УДК 336.717.061

А. А. Ступина, А. Я. Югай, М. В. Карасева

АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ НАБОРА КРЕДИТНЫХ ЗАЯВОК*

Рассмотрена задача нахождения оптимального набора кредитных заявок при управлении формированием кредитного портфеля банка. В качестве алгоритмов решения задачи предложены алгоритм полного перебора и алгоритм муравьиных колоний.

Ключевые слова: кредитный портфель, кредитная заявка, ликвидность, полный перебор, алгоритм муравьиных колоний, стигмержи.

Объектом исследования является процесс формирования кредитного портфеля банка, важнейшей составляющей которого является набор кредитных заявок. Проблема заключается в оптимизации процесса управления формированием кредитного портфеля банка по критериям ликвидности временной структуры активов/пассивов банка, риска невозврата и доходности кредитных операций.

Выбор оптимального решения при рассмотрении вопроса о кредитовании ссудозаемщиков при наличии жестких ограничений по суммам имеющихся в наличии свободных денежных средств, их стоимости, процентным ставкам на выдаваемые кредиты, срокам привлечения кредитных ресурсов, максимальному размеру кредита одному заемщику и т. п. – постоянная процедура, которую выполняют специалисты банка [1]. От правильности этих решений зависит финансовая стабильность банка, так же как и защита интересов его инвесторов. Определить возможные последствия для финансового состояния банка всех возможных вариантов инвестирования средств в тот или иной кредитный проект без использования программного обеспечения практически невозможно. Для упрощения процедуры принятия решения необходим поддерживающий алгоритм, способный из имеющегося набора кредитных заявок выбрать заявки, удовлетворяющие названным выше критериям.

Поиск оптимального набора кредитных заявок портфеля банка производится по критериям доходности кредитных операций и величине риска невозврата, третьим критерием в этом случае является соблюдение ликвидности временной структуры активов/пассивов банка. Самым первым временным интервалом, в котором необходимо добиться требуемого уровня ликвидности, будет временной интервал от одного дня до одного месяца, затем временной интервал от одного месяца до трех месяцев и т. д.

Рассмотрим процесс нахождения оптимального набора кредитных заявок для одного временного интервала и формализируем критерии получения максимальной доходности от проводимых банком кредитных операций при соблюдении требования минимизации риска невозврата.

Введем обозначения:

– F_i – сумма свободных пассивов, которыми располагает банк из i-го временного интервала;

– k_{ij} – сумма кредита, запрашиваемая j-м заемщиком с погашением долга в i-м временном интервале, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$;

– t_{ij} – период размещения средств в k_{ij}-й кредит;

– x_{ij} – булева переменная, принимающая значение 1, если кредит k_{ij} выдается, и 0, если заявка на получение кредита отклоняется банком;

– d_{ij} – проценты за пользование k_{ij}-м кредитом (предполагается, что эти проценты выплачиваются единовременно с возвратом самого кредита);

– P_{ij} – вероятность невозврата заемщиком обязательств по возврату кредита и процентов по нему.

В предлагаемой постановке задачи, в целях ее упрощения, предполагается два варианта обслуживания долга заемщиком: либо 100%-й возврат суммы кредита и процентов по нему в установленный срок, либо полное отсутствие платежей в погашение кредита и процентов по нему.

В данной статье выдача кредитов рассматривается не только как доходный инструмент банка, но и как инструмент, позволяющий повысить ликвидность временной структуры активов/пассивов банка. С этой целью полагаем, что пассивы Π_i из временного интервала i в случае их недоиспользования не могут быть инвестированы в кредиты из других временных интервалов. Поэтому недоиспользованная сумма пассивов из i-го временного интервала, равная $F_i - \sum_{j \in J} k_{ij} x_{ij}$, принимает участие в формировании кредитного портфеля с $d_{ij} = 0$ и $P_{ij} = 0$.

