Однако погрешность по этой координате ввиду ее малости заметной роли не играет. Если же увеличить размерность N , не меняя других параметров, то погрешность по всем координатам не будет превышать 1 %.

Рассмотренный выше пример по обращению простейшего преобразования Лапласа дробно-рационального вида (11) в форме точечного изображающего N -вектора $\bar{g}_{TI}$ функции-оригинала $g(t) = e^{-at}$ этого преобразования имеет самостоятельное и особое значение, так как на его основе могут быть получены точечные изображения других часто используемых элементарных функций, содержащих экспоненты, по их лапласовым изображениям.

Это объясняется тем, что и точечное изображение $\bar{g}_{TI}$ экспоненты e^{-at} , и ее лапласово изображение (11), по которому в результате отображений определяется точечный изображающий вектор $\bar{g}_{TI}$, оказываются явными однозначно связанными и непрерывными функциями параметра a . Иными словами, различным операциям над L -изображением $F_g(p) = F_g(p; a)$ (и функцией-оригиналом $g(t) = g(t; a) = e^{-at}$) как функциям параметра a будут соответствовать такие же операции над их точечным N -векторным отображением $\bar{g}_{TI}(a)$ как функцией того же параметра a . Возникающим при этом новым лапласовым изображениям новых функций-оригиналов будут соответствовать их точечные изображения, возникающие при таких же операциях над прежним точечным изображением $\bar{g}_{TI}(a)$ как функцией параметра a .

То же самое происходит не только при простом изменении вещественных значений параметра a , но и при придании ему комплексных значений, т. е. при замене $a \rightarrow a + ib$. В этом случае точечные представления более сложных элементарных функций также будут получены по операторным изображениям.

Описанные выше отображения сохраняются и при операции дифференцирования по параметру a . В этом случае для отображений

$$\begin{aligned} g(t; a) &\rightarrow e^{-at} = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p+a} = F_g(p; a) \xrightarrow{p=\frac{1}{\lambda}} F_g^*(\lambda(z); a) = \\ &= \frac{\lambda(z)}{1+a\lambda(z)} = W^*(z; a) = \\ &= W_0(a) + 2 \sum_{v=1}^{\infty} W_v(a) z^v \xrightarrow{T_I} \bar{g}_{TI}(a) = \\ &= \text{Colon}[g_{1I}(a), \dots, g_{vI}(a), \dots, g_{NI}(a)], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} g_{1I}(a) &= \frac{1}{1+a\lambda_0}; \\ g_{vI}(a) &= \frac{1}{1+a\lambda_0} \cdot \left(\frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0}\right)^{v-1} \quad (v=\overline{1, N}), \end{aligned} \quad (20)$$

имеем

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial a}(e^{-at}) &= te^{-at} = -\frac{\partial}{\partial a} F_g(p; a) = \\
 &= \frac{1}{(p+a)^2} \xrightarrow{p=\frac{1}{\lambda}} \frac{\lambda(z)^2}{(1+a\lambda(z))^2} = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial a} F_g^*(\lambda(z); a) = -\frac{\partial}{\partial a} W^*(z; a) = \\
 &= -\frac{\partial W_0(a)}{\partial a} - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\partial W_v(a)}{\partial a} z^v \rightarrow \\
 &\xrightarrow{T_I} -\frac{\partial}{\partial a} \bar{g}_{II}(a) = \bar{g}'_{II}(a) = \\
 &= \text{Colon}[g'_{I1}(a), \dots, g'_{v1}(a), \dots, g'_{NI}(a)]. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя (20) по параметру a , получим явные представления для координат $g'_{v1}(a)$ ($v = \overline{1, N}$) точно-го изображающего N -вектора $\bar{g}'_{II}(a)$ возникшей функции-оригинала $g'(t; a) = te^{-at}$:

$$\begin{aligned}
 g'_{v1} &= -\frac{\partial g_{v1}(a)}{\partial a} = \\
 &= \frac{\lambda_0(1-a\lambda_0)^{v-2}[(2v-1)-a\lambda_0]}{(1+a\lambda_0)^{v+1}} (v = \overline{1, N}). \quad (22)
 \end{aligned}$$

Это будут приближенные значения отсчетов функции $g'(t; a)$, т. е. значений $T\tau_v^{(N)} \cdot \exp(-aT\tau_v^{(N)})$ в узлах чебышевской N -сетки первого рода, но определенные по ее лапласовому изображению $\frac{1}{(p+a)^2} = -\frac{\partial}{\partial a} F_g(p; a)$.

