Библиографические ссылки

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. : Гостехтеоретиздат, 1956.
2. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, 2001.
3. Яхно Л. В. Суперпозиция решений Надаи и Прандтля для задач плоской пластичности // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. № 3. С. 123–138.

S. I. Senashov, E. V. Filyushina, E. A. Popov

TRANSFORMATION OF EXACT SOLUTIONS OF EQUATIONS OF PLASTICITY WITH ADVANCED SYMMETRIES

The article shows how advanced symmetries of plane ideal plasticity influence on exact solutions. New solutions are obtained.

Keywords: two-dimensional plasticity, exact solutions, advanced symmetry.

УДК 539.374

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина, А. М. Попов, И. В. Ковалев

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ*

С помощью группы непрерывных преобразований, допускаемых системой уравнений анизотропной пластичности в двумерном случае, найдены некоторые новые точные решения, которые являются аналогами точных решений в изотропном случае.

Ключевые слова: анизотропная теория пластичности, группа непрерывных преобразований, алгебра Ли.

1. Рассмотрим систему уравнений анизотропной теории пластичности в двумерном случае [1]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2}{1-c}+4\tau^2=4k^2, \tag{2}$$

где σ_x, σ_y, τ – компоненты тензора напряжения; $1-c=\alpha^2$ – параметр анизотропии [1]; k – предел текучести при сдвиге.

В системе (1)–(2) введем переменные $k\sigma'_x=\sigma_x$, $k\sigma'_y=\sigma_y$, $k\tau'=\tau$, тогда вид уравнения (1) не изменится, а уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{\alpha^2}\left(\sigma'_x-\sigma'_y\right)^2+4\tau'^2=4. \tag{3}$$

В уравнениях (1), (3) сделаем замену:

$$\sigma'_x=\sigma-2\sin 2\theta,\quad \tau'=\cos 2\theta,$$
$$\sigma'_y=\sigma+2\sin 2\theta.$$

Получаем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}-2\left(\alpha\frac{\partial \theta}{\partial x}\cos 2\theta+\frac{\partial \theta}{\partial y}\sin 2\theta\right)=0,$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}-2\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\sin 2\theta-\alpha\frac{\partial \theta}{\partial y}\cos 2\theta\right)=0. \tag{4}$$

Найдем характеристики системы (4).

Они имеют вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{-2\cos 2\theta\pm\sqrt{\cos^2 2\theta\cdot\alpha^2+\sin^2 2\theta}}{\sin 2\theta}. \tag{5}$$

Соотношение на характеристиках (5) запишутся так:

$$\sigma=\pm 2\int\sqrt{\alpha^2\cos^2 2\theta+2\sin^2 2\theta}\,d\theta. \tag{6}$$

2. Найдем группу непрерывных преобразований, допускаемую системой (4). Допускаемый оператор ищем в виде [2]

$$X=\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial}{\partial \sigma}+\eta_2\frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{7}$$

где ξ_i зависят от x, y, σ, θ.

* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1 (3023).

Продолжим оператор (7) на первые производные и подействуем полученным оператором на уравнение (4). В полученных соотношениях перейдем на многообразие, задаваемое системой (4). В результате имеем полином второго порядка по производным $\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}$. Поскольку ξ_i, η_i зависят только от x, y, σ, θ, то полагаем коэффициенты при производных равными нулю. В результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений на функции ξ_i, η_i. Решая эту систему, получаем искомые операторы вида (7).

Имеет место теорема.

Теорема. Система уравнений (4) при $\alpha^2 \neq 1$ допускает бесконечную алгебру Ли, которая порождается операторами

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial\sigma},$$

$$X_+ = x_0(\sigma,\theta)\frac{\partial}{\partial x} + y_0(\sigma,\theta)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{8}$$

