УДК 005; 519.7; 303.732

И. С. Рыжиков

РЕШЕНИЕ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается метод решения задачи терминального управления нелинейными динамическими системами, основанный на методе эволюционных стратегий. Синтез функции управления состоит в определении характеристик идеального двухпозиционного реле.

Ключевые слова: управление, эволюционные стратегии, динамические системы, нелинейная динамика.

Рассматривается один из методов решения задачи управления нелинейным динамическим объектом. Имеем объект, заданный нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u). \tag{1}$$

Необходимо найти такую функцию управления $u(t)$, что за конечное время T система (1) перейдет из начального состояния $x(0) = x^0$ в конечное $x(T) = x^T$.

Поскольку для линейной динамической системы решение задачи оптимального управления может быть найдено методом моментов [1; 2] (решение, которое при функционалах определенного вида представляет собой идеальное реле), то допустим, что терминальная задача для нелинейной системы может быть решена при функции управления аналогичного типа.

Такая ситуация имеет место в задачах оптимального управления, если управление u входит линейно в гамильтониан $H(x,p,u) = \varphi_1(x,p) + \varphi_2(x,p)u$ и управление ограничено по модулю. Так обстоит дело, например, в задаче быстродействия. В этом случае максимизация гамильтониана по u в принципе максимума приводит к соотношению $u^{\text{opt}}(t) = u_{\max}\,\text{sign}(\varphi_2(x,p))$ и, исключая u из краевой задачи принципа максимума, можно, решив двухточечную краевую задачу, решить и задачу оптимального управления.

Часто структура системы управления такова, что исполнительный механизм может действовать по принципу включено-выключено.

Таким образом, в этих случаях структура управления определена с точностью до неизвестных параметров – либо начальных условий для сопряженных переменных p, либо времен переключений управления с точностью до знака управления на первом включении.

Таким образом, для решения задачи необходимо найти функцию вида

$$u(t) = \begin{cases} -A, & t \in I_1; \\ A, & t \in I_2, \end{cases} \tag{2}$$

где I_1, I_2 – множества интервалов, определенных точками переключения, такие, что $I_1 \cup I_2 = [0, T]$; A – амплитуда реле.

Пусть $R = \left\{ r_i : r_i < r_{i+1}, r_i \in R^+ \ \forall i = \overline{1,k},\ r_0 = 0 \right\}$ – множество всех точек переключений, тогда при известном значении функции управления в момент времени определим множества интервалов I_1, I_2. Если $u(0) < 0$, то $I_1 = \left\{ (r_{2\cdot i-2}, r_{2\cdot i-1}],\ 2\cdot i - 1 < \text{card}(R), i \in \mathrm{N} \right\}$ и $I_2 = \left\{ (r_{2\cdot i-1}, r_{2\cdot i}],\ 2\cdot i < \text{card}(R), i \in \mathrm{N} \right\}$, а при $u(0) > 0$: $I_1 = \left\{ (r_{2\cdot i-1}, r_{2\cdot i}],\ 2\cdot i < \text{card}(R), i \in \mathrm{N} \right\}$ и

$$I_2 = \left\{ (r_{2\cdot i-2}, r_{2\cdot i-1}],\ 2\cdot i - 1 < \text{card}(R), i \in \mathrm{N} \right\}.$$

Таким образом, задачу поиска можно сформулировать следующим образом:

$$F(R, A) = \left\| x^T - x(T)\big|_{A=A^*,\ R=R^*} \right\| \to \min_{A^*, R^*}, \tag{3}$$

при ограничениях

$$r_i < r_{i+1}, r_i \in R^+ \ \forall i = \overline{1,k}. \tag{4}$$

Задачу (3) при ограничениях (4) можно решить с помощью гибридного модифицированного метода эволюционных стратегий [3], при заранее фиксированном числе переключений k. От ограничений типа (4) можно уйти, распределив каждый ген, кроме первого – который будет отвечать за амплитуду начальной популяции на интервале $[0, R']$, где R' – любое положительное вещественное число, и изменив операцию мутации

$$\text{op}_{i,j} = \left| \text{op}_{i,j} + T_{i,j} \cdot N(0, \text{sp}_{i,j}) \right|,$$
$$\text{sp}_i = \text{sp}_i + T \cdot N(0,1),$$

где $i = \overline{1,N}$ – номер индивида в популяции; $j = \overline{2,n}$, n – размерность признакового пространства.

