I. S. Ryzhikov

SOLUTION OF THE PROBLEM OF TERMINAL CONTROL FOR NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

The author considers a terminal control task solution method for nonlinear dynamic systems, method is based on evolutionary strategies algorithm modification. The control function synthesis is reduced to ideal two-step relay characteristics determination.

Keywords: control, evolutionary strategies, dynamic system, nonlinear dynamics.

УДК 539.374

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова, А. Е. Михеев

О ПОСТРОЕНИИ ПОЛЕЙ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ИЗВЕСТНЫХ НЕОСОБЫХ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ*

Построено новое поле скоростей для уравнений пластичности, описывающих сжатие пластического слоя между плитами, сближающимися с разными скоростями.

Ключевые слова: пластичность, поля скоростей, точные решения.

Пусть известно неособое напряженное состояние идеальной пластической среды для плоского деформированного состояния $\sigma = \sigma(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$ [1]. В этом случае для нахождения соответствующего поля скоростей можно искать либо решение системы уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\operatorname{tg} 2\theta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

либо решение системы с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{2} V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{1}{2} U = 0, \tag{2}$$

где $u = U\cos\theta - V\sin\theta$, $v = U\sin\theta + V\cos\theta$. Здесь (u, v) – компоненты вектора скорости вдоль осей Ox и Oy, а (U, V) – компоненты вектора скорости вдоль характеристик системы (1).

Решения данных уравнений другим способом были получены авторами ранее [2].

Традиционно исследователи решают систему уравнений (1). Несмотря на то что с первого взгляда эта система кажется достаточно простой, ее решений известно не так много. Это объясняется тем, что выражение для $\operatorname{tg} 2\theta$ является довольно сложным, даже для решения Прандтля $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}$. Для этого случая известно всего два решения. Одно получено А. Надаи, второе – почти одновременно Д. Д. Ивлевым и С. И. Сенашовым.

Гораздо более перспективным является второй путь нахождения полей скоростей. Он позволяет для каждого решения уравнений (2) сразу строить поле скоростей для любых неособых напряженных состояний.

Укажем решения для неособых напряженных состояний. Для этого приведем систему (2) к телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4} U = 0. \tag{3}$$

В силу симметрии $\xi' = a\xi,\ \eta' = \frac{\eta}{a}$, которая допускается уравнением (3), его решение следует искать в виде $U = U(\xi\eta) = U(z)$.

Тогда (3) приводится к виду

$$zU'' - \frac{1}{4} U = 0.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$U = \sqrt{\xi\eta} \left(C_1 I_1 \left(\sqrt{\xi\eta} \right) + C_2 K_2 \left(\sqrt{\xi\eta} \right) \right),$$

где I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; C_i – произвольные постоянные.

* Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (код проекта П1121) и «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1 (3023).

Еще одно очевидное решение уравнения (3):

$$U = \exp\left(\pm\frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

Для построения других решений уравнения (2) запишем его в другом виде. Для этого введем переменные $z = \frac{\xi+\eta}{2}$ и $t = \frac{\eta-\xi}{2}$. В этих переменных уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - U = 0. \qquad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде $U = Z(z)T(t)$, тогда (4) принимает вид

$$\frac{Z''}{Z} - \frac{T''}{T} - 1 = 0,$$

откуда получаем

$$Z'' - \lambda Z = 0, \quad T'' - \mu T = 0, \quad \lambda - \mu - 1 = 0,$$

где λ, μ – произвольные параметры.