Тогда ожидаемые поступления (основной долг, проценты, недоиспользованные ресурсы) $E(x_{ij})$ от комбинации кредитных заявок будут определяться по формуле

$$E(x_{ij}) = \sum_{j \in J} (k_{ij} + k_{ij} d_{ij} t_{ij}) x_{ij} (1 - P_{ij}) + F_i - \sum_{j \in J} k_{ij} x_{ij} = \\ = \sum_{j \in J} k_{ij} x_{ij} (d_{ij} t_{ij} - P_{ij} - d_{ij} P_{ij} t_{ij}) + F_i.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.».

Для обеспечения ликвидности и прибыльности по окончанию i-го периода кредитования необходимо, чтобы выполнялось следующее ограничение:

$$d_{ij}t_{ij} - P_{ij} - d_{ij}P_{ij}t_{ij} > 0, \quad (1)$$

которое можно представить в виде

$$\frac{d_{ij}t_{ij}}{1 + d_{ij}t_{ij}} > P_{ij}.$$

Выразим (1) через $w_{ij} = d_{ij}t_{ij} - P_i - d_{ij}P_{ij}t_{ij}$. Тогда w_{ij} будет определять весовой коэффициент, характеризующий доходность и рискованность рассматриваемого проекта. Если $w_{ij} < 0$, то кредит ожидается убыточным и нет смысла его выдавать. В результате задача максимизации дохода и минимизации кредитного риска при соблюдении ликвидности баланса банка приобретет вид

$$F_i + \sum_{j \in J} w_{ij}k_{ij}x_{ij} \to \max,$$

или после отбрасывания константы F_i:

$$\sum_{j \in J} w_{ij}k_{ij}x_{ij} \to \max,$$

при одном из ограничений в зависимости от согласованности структуры активов/пассивов банка и способа ее построения. Тогда для всех временных интервалов

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} \frac{w_{ij}k_{ij}}{t_{ij}} x_{ij} \to \max_{x_{ij}} \quad (2)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{J_i} k_{ij}x_{ij} \le F_i, i = \overline{1, I}. \quad (3)$$

Таким образом, задача нахождения набора кредитных заявок, оптимального по трем критериям: доходности, риска невозврата и ликвидности – приводится к задаче целочисленного линейного программирования, т. е. к задаче о рюкзаке.

Для решения этой задачи может использоваться *метод полного перебора*.

В задачах псевдобулевой оптимизации допустимое множество решений конечно, поэтому существует универсальный способ отыскания оптимального решения посредством полного перебора всех допустимых решений. С помощью полного перебора мы всегда можем (по крайней мере теоретически) найти оптимальное решение. В этом смысле простой перебор можно считать универсальным методом решения дискретных экстремальных задач.

Алгоритм метода полного перебора работает следующим образом.

Производим расчет необходимого числа итераций $R = 2^{\sum_{i=1}^{I} K_i}$, где k_i – сумма кредита с погашением долга в i-м временном интервале, $i = \overline{1, I}$.

1. Определим $r = \overline{1, R}$, где r – номер итерации.

2. Двоичное выражение числа r формирует вектор X_r.

3. Если система ограничений (3) нарушается, то переход к п. 2, иначе – к п. 5.

4. Вычислим значения функции (2) f_r и сравним его с f_{r-1}. Если $f_r < f_{r-1}$, то $f_r = f_{r-1}$ и переход к п. 2, иначе $f_r = f_r$ и переход к п. 2.

5. После R итераций f_R принимаем за лучшее решение.

Однако такой алгоритм поиска применим только в тех исключительных случаях, когда мощность множества допустимых решений сравнительно невелика. Во многих же интересных с практической точки зрения задачах мощность множества допустимых решений, как правило, быстро (например, экспоненциально) растет с увеличением размерности, т. е. объема исходных данных, задачи. Это приводит к тому, что в задачах реальной размерности количество допустимых решений становится величиной астрономического порядка, что делает перебор практически невозможным.