Отметим, что повторно дифференцируя по параметру a цепочку отображений (21), можно получить точечное векторное представление $\bar{g}''_{II}(a)$ и для функции $t^2 e^{-at}$ по ее лапласовому изображению.

Рассмотрим теперь более общий случай комплексного значения параметра a в отображении (11), а также в равенствах (15) и (17). Заменим параметр a во всех этих соотношениях на комплексную величину $(a + ib)$ ($a \geq 0$).

Для изображения по Лапласу будем иметь

$$\begin{aligned}
 e^{-(a+ib)t} &= e^{-at} \cos bt - ie^{-at} \sin bt = \\
 &= g_c(t) - ig_s(t) \rightarrow \frac{1}{p = (a+ib)} = \\
 &= \frac{1}{(p+a)+ib} = \frac{(p+a)}{(p+a)^2+b^2} - i \frac{b}{(p+a)^2+b^2}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

откуда для инверсных изображений окажется, что

$$\begin{aligned}
 e^{-at} \cos bt &= g_c(t) \rightarrow \frac{(p+a)}{(p+a)^2+b^2} = F_c(p) = \\
 &= F_c\left(\frac{1}{\lambda(z)}\right) = F_c^*(\lambda(z)) = \\
 &= \frac{\lambda(z)(1+a\lambda(z))}{(1+a\lambda(z))^2+b^2\lambda^2(z)} = \\
 &= \frac{\lambda(z)}{(1+a\lambda(z))^2+b^2\lambda^2(z)} + \frac{a\lambda^2(z)}{(1+a\lambda(z))^2+b^2\lambda^2(z)}, \quad (24) \\
 e^{-at} \sin bt &= g_s(t) \rightarrow \frac{b}{(p+a)^2+b^2} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= F_s(p) = F_s\left(\frac{1}{\lambda(z)}\right) = F_s^*(\lambda(z)) = \\
 &= \frac{b \cdot \lambda^2(z)}{(1+a\lambda(z))^2+b^2\lambda^2(z)}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем два инверсных лапласовых изображения:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\lambda(z)}{(1+a\lambda(z))^2+b^2\lambda^2(z)}, \\
 &\frac{\lambda^2(z)}{(1+a\lambda(z))^2+b^2\lambda^2(z)}, \quad (26)
 \end{aligned}$$

по которым может быть решена задача об обращении L -преобразований в (24) в форме точечных векторов изображений:

$$\left. \begin{aligned}
 g_c(t) &\rightarrow F_c(p) = F_c^*(\lambda(z)) \xrightarrow{T_I} \bar{g}_{cT} = \\
 &= \text{Colon}[g_{c1}, \dots, g_{cv}, \dots, g_{cN}], \\
 g_s(t) &\rightarrow F_s(p) = F_s^*(\lambda(z)) \xrightarrow{T_I} \bar{g}_{sT} = \\
 &= \text{Colon}[g_{s1}, \dots, g_{sv}, \dots, g_{sN}].
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Следует отметить, что инверсное преобразование Лапласа в (24) есть линейная комбинация функций (26). Найдем их представления как функций комплексной переменной z , принимающей значения из единичного круга $|z| \leq 1$. Подставляя в (26)

$$\lambda = \lambda(z) = \lambda_0 \frac{1+z}{1-z}, \quad |z| \leq 1, \quad (28)$$

после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{\lambda(z)}{(1+a\lambda(z))^2+b^2\lambda^2(z)} = \\
 &= \lambda_0(1+z) \cdot \frac{(1+z)}{(1+a\lambda_0)^2+(b\lambda_0)^2} \cdot W_0^*(z), \\
 &\frac{a\lambda^2(z)}{(1+a\lambda(z))^2+b^2\lambda^2(z)} = \\
 &= \lambda_0(1+z) \cdot \frac{a\lambda_0(1+z)}{(1+a\lambda_0)^2+(b\lambda_0)^2} \cdot W_0^*(z),
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$W_0^*(z) = \frac{1}{1-2\gamma \cdot (e^{-\beta} z) + (e^{-\beta} z)^2}, \quad (30)$$