где (x_0, y_0) – произвольное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_0}{\partial\theta} - 2\left(-\alpha\dfrac{\partial y_0}{\partial\sigma}\cos 2\theta + \dfrac{\partial x_0}{\partial\sigma}\sin 2\theta\right) = 0, \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial\theta} - 2\left(\dfrac{\partial y_0}{\partial\sigma}\sin 2\theta + \alpha\dfrac{\partial x_0}{\partial\sigma}\cos 2\theta\right) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Замечание. Если $\alpha^2 = 1$, то система уравнений (4) допускает еще два оператора [2]:

$$X_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$X_4 = \xi_1\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2\frac{\partial}{\partial y} + 4\theta\frac{\partial}{\partial\sigma} - \sigma\frac{\partial}{\partial\theta},$$

где

$$\xi_1 = x\cos 2\theta + y\sin 2\theta + y\sigma,$$
$$\xi_2 = x\sin 2\theta - y\cos 2\theta - x\sigma.$$

Оператору X_1 соответствует группа однопараметрических преобразований, допускаемых системой (4):

$$x' = x\exp\alpha_1, \quad y' = y\exp\alpha_1,$$

где α_1 – групповой параметр.

Оператору X_2 соответствует группа однопараметрических преобразований

$$\sigma' = \sigma + \alpha_2.$$

Оператору X_+ соответствуют преобразования вида $x' = x + \alpha x_0(\sigma,\theta)$, $y' = y + \alpha y_0(\sigma,\theta)$, где (x_0, y_0) – произвольное решение системы (9).

3. Построим некоторые инвариантные решения системы (4).

Аналог решения Прандтля. Это решение инвариантно относительно преобразований, порождаемых оператором

$$X = \frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial}{\partial x}.$$

Решение уравнений (4) следует искать в виде

$$\sigma = -x + f(y), \quad \theta = g(y), \tag{10}$$

где функции *f*, *g* определяются из (4) после подстановки туда соотношений (10). Имеем

$$\begin{cases} \sigma = -x + 2\alpha\sqrt{1-y^2}, \\ y = \cos 2\theta. \end{cases} \tag{11}$$

Найдем линии скольжения (характеристики) решения (11).

Для этого продифференцируем соотношение $y = \cos\theta$ по *x*. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = -2\cos 2\theta\frac{d\theta}{dx} = \frac{-\alpha\cos 2\theta \pm \sqrt{\alpha^2\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}}{\sin 2\theta}.$$

Разделяя в этом уравнении переменные, после несложных преобразований получаем

$$\left(-\alpha\cos 2\theta \pm \sqrt{\alpha^2\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}\right)d2\theta = dx,$$

Или, если $|\alpha| > 1$, то

$$-2\sin 2\theta \pm \frac{1}{\alpha}\int_{\theta}^{2\theta}\sqrt{1-\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)\sin^2 z dz} = x + c,$$

или

$$-2\sin 2\theta \pm \frac{1}{\alpha}E\left(2\theta, \left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\right)\right) = x + c, \tag{12}$$

где $E(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл второго рода.

Если $|\alpha| < 1$, то из соотношения

$$-2\sin 2\theta \pm \frac{1}{\alpha}\int_{\theta}^{2\theta}\sqrt{1+\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right)\sin^2 z dz} = x + c,$$

получаем

$$-2\sin 2\theta \pm \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{1+\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}}E\left(2\theta\frac{\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}}}{\sqrt{1+\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sqrt{1+\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} + \sin^2 2\theta}}\right] = x + c,$$

или

$$-2\sin 2\theta \pm \frac{1}{|\alpha|}\left[\frac{1}{|\alpha|}E\left(2\theta\sqrt{1-\alpha^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sqrt{1+\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} + \sin^2 2\theta}}\right] = x + c. \tag{13}$$

Если $\alpha = 1$, то получаем известную формулу $x = \pm 2\theta - \sin 2\theta + c$.