В качестве альтернативы методу полного перебора могут использоваться *алгоритмы муравьиных колоний*. Алгоритмы муравьиных колоний – новые перспективные методы оптимизации, базирующиеся на моделировании поведения колонии муравьев. Колония муравьев может рассматриваться как многоагентная система, в которой каждый агент (муравей) функционирует по очень простым правилам. В противовес почти примитивному поведению агентов поведение всей системы получается на удивление разумным [2].

С помощью алгоритма муравьиных колоний были решены такие задачи комбинаторной оптимизации, как задача коммивояжера, квадратическая задача о назначениях, задача маршрутизации грузовиков, задача календарного планирования, задача раскраски графа, а также задача о рюкзаке [3].

Сформулируем многомерную задачу о рюкзаке:

$$f(X) = \sum_{t=1}^{n} c_t x_t \to \max, \ \sum_{t=1}^{n} a_{st}x_t \le b_s, \quad (4)$$

$$x_t \in \{0,1\}, \ t = 1, 2, \ldots, n, \ s = 1, 2, \ldots, m.$$

При этом предполагается, что $c_t > 0$, $0 \le a_{st} \le b_s$, $t = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, m}$.

Приведем экономическую интерпретацию многомерной задачи о рюкзаке. Пусть имеется n кредитных заявок и для их реализации задан вектор ресурсов $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $b_s > 0$. Обозначим через $a_{st} > 0$ количество единиц ресурса типа s, необходимое для удовлетворения кредитной заявки с номером t, при этом хотя бы для одного ресурса s должно быть выполнено условие $\sum_{t=1}^{n} a_{st} > b_s$, т. е. размещение всех кредитных заявок невозможно. Пусть $c_t > 0$, $t = 1, 2, \ldots, n$, – прибыль, полученная при удовлетворении кредитной заявки t. Требуется выбрать для реализации набор проектов с максимальной суммарной прибылью:

$$x_t = \begin{cases} 0, \text{ если кредит } t \text{ выдается,} \\ 1, \text{ если кредит } t \text{ отклоняется.} \end{cases}$$

Многомерная задача о рюкзаке является NP-трудной задачей, имеющей много практических приложений, таких как размещение процессоров в распределенных системах, размещение грузов, распределение бюджетных средств и т. д.

Стратегия поиска оптимального решения с помощью алгоритмов муравьиных колоний хорошо соотносится с решением задачи о многомерном рюкзаке [4].

Основу социального поведения муравьев составляет самоорганизация, которая является результатом взаимодействия следующих четырех компонентов:

– случайности;
– многократности;
– положительной обратной связи;
– отрицательной обратной связи.

Муравьи используют два способа передачи информации: прямой – обмен пищей, мандибулярный, визуальный и химический контакты, и непрямой – стигмержи. Стигмержи – это разнесенный во времени тип взаимодействия, когда один субъект взаимодействия изменяет некоторую часть окружающей среды, а остальные используют информацию об ее состоянии позже, когда находятся в ее окрестности. Биологически стигмержи осуществляется через феромон – специальный секрет, откладываемый как след при перемещении муравья. Любой муравей в фиксированный момент времени может воспринимать и изменять лишь одну локальную ячейку этой глобальной памяти [4].

Рассмотрим, как реализовать четыре компонента самоорганизации муравьев при решении задачи о многомерном рюкзаке.

Многократность взаимодействия реализуется итерационным поиском оптимального набора предметов в рюкзаке одновременно несколькими муравьями. При этом каждый муравей рассматривается как отдельный агент, независимо решающий свою задачу. За одну итерацию алгоритма каждый муравей набирает полный рюкзак.

Для задачи о рюкзаке положительная обратная связь реализуется следующим стохастическим правилом: для муравья вероятность положить предмет в рюкзак пропорциональна количеству феромона на этом предмете.

Применение такого вероятностного правила обеспечивает реализацию и другой составляющей самоорганизации – случайности. Количество откладываемого муравьем феромона на предмете пропорционально его важности. С другой стороны, время испарения феромона не должно быть и слишком малым, так как это приводит к быстрому забыванию, т. е. потере памяти колонии, и, следовательно, к некооперативному поведению муравьев.