Таким образом, случайный поиск будет осуществляться только среди положительных чисел – для точек переключения, на всей числовой прямой – для амплитуды. Для разрешения неравенства $r_i < r_{i+1}$ представим каждого индивида следующим образом: $\text{op}_{i,1}$ – амплитуда реле, $r_i = \sum_{j=1}^{i} \text{op}_{i,j+1}, i = \overline{1,k}$ – точки переключения.

В итоге управление будет определено по решению задачи на безусловный экстремум (3). Таким образом, в качестве решения мы получим функцию управления с числом точек переключения меньшим либо равным k.

Пример 1. Приведем пример решения двухточечной краевой задачи для системы

$$x' + 2 \cdot \sin(x) = u(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(T) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T = 5. \tag{5}$$

Пусть $k = 10$. Для 100 индивидов и 50 популяций работы модифицированного алгоритма эволюционных стратегий с локальным спуском: для 10 случайно выбранных индивидов выполняется покоординатный спуск для 5 случайно выбранных генов – 5 шагов величиной 0.05. Настройки алгоритма: турнирная селекция (размер турнира – 10), дискретное скрещивание. Далее перечисленные настройки алгоритма не менялись. Нелинейное дифференциальное уравнение решалось методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности.

Траектории системы и найденное управление представлены на рис. 1. Конечное состояние системы – $x(T) = \begin{pmatrix} -2{,}997\,8 \\ -0{,}001\,679\,5 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Рассмотрим задачу с другими условиями:

$$x' \cdot x^2 + x \cdot u(t) = 0, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(T) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T = 5. \tag{6}$$

Траектории системы и управление представлены на рис. 2. Вектор конечного состояния системы $x(T) = \begin{pmatrix} 3{,}015\,3 \\ -1{,}965\,5 \end{pmatrix}$.