Аналог решения Надаи. Это решение инвариантное относительно группы, порожденной подалгеброй

$$x = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial\sigma}.$$

Решение следует искать в виде

$$\sigma = \omega \ln x + f\left(y/x\right),$$
$$\theta = g\left(y/x\right),\ y/x = z. \qquad (14)$$

Для простоты рассмотрим случай $\omega = 0$. Подставим (14) в систему уравнений (4). Имеем

$$zf' + 2g'(-\alpha z\cos 2g + \sin 2g) = 0,$$
$$f' + 2g'(z\sin 2g + \alpha\cos 2g) = 0. \quad (15)$$

Система уравнений (15) имеет нетривиальное решение, если

$$\left(z^2 - 1\right)\sin 2g + 2\alpha z\cos 2g = 0$$

или

$$\operatorname{tg} 2g = \frac{2\alpha z}{1 - z^2}. \qquad (16)$$

Дифференцируя (16) по переменной z, получим

$$\frac{2g'}{\cos^2 2g} = \frac{2\alpha(1+z^2)}{(1-z^2)^2}. \qquad (17)$$

Поскольку

$$\cos^2 2g = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2g} = \frac{\left(1-z^2\right)^2}{1+4\alpha^2 z^2},$$

то, подставляя это соотношение в (17) и во второе уравнение (15), имеем

$$f' = -\frac{2\alpha\left(1+z^2\right)}{1+4\alpha^2 z^2}\left(z\sin 2g + \alpha\cos 2g\right).$$

Имеем

$$\sin^2 2g = 1 - \cos^2 2g = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2g} = \frac{\operatorname{tg}^2 2g}{1+\operatorname{tg}^2 2g};$$

$$\sin 2g = \frac{\operatorname{tg} 2g}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2g}};$$

$$\sin 2g = \frac{\dfrac{2\alpha z}{1-z^2}}{\sqrt{\dfrac{\left(1-z^2\right)^2}{1+4\alpha^{2z^2}}}} = \frac{2\alpha z}{\sqrt{1+4\alpha^2 z^2}},$$

поэтому

$$f = -2\alpha\int\frac{\left(1+z^2\right)}{1+4\alpha^2 z^2}\left(z\cdot\frac{2\alpha z}{\sqrt{1+4\alpha^2 z^2}} + \alpha\frac{1-z^2}{\sqrt{1+4\alpha^2 z^2}}\right)dz.$$

Найдем характеристики этого решения. Имеем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{-2\cos 2\theta \pm \sqrt{\alpha^2\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}}{\sin 2\theta} =$$

$$= \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \operatorname{tg}^2 2\theta}}{\operatorname{tg} 2\theta} =$$

$$= \frac{-\alpha\left(1-z^2\right) \pm \sqrt{\alpha^2\left(1-z^2\right)^2 + 4\alpha^2 z^2}}{2\alpha z} =$$

$$= \frac{-\left(1-z^2\right) \pm \sqrt{\left(1+z^2\right)^2}}{2z} = \frac{-\left(1-z^2\right) \pm \left(1+z^2\right)}{2z},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{z^2 - 1 \pm \left(1+z^2\right)}{2z} = \begin{cases} z \\ -1/z. \end{cases} \qquad (18)$$

Интегрируя уравнения (18), получаем два семейства характеристик: $y/x = \text{const}$, $x^2 + y^2 = \text{const}$.

4. Для построения других новых решений уравнений (4) и их характеристик следует построить некоторые решения уравнений (9). Решение уравнений (9) можно искать в виде

$$x_0 = \beta\sigma + A(\theta),$$
$$y_0 = B(\theta); \qquad (19)$$
$$x_0 = A(\theta)\exp\sigma,$$
$$y_0 = B(\theta)\exp\sigma, \qquad (20)$$
$$x_0 = A(\theta)\sin\sigma + B(\theta)\cos\sigma, \qquad (21)$$
$$y_0 = a(\theta)\sin\sigma + b(\theta)\cos\sigma;$$
$$x_0 = A(\theta)\operatorname{sh}\sigma + B(\theta)\operatorname{ch}\sigma, \qquad (22)$$
$$y_0 = a(\theta)\operatorname{sh}\sigma + b(\theta)\operatorname{ch}\sigma,$$

где $a(\theta), b(\theta), A(\theta), B(\theta) -$ искомые функции; $\beta = \text{const}$.

После подстановки этих соотношений в уравнения (9) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждое из таких решений дает бесконечную серию решений системы (9).

Лемма. Решение вида

$$x = \beta\sigma + A(\theta),$$
$$y_0 = B(\theta)$$

порождает бесконечную серию решений систем уравнений (9), а, следовательно, и бесконечную серию точных решений уравнений пластичности.