а введенные параметры определяются по формулам

$$\gamma = \frac{1-(a^2+b^2)\lambda_0^2}{\sqrt{(1-(a^2+b^2)\lambda_0^2)^2+4(b\lambda_0)^2}}, \quad |\gamma| \leq 1, \quad (31)$$

$$0 < e^{-\beta} = \frac{\sqrt{(1-a\lambda_0)^2+(b\lambda_0)^2}}{\sqrt{(1+a\lambda_0)^2+(b\lambda_0)^2}} \leq 1 \quad (a \geq 0). \quad (32)$$

Таким образом, для инверсных функций $F_c^*(\lambda(z))$ и $F_s^*(\lambda(z))$ из представлений (24) получим:

$$\left. \begin{aligned}
 F_c^*(\lambda(z)) &= \lambda_0(1+z) \frac{[(1-z)+a\lambda_0(1+z)]}{(1+a\lambda_0)^2+(b\lambda_0)^2} \cdot W_0^*(z) = \\
 &= \lambda_0(1+z) \frac{(1+a\lambda_0)}{(1+a\lambda_0)^2+(b\lambda_0)^2} \times \\
 &\times \left(1 - \frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0} z\right) W_0^*(z) = \lambda_0(1+z) \cdot W_c^*(z), \\
 F_s^*(\lambda(z)) &= \lambda_0(1+z) \frac{b\lambda_0(1+z)}{(1+a\lambda_0)^2+(b\lambda_0)^2} \cdot W_0^*(z) = \\
 &= \lambda_0(1+z) \frac{b\lambda_0}{(1+a\lambda_0)^2+(b\lambda_0)^2} \times \\
 &\times (1+z) W_0^*(z) = \lambda_0(1+z) \cdot W_s^*(z),
 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

А учитывая нильпотентность переменной z с показателем $N(z^k \equiv 0 \forall k \geq N)$, запишем:

$$\left. \begin{aligned} F_c^*(\lambda(z)) &= W_{c0} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} W_{ck} z^k = \lambda_0(1+z) \times \\ &\times W_c^*(z) = \lambda_0(1+z) \sum_{v=0}^N g_{c(v+1)} \cdot z^v, \\ F_s^*(\lambda(z)) &= W_{s0} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} W_{sk} z^k = \lambda_0(1+z) \times \\ &\times W_s^*(z) = \lambda_0(1+z) \sum_{v=0}^N g_{s(v+1)} \cdot z^v. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной z в полиномах, расположенных по разным сторонам этих равенств, получим линейные системы, которые в векторно-матричных формах запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{Colon}[W_{c0}, 2W_{c1}, \dots, 2W_{cN}] &= \\ &= \bar{W}_c = \lambda_0(E_N + Z) \bar{g}_{cT}, \\ \text{Colon}[W_{s0}, 2W_{s1}, \dots, 2W_{sN}] &= \\ &= \bar{W}_s = \lambda_0(E_N + Z) \bar{g}_{sT}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где N -векторы $\bar{g}_{cT}$ и $\bar{g}_{sT}$ – искомые точечные изображающие векторы функций-оригиналов в (27).

Используя представление фундаментальной связи (3), найдем явные (полиномиальные) представления для дробно-рациональных функций $W_c^*(z)$ и $W_s^*(z)$ в (34), т. е. коэффициенты $g_{c(v+1)} (v=0, (N-1))$ и $g_{s(v+1)} (v=0, (N-1))$ этих полиномов, которые, как координаты точечных векторов в (27), будут решениями поставленной задачи по обращению операторных преобразований в (23).

Из (34) следует, что

$$\left. \begin{aligned} W_c^*(z) &= \frac{(1+a\lambda_0)}{(1+a\lambda_0)^2 + (b\lambda_0)^2} \left(1 - \frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0} z \right) \times \\ &\times W_0^*(z) = \sum_{v=0}^{N-1} g_{c(v+1)} \cdot z^v, \\ W_s^*(z) &= \frac{b\lambda_0(1+z)}{(1+a\lambda_0)^2 + (b\lambda_0)^2} \times \\ &\times W_0^*(z) = \sum_{v=0}^{N-1} g_{s(v+1)} \cdot z^v, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где дробно-рациональная функция $W_0^*(z)$ комплексного переменного $e^{-\beta}z$, принимающего значения из единичного круга $|e^{-\beta}z| = e^{-\beta}|z| \leq 1$, есть производящая функция для полиномов Чебышева второго рода $\{U_v(\gamma)\}$ аргумента $\gamma \in [-1, 1]$ [2], имеющая степенное разложение:

$$\begin{aligned} W_0^*(z) &= \frac{1}{1-2\gamma \cdot (e^{-\beta}z) + (e^{-\beta}z)^2} = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} U_v(\gamma) \cdot (e^{-\beta}z)^v. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя (37) в (36), после преобразований найдем:

$$\left. \begin{aligned} W_c^*(z) &= \frac{(1+a\lambda_0)}{(1+a\lambda_0)^2 + (b\lambda_0)^2} \times \\ &\times \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} \left(U_v(\gamma)e^{-\beta} - \frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0} \cdot U_{v-1}(\gamma) \right) e^{-(v-1)\beta} \cdot z^v \right], \\ W_s^*(z) &= \frac{b\lambda_0}{(1+a\lambda_0)^2 + (b\lambda_0)^2} \times \\ &\times \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} (U_v(\gamma)e^{-\beta} + U_{v-1}(\gamma)) e^{-(v-1)\beta} \cdot z^v \right], \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} g_{c1} &= \frac{(1+a\lambda_0)}{(1+a\lambda_0)^2 + (b\lambda_0)^2}, \\ g_{c(v+1)} &= g_{c1} \left(U_v(\gamma)e^{-\beta} - \frac{1-a\lambda_0}{1+a\lambda_0} U_{v-1}(\gamma) \right) \times \\ &\times e^{-(v-1)\beta} \quad (v=1, N-1), \\ g_{s1} &= \frac{b\lambda_0}{(1+a\lambda_0)^2 + (b\lambda_0)^2}, \\ g_{s(v+1)} &= g_{s1} (U_v(\gamma)e^{-\beta} + U_{v-1}(\gamma)) \times \\ &\times e^{-(v-1)\beta} \quad (v=1, N-1). \end{aligned} \quad (39)$$

Это координаты N -векторов $\bar{g}_{cT}$ и $\bar{g}_{sT}$ из (27), которые решают поставленную задачу о приближенном обращении преобразований Лапласа в (23), поскольку они являются точечными векторными изображениями их функций-оригиналов $g_c(t)$ и $g_s(t)$, $t \in [0, T]$.

При чисто мнимом значении комплексного параметра, т. е. при $a=0$, возникает задача точечного обращения простейших преобразований Лапласа, временные оригиналы которых являются тригонометрическими функциями $\cos bt$ и $\sin bt$. Их графики имеют вид незатухающих колебаний. Решение этой колебательной задачи может быть получено из общего решения как его частный случай при $a=0$. При этом расчетные формулы существенно упрощаются.

Вернемся к уже рассмотренному случаю комплексного значения параметра a . Введем функцию e^{-pt} , $t \in [0, T]$, предполагая переменным комплексный параметр p , а преобразование Лапласа $F_g(p)$ функции $g(t)$ $M \in [0, T]$:

$$F_g(p) = \int_0^T e^{-pt} g(t) dt = T \int_0^1 e^{-pT\tau} g(T\tau) d\tau, \quad (41)$$

существующим при любых положительных T .

Квадратурное значение этого интеграла, ассоциированное с чебышевской N -сеткой первого рода:

$$\begin{aligned} \tau_v^{(N)} &= \frac{2v-1}{2N} \quad (v=1, N) - \text{имеет представление} \\ F_g(p) &\approx \frac{T}{N} \sum_{v=1}^N e^{-pT\tau_v^{(N)}} g(T\tau_v^{(N)}) = \\ &= 2\lambda_0 \sum_{v=1}^N e^{-\lambda_0 p(2v-1)} \cdot g(\lambda_0(2v-1)). \end{aligned} \quad (42)$$

Как было получено ранее, точечное значение $e^{-pT\tau_v^{(N)}}$ экспоненциальной функции $e^{-pT\tau}$ при любом параметре p и в v -м узле чебышевской N -сетки первого рода имеет вид

$$e^{-pT\tau_v^{(N)}} = e^{-\lambda_0 p(2v-1)} \approx \frac{1}{1+\lambda_0 p} \left(\frac{1-\lambda_0 p}{1+\lambda_0 p} \right)^{v-1} \quad (v = \overline{1, N}). \quad (43)$$

Тогда

$$F_g(p) \approx \frac{2\lambda_0}{1+\lambda_0 p} \cdot \sum_{v=1}^N \left(\frac{1-\lambda_0 p}{1+\lambda_0 p} \right)^{v-1} \cdot g_{vI}, \quad (44)$$

где $g_{vI} = g(T\tau_v^{(N)}) = g(\lambda_0(2v-1))$ ($v = \overline{1, N}$).