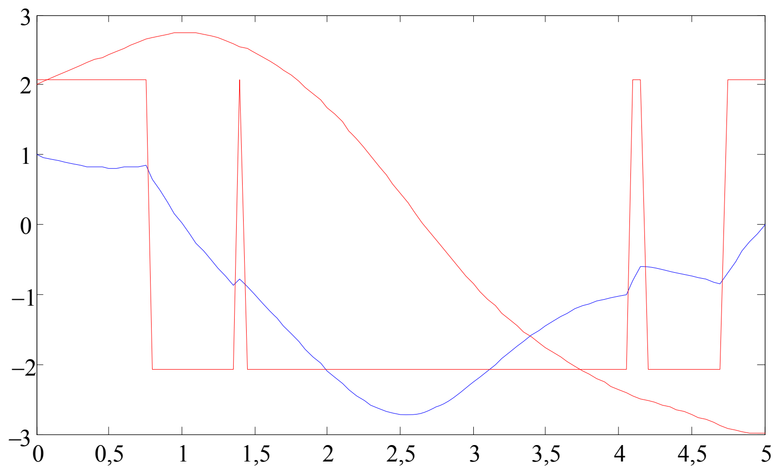

Рис. 1

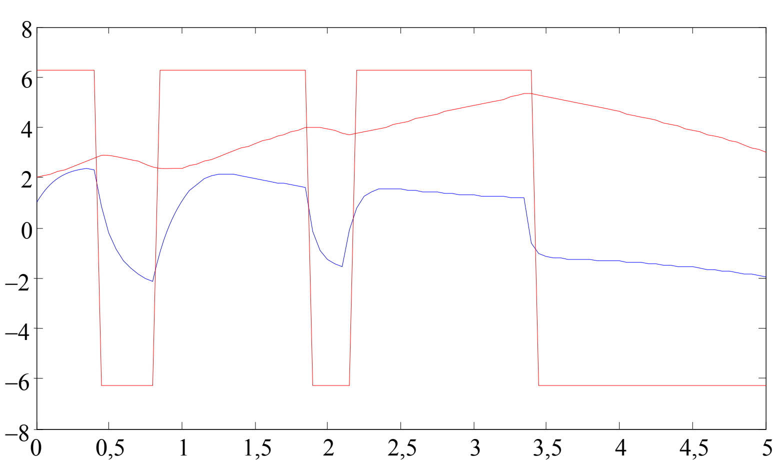

Рис. 2

В том случае, когда нужно найти управление с фиксированным числом точек переключений, определим множество всех точек переключения следующим образом: $R = \left\{ r_i : r_i < r_{i+1}, r_i \in (0, T]\ \forall i = \overline{1, k},\ r_0 = 0 \right\}$ и к ограничениям типа (4) введем еще одно ограничение:

$$r_k < T,$$

или, в иной форме:

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{op}_{i,j+1} < T.$$

Тогда задача поиска будет выглядеть следующим образом:

$$F(R, A) = \left\| x^T - x(T)\big|_{A=A^*,\, R=R^*} \right\| +$$
$$+\ \alpha \cdot \varphi\Big(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{op}_{i,j+1} - T\Big) \to \min_{A^*, R^*},$$

где $\varphi(x) = \begin{cases} \|x\|, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$ – функция штрафа за нарушение ограничений; α – весовой коэффициент.

Приняв $\alpha = 10$, решим задачи (5) и (6). Конечные состояния системы, соответственно $x(T) = \begin{pmatrix} -2{,}992\,4 \\ -0{,}018\,241 \end{pmatrix}$ и $x(T) = \begin{pmatrix} 2{,}999\,6 \\ -1{,}999\,6 \end{pmatrix}$. Графики траекторий системы и найденного управления представлены на рис. 3 и 4.

Отметим, что в случае когда следующая точка переключения располагается на расстоянии меньшем, чем шаг интегрирования от предыдущей точки, то фактически никаких изменений при данной схеме предыдущая точка не вносит. Происходит своего рода косвенная настройка алгоритмом количества точек переключений, хоть и не такая очевидная и эффективная, как в задаче (3) с ограничениями (4).

Библиографические ссылки

1. Охорзин В. А. Прикладная математика в системе Mathcad / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2004.

2. Рыжиков И. С. Оптимальное управление линейными системами методом моментов // Материалы VIII Всерос. конф. молодых ученых по мат. моделированию и информ. технологиям. Новосибирск, 2007. С. 70.

3. Охорзин В. А., Рыжиков И. С. Гибридный модифицированный метод эволюционных стратегий для решения задач идентификации динамических систем // Вестник СибГАУ. 2010. Вып. 4 (30). С. 20–23.