Имеем следующие возможные варианты значений параметров λ, μ (здесь a, b – произвольные постоянные):

1) $\lambda = a^2,\ \mu = b^2,\ a^2 - b^2 = 1;$

2) $\lambda = a^2,\ \mu = -b^2,\ a^2 + b^2 = 1;$

3) $\lambda = a^2,\ \mu = 0,\ a = \pm 1;$

4) $\lambda = -a^2,\ \mu = b^2,\ a^2 + b^2 = -1;$

5) $\lambda = -a^2,\ \mu = -b^2,\ b^2 - a^2 = 1;$

6) $\lambda = -a^2,\ \mu = 0,\ a^2 = -1;$

7) $\lambda = 0,\ \mu = b^2,\ b^2 = -1;$

8) $\lambda = 0,\ \mu = -b^2,\ b = \pm 1.$

Для случаев 1– 3, 5, 8 получаем решения уравнения (4), где C_i – произвольные константы:

1) $U = \left(C_1 e^{az} + C_2 e^{-az}\right)\left(C_3 e^{bt} + C_4 e^{-bt}\right);$

2) $U = \left(C_1 e^{az} + C_2 e^{-az}\right)\left(C_3 \sin bt + C_4 \cos bt\right);$

3) $U = \left(C_1 e^{az} + C_2 e^{-az}\right)\left(C_3 t + C_4\right);$

5) $U = \left(C_1 \sin az + C_2 \cos az\right)\left(C_3 \sin bt + C_4 \cos bt\right);$

8) $U = \left(C_1 z + C_2\right)\left(C_3 \sin t + C_4 \cos t\right).$

Вернемся к исходным координатам. Тогда $z = \frac{\xi+\eta}{2} = \frac{\sigma}{2k}$, $t = \frac{\eta-\xi}{2} = \theta.$ В силу этого наиболее просто будут выглядеть решения 2, 5, 8. Запишем их в исходных координатах:

$$U_2 = \left(C_1 e^{a\frac{\sigma}{2k}} + C_2 e^{-a\frac{\sigma}{2k}}\right)\left(C_3 \sin bt + C_4 \cos bt\right);$$

$$U_5 = \left(C_1 \sin a\frac{\sigma}{2k} + C_2 \cos a\frac{\sigma}{2k}\right)\left(C_3 \sin bt + C_4 \cos bt\right);$$

$$U_8 = \left(C_1 \frac{\sigma}{2k} + C_2\right)\left(C_3 \sin t + C_4 \cos t\right).$$

Все эти решения можно использовать с решением Прандтля, положив в них $\sigma = \frac{1}{2}\left(-x - \sqrt{1-y^2}\right)$, $y = \cos 2\theta.$

Для отбора решения поставим краевые условия. Имеем

$$V\big|_{y=1} = V_1,\ V\big|_{y=-1} = V_2.$$

Тогда получаем

$$v = U\sin\theta + V\cos\theta = U\sqrt{\frac{1-y}{y}} + V\sqrt{\frac{1+y}{y}},$$

и $v\big|_{y=1} = V\big|_{y=1} = V_1,\ v\big|_{y=-1} = U\big|_{y=-1} = V_2.$

Подберем такие функции, для которых $U\big|_{y=-1} = V_2.$ После ряда преобразований убеждаемся, что данному условию удовлетворяет только функция U_8.

Таким образом, получаем следующее новое решение (новое поле скоростей) для уравнения (1), которое описывает сжатие пластического слоя плитами, сближающимися с различными скоростями:

$$\begin{cases} u = \left(V_1 - V_2\right)\cos\theta + V_2 \sin\theta, \\ v = V_1 \cos\theta + \dfrac{\sigma}{2k}\left(V_1 - V_2\right)\sin\theta. \end{cases}$$

На плите, заданной уравнением $y = -1$, скорость равна V_1; на плите, заданной уравнением $y = 1$, скорость равна V_2.

Библиографические ссылки

1. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин и др. М. : Физматлит, 2008.

2. Сенашов С. И., Гомонова О. В. Эволюция характеристик решения Прандтля // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. X. № 4 (32). С. 118–121.

S. I. Senashov, O. V. Gomonova, A. E. Mikheev

ABOUT CONSTRUCTION OF FIELDS OF VELOCITIES FOR KNOWN NONSINGULAR STRESS FIELDS

The authors set up a new field of velocity for the equations of plasticity, which describe a pressure of a plastic layer between two plates approximating different velocities.

Keywords: plasticity, fields of velocity, exact solutions.