Положим

$$\frac{1-\lambda_0 p}{1+\lambda_0 p} = z \Rightarrow \lambda_0 p = \frac{1-z}{1+z}, \quad p = \frac{(1-z)}{\lambda_0(1+z)}. \quad (45)$$

Это преобразование связывает комплексную переменную p с комплексной переменной z , принимающей значения из единичного круга $|z| < 1$. Заменяя в (44) переменную p , согласно (45) получим

$$F_g(p) = F_g \left(\frac{(1-z)}{\lambda_0(1+z)} \right) = F_g^* \left(\frac{\lambda_0(1+z)}{(1-z)} \right) = W^*(z) = \lambda_0(1+z) \sum_{v=1}^N g_{vI} z^{v-1}. \quad (46)$$

Как установлено в [1], функция $W^*(z)$ оказывается аналитической в центральном единичном круге $|z| < 1$ и, следовательно, представлена в нем степенным рядом

$$W^*(z) = W_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} W_k z^k$$

с вещественными коэффициентами (5). Если комплексную переменную z снабдить свойством нильпотентности с показателем N ($z^m \equiv 0; \forall m \geq N$), то инверсное преобразование Лапласа $F_g^* \left(\frac{\lambda_0(1+z)}{(1-z)} \right) = W^*(z)$ как функция переменной z окажется полиномом степени $(N-1)$:

$$W^*(z) = W_0 + 2 \sum_{v=1}^{N-1} W_v z^v, \quad (47)$$

а следовательно, равенство в (46) приобретет вид

$$W^*(z) = W_0 + 2 \sum_{v=1}^{N-1} W_v z^v =$$

$$= \lambda_0(1+z) \sum_{v=1}^N g_{vI} z^{v-1} = \lambda_0 g_{1I} + \lambda_0 \sum_{v=1}^{N-1} (g_{vI} + g_{(v+1)I}) z^v,$$

откуда

$$\begin{cases} W_0 = \lambda_0 g_{1I}, \\ 2W_v = \lambda_0 (g_{vI} + g_{(v+1)I}) \quad (v = \overline{1, (N-1)}), \end{cases}$$

или в форме рекуррентного равенства

$$\lambda_0 g_{vI} = 2W_{v-1} - \lambda_0 g_{(v-1)I} \quad (v = \overline{2, N})$$

при начальном условии

$$\lambda_0 g_{1I} = W_0 = F_g^*(\lambda_0) = F_g \left(\frac{1}{\lambda_0} \right).$$

Множество всевозможных полиномов вида (47) комплексной переменной z , принимающей значения из единичного круга $|z| \leq 1$ и обладающей свойством нильпотентности с показателем N , как было указано в [1], образует нормированную алгебру по умножению, которая при взаимно однозначном отображении $z \rightarrow Z(N \times N)[z^v \rightarrow Z^v (0 \leq v \leq (N-1))]$ становится изометрически изоморфной алгебре по умножению соответствующих теплицевых матриц:

$$T_N(\bar{W}^{(N)}; Z) = W_0 E_N + 2 \sum_{v=1}^{N-1} W_v Z^v,$$

а полиномы $W^*(z)$ из (47) оказываются порождающими полиномами этих матриц.

Таким образом, мы имеем матричное равенство

$$W^*(z) \xrightarrow{z \rightarrow Z} W^*(Z) = T_N(\bar{W}^{(N)}; Z) = \lambda_0(E_N + Z)T_N(\bar{g}_{TI}; Z)$$

и, следовательно, равенство элементных N -векторов

$$\bar{W}^{(N)} = \lambda_0(E_N + Z)\bar{g}_{TI}$$

где

$$\begin{cases} \bar{W}^{(N)} = \text{Colon}[W_0, 2W_1, \dots, 2W_v, \dots, 2W_{N-1}], \\ \bar{g}_{TI} = \text{Colon}[g_{1I}, \dots, g_{vI}, \dots, g_{NI}]. \end{cases}$$

Таким образом, прежний результат получен иным путем, что по существу подтверждает рассматриваемую в данной статье теорию.