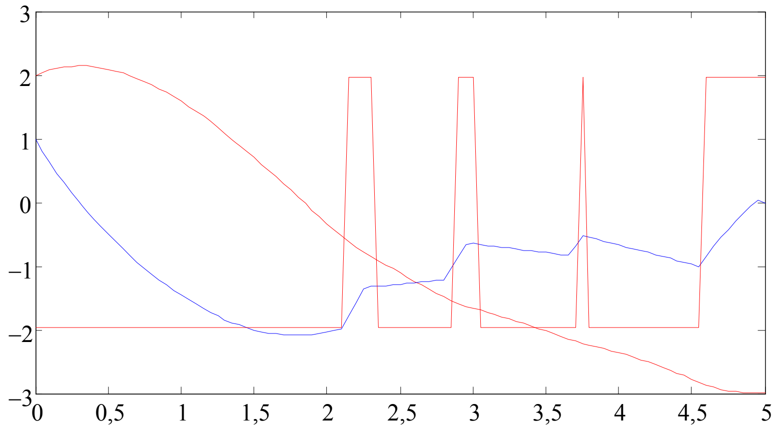

Рис. 3

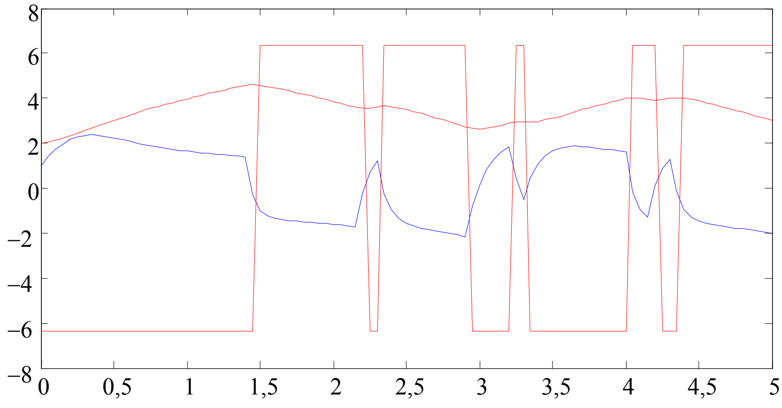

Рис. 4

I. S. Ryzhikov

SOLUTION OF THE PROBLEM OF TERMINAL CONTROL FOR NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

The author considers a terminal control task solution method for nonlinear dynamic systems, method is based on evolutionary strategies algorithm modification. The control function synthesis is reduced to ideal two-step relay characteristics determination.

Keywords: control, evolutionary strategies, dynamic system, nonlinear dynamics.

УДК 539.374

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова, А. Е. Михеев

О ПОСТРОЕНИИ ПОЛЕЙ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ИЗВЕСТНЫХ НЕОСОБЫХ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ*

Построено новое поле скоростей для уравнений пластичности, описывающих сжатие пластического слоя между плитами, сближающимися с разными скоростями.

Ключевые слова: пластичность, поля скоростей, точные решения.

Пусть известно неособое напряженное состояние идеальной пластической среды для плоского деформированного состояния $\sigma = \sigma(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$ [1]. В этом случае для нахождения соответствующего поля скоростей можно искать либо решение системы уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\operatorname{tg} 2\theta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

либо решение системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{2} V = 0, \ \ \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{1}{2} U = 0, \qquad (2)$$

где $u = U\cos\theta - V\sin\theta$, $v = U\sin\theta + V\cos\theta$. Здесь (u, v) – компоненты вектора скорости вдоль осей Ox и Oy, а (U, V) – компоненты вектора скорости вдоль характеристик системы (1).

Решения данных уравнений другим способом были получены авторами ранее [2].

Традиционно исследователи решают систему уравнений (1). Несмотря на то что с первого взгляда эта система кажется достаточно простой, ее решений известно не так много. Это объясняется тем, что выражение для $\operatorname{tg} 2\theta$ является довольно сложным, даже для решения Прандтля $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}$. Для этого случая известно всего два решения. Одно получено А. Надаи, второе – почти одновременно Д. Д. Ивлевым и С. И. Сенашовым.

Гораздо более перспективным является второй путь нахождения полей скоростей. Он позволяет для каждого решения уравнений (2) сразу строить поле скоростей для любых неособых напряженных состояний.

Укажем решения для неособых напряженных состояний. Для этого приведем систему (2) к телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} U = 0. \qquad (3)$$

В силу симметрии $\xi' = a\xi,\ \eta' = \frac{\eta}{a}$, которая допускается уравнением (3), его решение следует искать в виде $U = U(\xi\eta) = U(z)$.

Тогда (3) приводится к виду

$$zU'' - \frac{1}{4} U = 0.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$U = \sqrt{\xi\eta}\left(C_1 I_1\left(\sqrt{\xi\eta}\right) + C_2 K_2\left(\sqrt{\xi\eta}\right)\right),$$

где I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; C_i – произвольные постоянные.

* Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (код проекта П1121) и «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1 (3023).