УДК 539.374

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина, Е. А. Попов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ВЫСШИМИ СИММЕТРИЯМИ*

Показано, как высшие симметрии плоской идеальной пластичности действуют на точные решения. Получены новые решения.

Ключевые слова: двумерная пластичность, точные решения, высшие симметрии.

1. Рассмотрим дифференциальные уравнения теории идеальной пластичности в плоском случае [1]:

$$F_1 = \frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k\left(\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = 0, \qquad (1)$$

$$F_2 = \frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k\left(\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} - \cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = 0,$$

где $\sigma_x = \sigma - k\sin 2\theta$, $\sigma_y = \sigma + k\sin 2\theta$, $\tau = k\cos 2\theta$ – компоненты тензора напряжений; σ – гидростатическое давление; $\theta = (1;x) - \frac{\pi}{4}, (1;x)$ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и осью *OX*.

Известно, что система уравнений (1) допускает бесконечную группу точечных симметрий, бесконечную алгебру высших симметрий и бесконечную систему законов сохранения [2].

Точечная группа, допускаемая системой (1), уже неплохо изучена. С ее помощью удалось построить новые серии точных решений системы (1) и изучить качественные свойства уравнений.

Законы сохранения, допускаемые системой (1), позволили в аналитическом виде решить краевые задачи Коши и Римана.

В данной статье впервые будет показано, как высшие симметрии используются для построения новых точных решений уравнений (1).

2. Приведем необходимые сведения о высших симметриях уравнения (1).

Пусть

$$\frac{\partial^{i+j}\sigma}{\partial x^i \partial y^j} = p_{ij}^1, \frac{\partial^{i+j}\theta}{\partial x^i \partial y^j} = p_{ij}^2, i, j = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим бесконечномерное пространство J^∞ с координатами $(x, y, \sigma, \theta, p_{ij}^k)$ $k = 1, 2, \ldots$ и преобразование этого пространства вида

$$x' = f^1(x, y, \sigma, \theta, p_{ij}^k, \alpha),$$
$$y' = f^2(x, y, \sigma, \theta, p_{ij}^k, \alpha),$$
$$\sigma' = g^1(x, y, \sigma, \theta, p_{ij}^k, \alpha), \qquad (2)$$
$$\theta' = g^2(x, y, \sigma, \theta, p_{ij}^k, \alpha),$$
$$(p_{ij}^k)' = h_{ij}^k(x, y, \sigma, \theta, p_{ij}^k, \alpha), \quad k = 1, 2, \ldots; \; i, j = 1, 2, \ldots,$$

где α – одномерный параметр из некоторой окрестности нуля.

Пусть преобразования (2) образуют локальную однопараметрическую группу, тогда

$$\left(p_{ij}^1\right)' = \frac{\partial^{i+j}\sigma'}{\partial(x')^i \partial(y')^j}, \; \left(p_{ij}^2\right)' = \frac{\partial^{i+j}\theta'}{\partial(x')^i \partial(y')^j}.$$

Система уравнений (1) определяет в пространстве J^∞ следующую бесконечную систему уравнений

$$D_\sigma(F_1) = 0, \qquad (3)$$

Здесь оператор полной производной имеет вид

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k,i,j} p_{i+1,j}^k \frac{\partial}{\partial p_{i,j}^k},$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k,i,j} p_{i,j+1}^k \frac{\partial}{\partial p_{i,j}^k},$$

$$\sigma = (l, m), \quad D_\sigma = D_x^e \circ D_y^m.$$

Будем говорить, что система уравнений (1) допускает группу преобразований (2), если бесконечная система (3) инвариантна при этих преобразованиях. Каждый однопараметрической группе (2) соответствует производная функция симметрий $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$, которая определяется из системы уравнений

$$\overline{l_F \varphi} = 0. \qquad (4)$$

Черта вверху означает, что в уравнениях (4) следует перейти на многообразие (3). Уравнения (4) для системы (1) имеют вид

$$l_F = \begin{pmatrix} D_x & \begin{matrix} -2k\left(-2\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} + \right. \\ \left. + \cos 2\theta D_x + \sin 2\theta D_y\right) \end{matrix} \\ D_y & \begin{matrix} -2k\left(2\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} + \right. \\ \left. + \sin 2\theta D_x - \cos 2\theta D_y\right) \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Подробности вычислений высших симметрий и многочисленные примеры можно найти в [2] и цитируемой там литературе.

* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1 (3023).