Доказательство

Подставляя (19) в (9), без труда получаем

$$x_0 = -\sigma - 2\sin 2\theta,\quad y_0 = \cos 2\theta.$$

Это значит, что система (4) допускает оператор вида $X = x_0\partial_x + y_0\partial_y$.

Будем искать инвариантное решение системы (9) на подалгебре

$$X = \partial_\sigma - (\sigma + 2\sin 2\theta)\partial_x + \cos 2\theta\partial y.$$

Оно имеет вид

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}\sigma^2 - 2\sigma\alpha\sin 2\theta + f(\theta),$$
$$y_1 = \sigma\cos 2\theta + g(\theta).$$

Подставляя эти соотношения в (9), имеем

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}\sigma^2 - 2\sigma\alpha\sin 2\theta + c_1,$$
$$y_1 = \sigma\cos 2\theta - 2\alpha\theta.$$

Это и есть неявное решение системы уравнений (4).

Поскольку система (9) допускает оператор $X = x_1\partial_x + y_1\partial y,$ то ее инвариантное решение можно искать на подалгебре

$$X = \partial_\sigma - (\tfrac{1}{2}\sigma^2 + 2\sigma\sin 2\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (\sigma\cos 2\theta - 2\alpha\theta)\partial y.$$

Оно имеет вид

$$x_2 = -\tfrac{1}{2}\sigma^3 - \tfrac{1}{2}\sigma^2\alpha\sin 2\theta + f(\theta),$$
$$y_2 = -\tfrac{1}{2}\sigma^2\cos 2\theta - 2\alpha\theta\sigma + g(\theta).$$

Подставляя (x_2, y_2) в уравнения (9), найдем $f, g,$ а, следовательно, еще одно неявное решение уравнений (4). Действуя таким же образом, мы сможем построить бесконечную серию решений как уравнений (9), так и уравнений (4).

Аналогичная ситуация имеет место и с другими решениями из (20).

Замечание. Решения $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ порождают точечные симметрии, действуя которыми на решение Прандтля и его характеристики получаем еще бесконечные серии решений.

Этот способ построения решений будет описан в следующих статьях.

Библиографические ссылки

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. : Гостехтеоретиздат, 1954.

2. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, 2001.

S. I. Senashov, E. V. Filyushina, A. M. Popov, I. V. Kovalev

SOME EXACT SOLUTIONS OF EQUATIONS OF THE ANISOTROPIC THEORY OF PLASTICITY

With the help of a group of continuous transformations accepted by the system of equations of anisotropic plasticity in bivariate case there were found some new exact solutions, which are analogues of exact solutions in the isotropic case.

Keywords: anisotropic theory of plasticity, group of continuous transformations, the Lie algebra.

УДК 681.324

Н. Г. Треногин, Е. А. Веловатый, М. Н. Петров

ОПИСАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ АРХИТЕКТУРЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЕМ СВЯЗИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕНЗОРНОЙ МЕТОДОЛОГИИ АНАЛИЗА СИСТЕМ

Рассмотрен вопрос применения тензорного анализа для описания архитектуры управления предприятием телекоммуникационной отрасли.

Ключевые слова: управление, телекоммуникации, архитектура, предприятие.

Работу современного крупного предприятия всегда сопровождает набор необходимых для осуществления бизнес-деятельности информационных систем: система управления предприятием, система биллинга (для предприятий связи), система электронного документооборота и т. д.

Современные информационные системы в своей работе опираются не только на безупречно спроектированную техническую архитектуру или правильно выбранную систему баз данных, а зачастую обеспечивают стабильную работу за счет сочетания многих параметров. Принято говорить об «интегральном» подходе к обеспечению необходимых характеристик быстродействия и надежности систем.

С 2009 г. на предприятии связи макрорегионального филиала «Сибирь» ОАО «Ростелеком» эксплуатируется система управления предприятием на базе Oracle E-Business Suite.

В данной работе рассмотрен подход к оценке и повышению быстродействия системы управления предприятием. Для описания технической архитектуры системы управления предприятием предлагается ис-