В заключение отметим, что подобными способами могут быть решены задачи о точечном обращении других L -преобразований вида простых рациональных дробей. Однако стоит обратить внимание на общий случай, когда преобразование Лапласа $F_g(p)$ функции-оригинала $g(t)$ имеет вид произвольной правильной рациональной дроби. Тогда процедура обращения L -изображений в форме точечных представлений (точечных моделей) обнаруживает ряд особенностей, которые выделяют задачи такого рода в особый класс. В частности, возникает непосредственная связь задач точечного обращения таких L -преобразований и соответствующих задач Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и эквивалентных интегральных уравнений второго рода с разностными ядрами (уравнений Вольтерра). Так же может быть получен метод построения точечных моделей линейных динамических систем.

Библиографические ссылки

- Осипов В. М., Осипов В. В. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений. М. : МАКС-Пресс, 2005.
- Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М. : Наука, 1974.

V. V. Osipov

ABOUT CONNECTION OF POINT REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS AND THEIR LAPLACE TRANSFORMS

We consider the Laplace transform inversion method by point representations and connection of point representations of the functions – the originals and their images in some special cases. The constructed models can be used for modeling and design of dynamic systems.

Keywords: method of point representations, point modeling.

© Осипов В. В., 2011

УДК 629.78.051:681.3

В. В. Прудков

ПРОЦЕДУРЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ВЕРИФИКАЦИИ ПОДСИСТЕМ БЛОКА УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Описаны процедуры автоматизации программного обеспечения для верификации логики функционирования подсистем блока управления перспективных космических аппаратов. Представлены результаты, достигнутые после внедрения этих процедур.

Ключевые слова: блок управления, центральный процессорный модуль, интерфейсный модуль сопряжения, автономная отработка, автоматизация.

Современные тенденции в области космических услуг и технологий требуют от производителей космических аппаратов (КА) и бортовой аппаратуры сокращения сроков и затрат на разработку, квалификацию, изготовление и испытания бортовой аппаратуры и космических аппаратов, а также повышения надежности и качества изготавливаемых изделий при постоянной минимизации их энергомассовых характеристик. При этом необходимо стремиться к достижению существенной экономии ресурсов: людских, финансовых и материальных – при одновременном сокращении сроков разработки космического аппарата.

Современная радиоэлектронная аппаратура (РЭА) на базе программируемых логических интегральных схем (ПЛИС), микроконтроллеров, встроенных вычислительных модулей и т. д., требует специальных средств отладки. Создание РЭА осуществляется при постоянном взаимодействии разработчиков программного обеспечения (ПО) и схем, а гибко организованное оборудование, дающее возможность в любой момент времени быстро перекомпоновать испытательную аппаратуру, позволяет проводить работы по отладке РЭА оптимальным образом.

В настоящее время в ОАО «Информационные спутниковые системы» имени академика М. Ф. Решетнева» интенсивность проведения отработочных испытаний РЭА космических аппаратов при наземно-экспериментальной отработке и комплектации штатных изделий исключительно высока. Необходимость увеличивать эффективность отработки РЭА и сокращать ее сроки влечет за собой со-

здание унифицированных и автоматизированных рабочих мест наземно-экспериментальной отработки РЭА, к которой и относятся блоки управления (БУ).

Разрабатываемые на предприятии блоки управления, входящие в состав бортового комплекса управления (БКУ) современных и перспективных космических аппаратов, проектируются по модульному принципу. В состав блока управления входят центральный процессорный модуль (ЦПМ) и интерфейсные модули сопряжения (ИМС), или подсистемы. ЦПМ позволяет реализовать программными средствами все логические функции конкретной аппаратуры. ИМС осуществляют управление системами КА. Информационно-логическая связь ЦПМ и ИМС организуется по последовательному периферийному интерфейсу (ППИ). БУ управляется бортовым вычислительным комплексом (БВК) по мультиплексному каналу обмена (МКО) (ГОСТ Р 52070–2003). ЦПМ по МКО принимает команды управления от БВК, декодирует их и выдает слова данных (СД), содержащие команды управления (КУ), в соответствующие подсистемы БУ (ИМС). Также БВК считывает слова данных от ЦПМ, которые содержат телеметрическую информацию.

Процесс испытаний РЭА на базе программируемых логических интегральных схем характеризуется определенными особенностями, связанными с разработкой программного продукта: главное внимание сосредоточивается на системотехнических решениях; упрощается схема и конструкция прибора, но при этом усложняется его архитектура; для разработчиков (схемотехников, конструк-