3. Наиболее простая неточечная симметрия системы уравнений (1) имеет вид [2]

$$\varphi = \begin{pmatrix} \overline{y_{\xi\xi}} \\ -\frac{1}{2}\overline{y_{\xi}} \end{pmatrix},$$

где $\xi = \frac{\sigma}{2k} - \theta$, $\eta = \frac{\sigma}{2k} + \theta$, – инварианты Римана системы (1), $\overline{x} = x\cos\theta + y\sin\theta$, $\overline{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta$.

Известен следующий факт. Пусть $(\sigma(x,y),\theta(x,y))$ – решение системы уравнений (1), которое в переменных $\overline{x},\overline{y}$ обозначим через $\overline{x}_0,\overline{y}_0$, тогда величины $\sigma(x,y,\tau)$, $\theta(x,y,\tau)$, определяемые из системы

$$\begin{gathered} \overline{y_\tau} = \overline{y_{\xi\xi}},\ \overline{y}(x,y,0) = \overline{y}_0, \\ \overline{x_\tau} = -\frac{1}{2}\overline{y_\xi},\ \overline{x}(x,y,0) = \overline{x}_0, \end{gathered} \tag{5}$$

есть также решение системы (1).

4. Запишем известное решение Прандтля, описывающее сжатие пластического слоя жесткими плитами, в координатах $(\overline{x},\overline{y})$.

Имеем [1]

$$\begin{gathered} \sigma_x = -k(x - 2\sqrt{1-y^2}), \\ \sigma_y = -kx,\ \tau = ky, \end{gathered}$$

тогда

$$\begin{gathered} x = -\sigma/k - \sin 2\theta = (\xi+\eta) - \sin(\eta-\xi), \\ y = \cos 2\theta = \cos(\eta - \xi). \end{gathered}$$

Окончательно получаем

$$\begin{gathered} \overline{x} = x\cos\theta + y\sin\theta = -(\xi+\eta)\cos\frac{\eta-\xi}{2} - \sin\frac{\eta-\xi}{2} = \overline{x}_0, \\ \overline{y} = -x\sin\theta + y\cos\theta = \\ = -(\xi+\eta)\sin\frac{\eta-\xi}{2} - \cos\frac{\eta-\xi}{2} = \overline{y}_0. \end{gathered} \tag{6}$$

Решаем первое уравнение системы (5) с начальным условием (6).

Решение этой задачи можно записать в виде

$$\overline{y}(\xi,\eta,\tau) = \overline{y}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}\frac{\partial^{2n}\overline{y}_0}{\partial\xi^{2n}}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial^{2n}\overline{y}_0}{\partial\xi^{2n}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\overline{y} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{\eta-\xi}{2}.$$

Сворачивая полученные ряды из (7), получаем

$$\overline{y}(\xi,\eta,\tau) = \overline{y}_0\exp\left(-\tau/4\right) + \cos\theta\exp\left(-\tau/2\right) - \cos\theta.$$

Отсюда без труда получаем решение системы (1) в координатах (x,y,σ,θ):

$$\begin{gathered} y(\tau) = \overline{x}\sin\theta + \overline{y}\cos\theta = \\ = y_0\exp\left(-\tau/4\right) + \cos 2\theta\exp\left(-\tau/2\right) - \cos 2\theta, \end{gathered} \tag{8}$$

где $y_0 = \cos 2\theta$.

Из (8) следует, что

$$y(\tau) = y_0\exp\left(-\tau/4\right) + \exp\left(-\tau/2\right) - 1,$$

а это означает, что на данном решении высшая симметрия φ сводится к преобразованию вида $x' = e^t x$, $y = e^t y$.

Поэтому новых решений из решения Прандтля построить не удается.

5. Аналогичная ситуация складывается и с решением Надаи, описывающим напряженное состояние около круглого отверстия. Это решение имеет в полярной системе координат вид

$$\sigma_{rr} = 2k\ln r,\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2k\ln r + 2k,\ \tau_{r\varphi} = 0.$$

6. Рассмотрим решение Надаи [1], описывающее течение в плоском сходящемся канале. Оно имеет вид

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = -2kc\ln r + k\cos 2\psi - kc\ln(c - \cos 2\psi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -2kc\ln r - k\cos 2\psi - kc\ln(c - \cos 2\psi), \\ \tau_{r\varphi} = k\sin 2\psi,\ \sigma_r - \sigma_\varphi = 2k\cos 2\psi > 0, \end{gathered}$$

где ψ – угол между первым главным направлением тензора напряжений и полярным радиусом.