Для каждого муравья решение взять предмет зависит от трех составляющих: памяти муравья (tabu list), значимости и виртуального следа феромона.

Tabu list – это список взятых муравьем предметов, которые брать еще раз нельзя. Используя этот список, муравей гарантированно не возьмет один и тот же предмет дважды. Обозначим через J_k список предметов, которые муравью k можно взять на итерации l. Очевидно, что J_k является дополнением к tabu list.

Значимость η_s – это локальная статическая информация, выражающая эвристическое желание муравья взять предмет. Для одномерной задачи о рюкзаке можно предложить удельную ценность предмета – отношение коэффициентов целевой функции к коэффициентам ограничения: $\eta_s = \frac{c_s}{a_s}$ [5]. Когда ограничений в задаче становится больше одного, то значимость для каждого предмета определить однозначно уже нельзя.

Расчета значимости может проводиться по формуле

$$\eta_s = \frac{c_s}{\sum_{s=1}^{m} \frac{a_{st}}{b_s}}.$$

В этом случае мы суммируем коэффициенты по каждому $s = 1, \ldots, m$, где m – число ограничений задачи. Нормирование на коэффициенты b_s введено для масштабирования величин к величинам одного порядка.

Однако для нахождения оптимального решения помимо значимости необходимо использование виртуального следа феромона.

Виртуальный след феромона на предмете t представляет подтвержденное муравьиным опытом желание взять предмет t. В отличие от значимости след феромона является более глобальной и динамичной информацией, которая изменяется после каждой итерации алгоритма, отражая приобретенный муравьями опыт. Количество виртуального феромона на предмете t на итерации l обозначим через $\tau_t(l)$.

Важную роль в алгоритмах муравьиных колоний играет вероятностно-пропорциональное правило, определяющее вероятность для k-го муравья взять предмет t на итерации l:

$$P_{t,k}(l) = \begin{cases} \dfrac{[\tau_t(l)]^{\alpha} \cdot [\eta_t]^{\beta}}{\sum_{t \in J_k} [\tau_t(l)]^{\alpha} \cdot [\eta_t]^{\beta}}, & \text{если } t \in J_k, \\ 0, & \text{если } t \notin J_k, \end{cases} \qquad (5)$$

где α и β – два регулируемых параметра, задающих веса следа феромона и значимости при выборе маршрута.

После того как каждый муравей набрал свой рюкзак, происходит изменение следа феромона на предметах. Способ изменения следа феромона зависит от модели алгоритма муравьиных колоний [3]: ant-density или ant-cycle.

В модели ant-density количество феромона, оставляемого муравьем на предмете, является постоянной величиной:

$$\Delta\tau_{t,k}(l) = \begin{cases} q, & \text{если } t \in T_k(l), \\ 0, & \text{если } t \notin T_k(l). \end{cases} \qquad (6)$$

В модели ant-cycle количество феромона, оставляемого муравьем на предмете, зависит от общей ценности $f(T_k(t))$ этого набора предметов:

$$\Delta\tau_{t,k}(l) = \begin{cases} q \cdot f(T_k(l)), \text{ если } t \in T_k(l), \\ 0, \text{ если } t \notin T_k(l), \end{cases} \qquad (7)$$

где $T_k(l)$ – набор предметов у k-го муравья на итерации l; $f(T_k(l))$ – ценность этого набора; q – регулируемый параметр.

Для исследования всего пространства решений необходимо обеспечить испарение феромона, т. е. уменьшить во времени количество феромона, отложенного на предыдущих итерациях. Обозначим коэффициент испарения феромона через $p \in [0, 1]$. Тогда правило обновления феромона примет вид

$$\tau_t(l+1) = (1-p) \cdot \tau_t(l) + \Delta\tau_t(l),$$

где $\Delta\tau_t(l) = \sum_{k=1}^{K} \Delta\tau_t(l)$, здесь K – количество муравьев в колонии.