Постоянная c связана с углом канала 2α:

$$\begin{gathered} \alpha + \pi/4 = \frac{c}{\sqrt{c^2-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c+1}{c-1}}, \\ c > 0,\ 0 < \alpha < \pi/2. \end{gathered}$$

Тогда уравнение первого семейства характеристик этого решения имеют вид [2]

$$\begin{gathered} x(\theta,c_1) = \exp\left(\frac{-(c_1+\theta)}{c}\right)S^{-1}(\theta), \\ y(\theta,c_1) = xT(\theta), \end{gathered}$$

где

$$S(\theta) = \sqrt{c + cT^2(\theta) + \sin 2\theta\left[1 - T^2(\theta)\right] - 2T(\theta)\cos 2\theta},$$

$$T(\theta) = tg\left[\theta + \pi/4 - arctg\left(\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}tg\left[\frac{c^2-1}{c}\left(\theta + \pi/4\right)\right]\right)\right].$$

Здесь c_1 – постоянная, определяющая характеристику; $\theta \in (0,\alpha)$ – параметр.

В этом случае уравнение преобразованных характеристик, симметрий φ, будут иметь вид

$$x(\tau,\xi,c_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}x(\omega,c_1)\exp\left[-\frac{(\xi-\omega)^2}{4\tau}\right]d\omega,$$

$$y(\tau,\xi,c_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}y(\omega,c_1)\exp\left[-\frac{(\xi-\omega)^2}{4\tau}\right]d\omega.$$

Аналогично выписываются преобразованные характеристики и второго семейства. Предварительные компьютерные расчеты показывают, что в этом случае высшая симметрия φ дает новое решение.

Библиографические ссылки

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. : Гостехтеоретиздат, 1956.
2. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, 2001.
3. Яхно Л. В. Суперпозиция решений Надаи и Прандтля для задач плоской пластичности // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. № 3. С. 123–138.

S. I. Senashov, E. V. Filyushina, E. A. Popov

TRANSFORMATION OF EXACT SOLUTIONS OF EQUATIONS OF PLASTICITY WITH ADVANCED SYMMETRIES

The article shows how advanced symmetries of plane ideal plasticity influence on exact solutions. New solutions are obtained.

Keywords: two-dimensional plasticity, exact solutions, advanced symmetry.

УДК 539.374

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина, А. М. Попов, И. В. Ковалев

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ*

С помощью группы непрерывных преобразований, допускаемых системой уравнений анизотропной пластичности в двумерном случае, найдены некоторые новые точные решения, которые являются аналогами точных решений в изотропном случае.

Ключевые слова: анизотропная теория пластичности, группа непрерывных преобразований, алгебра Ли.

1. Рассмотрим систему уравнений анизотропной теории пластичности в двумерном случае [1]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2}{1-c}+4\tau^2=4k^2, \tag{2}$$

где σ_x, σ_y, τ – компоненты тензора напряжения; $1-c=\alpha^2$ – параметр анизотропии [1]; k – предел текучести при сдвиге.

В системе (1)–(2) введем переменные $k\sigma'_x=\sigma_x$, $k\sigma'_y=\sigma_y$, $k\tau'=\tau$, тогда вид уравнения (1) не изменится, а уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\sigma'_x-\sigma'_y\right)^2+4\tau'^2=4. \tag{3}$$

В уравнениях (1), (3) сделаем замену:

$$\sigma'_x=\sigma-2\sin 2\theta,\quad \tau'=\cos 2\theta,$$
$$\sigma'_y=\sigma+2\sin 2\theta.$$

Получаем

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}-2\left(\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos 2\theta+\frac{\partial\theta}{\partial y}\sin 2\theta\right)=0,$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}-2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin 2\theta-\alpha\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos 2\theta\right)=0. \tag{4}$$

Найдем характеристики системы (4).

Они имеют вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{-2\cos 2\theta\pm\sqrt{\cos^2 2\theta\cdot\alpha^2+\sin^2 2\theta}}{\sin 2\theta}. \tag{5}$$

Соотношение на характеристиках (5) запишутся так:

$$\sigma=\pm 2\int\sqrt{\alpha^2\cos^2 2\theta+2\sin^2 2\theta}\,d\theta. \tag{6}$$

2. Найдем группу непрерывных преобразований, допускаемую системой (4). Допускаемый оператор ищем в виде [2]

$$X=\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial}{\partial\sigma}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{7}$$

где ξ_i зависят от x, y, σ, θ.

* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1 (3023).