В начале работы алгоритма оптимизации количество феромона принимается равным небольшому положительному числу τ_0. Общее количество муравьев в колонии остается постоянным на протяжении выполнения алгоритма. Многочисленная колония приводит к быстрому усилению субоптимальных решений, а когда муравьев мало, то возникает опасность потери кооперативности поведения через ограниченное взаимодействие и быстрое испарение феромона. Число муравьев можно назначить равным произведению числа предметов и числа ограничений.

Алгоритм муравьиных колоний выполняется следующим образом.

Подготовительные процедуры:

1. Инициализация параметров алгоритма муравьиных колоний α, β, p и q, m, τ_0; N – число итераций алгоритма.

2. Задание следа феромона τ_0 на предметах, расчет значимости предметов η_t.

Основной цикл (повторяется N раз):

3. Выбор каждым муравьем колонии набора предметов по вероятностно-пропорциональному правилу (5). Муравей набирает предметы, пока его tabu list не будет включать список всех предметов. Как только все муравьи колонии набрали свои рюкзаки, вычисление ценности и переход к п. 4.

4. Обновление следа феромона на предметах по заранее выбранной схеме: ant-density или ant-cycle. Испарение феромона.

5. Поиск лучшего решения $f_{\max}$ на итерации и сравнение его с наилучшим f^*: если $f_{\max} > f^*$, то $f^* = f_{\max}$ и переход к п. 3.

Полученное значение f^* и является решением задачи.

Алгоритм муравьиных колоний находит близкие к оптимуму решения за значительно меньшее время даже для задач небольшой размерности ($n > 30$). Время оптимизации алгоритмом муравьиных колоний является полиномиальной функцией от размерности $O(n^3)$, тогда как для точных методов эта зависимость будет экспоненциальной.

Таким образом, применение метода полного перебора ограничено задачами небольшой размерности. При повышении размерности количество допустимых решений становится величиной астрономического порядка, что делает реализацию данного метода затруднительной. Алгоритм муравьиных колоний является более гибкой процедурой, так как он позволяет выбирать параметры α и β, влияющие на трудоемкость алгоритма и точность решения. Этот алгоритм способен эффективно решать задачу оптимизации набора кредитных заявок при управлении формированием кредитного портфеля банка. Размерность решаемых задач может быть достаточно велика, однако точность полученных решений при этом не гарантируется, как и для всех приближенных методов решения оптимизационных задач [5].

Библиографические ссылки

1. Пуртиков В. А. Постановка задачи оптимизации выбора кредитного портфеля // Вестник НИИ СУВПТ / НИИ систем упр., волновых процессов и технологий. Красноярск, 1999. Вып. 2. С. 145–159.

2. Dorigo M., Maniezzo V., Colorni A. The Ant System: An Autocatalytic Optimizing Process : Technical Rep. № 91-016 Revised / Politecnico di Milano. Milano, Italy, 1991.

3. Кагиров Р. Р. Применение муравьиных алгоритмов для решения задачи о рюкзаке // Вестн. унив. комплекса : сб. науч. тр. / под общ. ред. проф. Н. В. Василенко ; НИИ систем упр., волновых процессов и технологий. Красноярск, 2004. Вып. № 1 (15). С. 102–107.

4. Штовба С. Д. Муравьиные алгоритмы // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2003. № 4 (4). С. 70–75.

5. Кагиров Р. Р. Многомерная задача о рюкзаке: новые методы решения / Вестник СибГАУ. 2007. Вып. 3 (16). С. 16–20.

A. A. Stupina, A. Yu. Yugay, M. V. Karaseva

CREDIT APPLICATIONS SET OPTIMIZATION ALGORITHMS

We consider a problem of building up the optimal set of loan applications in the management of credit portfolio. As the algorithms for solving the task we propose the algorithm of exhaustive search and the algorithms of ant colonies.

Keywords: loan portfolio, loan application, liquidity, an exhaustive search, the algorithm of ant colonies, stigmergy.

.