УДК 519.6

Г. И. Щепановская

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА*

Предлагается алгоритм численного решения модифицированных уравнений Навье–Стокса для одномерного движения вязкого теплопроводного газа. Проведены тестовые расчеты. Реализована задача о распространении теплового импульса в газе. Апробированная компьютерная модель используется для изучения одномерных геодинамических процессов.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, вязкий теплопроводный газ, численное моделирование, метод траекторий, метод конечных элементов.

Система нестационарных одномерных уравнений Навье–Стокса для вязкого теплопроводного газа включает три дифференциальных уравнения в частных производных, вытекающих из законов сохранения массы, количества движения и внутренней энергии газа. Предложенная в работе замена искомых функций в уравнениях неразрывности и внутренней энергии переводит закон сохранения массы и полной энергии из нормы пространства L_1 в норму гильбертова пространства L_2. Впоследствии это значительно упрощает обоснование устойчивости и сходимости [1]. Дискретизация по пространству модифицированных уравнений Навье–Стокса осуществляется методом конечных элементов.

Для аппроксимации полной производной по времени каждого уравнения системы используется метод траекторий, который заключается в аппроксимации субстанциональной производной с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы. Метод траекторий впервые появился в работах французских и американских ученых для аппроксимации уравнений Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости с первым порядком аппроксимации. Наибольшее теоретическое и практическое развитие метод получил для одного уравнения переноса массы [2]. Для решения систем алгебраических уравнений используется многосеточный метод с внешними итерациями по нелинейности.

Модификация уравнений Навье–Стокса обеспечивает повышение точности приближенного решения. Как следует из тестовых расчетов, абсолютная погрешность приближенного решения уменьшается в разы по сравнению с аналогичной погрешностью для немодифицированных уравнений, при этом разностная схема остается первого порядка. Применение комбинации метода траекторий и метода конечных элементов позволяет построить экономичный алгоритм с вычислительной точки зрения.

Математическая модель. Выпишем дифференциальные уравнения одномерного вязкого теплопроводного газа в виде безразмерных уравнений неразрывности, количества движения и уравнения для внутренней энергии:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\rho\frac{de}{dt} + P\frac{\partial u}{\partial x} = Q_t - \frac{\partial q_x}{\partial x} + \Phi, \tag{3}$$

$$P = P(\rho, e),\ \ \mu = \mu(\rho, e), \tag{4}$$

где ρ – плотность; u – проекция вектора скорости на ось x; P – давление; μ – динамический коэффициент вязкости; e – внутренняя энергия; Q – внешний поток тепла от внешних источников; тензор напряжений τ_{xx}, проекция теплового потока q_x и диссипативная функция Φ выражаются следующим образом:

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad q_x = -\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}\mu\frac{\partial e}{\partial x}, \quad \Phi = \frac{4}{3}\frac{1}{\mathrm{Re}}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \tag{5}$$

где Re – число Рейнольдса, Pr – число Прандтля, $\gamma = 1,4$.

Редукция уравнений. Преобразуем уравнения (1) и (3) к новому виду. Для этого, учитывая неотрицательность плотности и внутренней энергии, введем следующие функции:

$$\rho = \sigma^2, \tag{6}$$

$$e = \varepsilon^2. \tag{7}$$

Подставим (6) в уравнение неразрывности (1) и получим

$$\frac{d(\sigma^2)}{dt} + \sigma^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Дифференцируя по t, имеем

$$2\sigma\frac{d\sigma}{dt} + \sigma^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Далее, сокращая последнее уравнение на 2σ, получим

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2}\sigma\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00224), проект № 89 СО РАН.

Проделаем аналогичную процедуру для уравнения внутренней энергии (3), т. е. преобразуем уравнение (3) к новому виду с учетом (7). Для этого подставим выражение (7) в (3), в результате получим

$$\rho\frac{d(\varepsilon^2)}{dt}+\frac{\partial q_x}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial t}-P\frac{\partial u}{\partial x}+\Phi. \qquad (10)$$

Преобразуем (10) следующим образом:

$$\rho 2\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{\partial q_x}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial t}-P\frac{\partial u}{\partial x}+\Phi. \qquad (11)$$

Далее сократим последнее уравнение на 2ε и получим

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial q_x}{\partial x}=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{P}{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2\varepsilon}\Phi. \qquad (12)$$

Подставим (7) в выражение для теплового потока q_x из (5) и возьмем производную по x, получим

$$q_x=-\frac{2\gamma}{\mathrm{PrRe}}\mu\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial x},$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}=-\frac{2\gamma}{\mathrm{PrRe}}\left(\mu\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)\right). \qquad (13)$$

С учетом (13) и выражения для диссипативной функции Φ из (5) уравнение (12) примет вид

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{\gamma}{\mathrm{PrRe}}\left[\frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon}Q_t-\frac{P}{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{3\mathrm{Re}}\frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \qquad (14)$$

Замечание. Обратим внимание на появившиеся множители μ/ε и P/ε в уравнении (14), которые, как показывают расчеты, являются естественными «регуляризаторами». Например, для совершенного газа уравнение состояния (4) запишется как

$$P=\rho(\gamma-1)e \quad \text{или} \quad P=\sigma^2(\gamma-1)\varepsilon^2. \qquad (15)$$

Поскольку внутренняя энергия всегда положительна и больше единицы по отношению к ее величине на бесконечности, то множитель $1/\varepsilon$ «гасит» растущее как ε^2 давление. Аналогичны рассуждения относительно μ/ε. Для совершенного газа, как следует из формулы Сазерленда, динамический коэффициент вязкости является степенной функцией от внутренней энергии.

Будем решать систему уравнений, преобразованную к следующему виду:

$$\frac{d\sigma}{dt}+\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (16)$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}, \qquad (17)$$

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{\gamma}{\mathrm{PrRe}}\left[\frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon}Q_t-\frac{P}{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{3\mathrm{Re}}\frac{\mu}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \qquad (18)$$

Замыкают систему уравнений (16)–(18) алгебраические соотношения для давления и динамического коэффициента вязкости совершенного газа

$$P=P(\sigma,\varepsilon), \quad \mu=\mu(\sigma,\varepsilon). \qquad (19)$$

Дискретизация. В качестве расчетной области возьмем единичный отрезок $\overline{\Omega}=[0,1]$ с границей Γ, состоящей из концов отрезка. Введем равномерную сетку $x_i=ih,\ i=0,1,\dots,n$ с шагом $h=1/n\,(n\geq 2)$.

Обозначим множество узлов области $\overline{\Omega}$:

$$\overline{\Omega}_h=\{S_i=(x_i),\ \ i=0,1,\dots,n\},$$

введем множество внутренних узлов

$$\Omega_h=\{S_i=(x_i),\ \ i=1,\dots,n-1\}$$

и два граничных узла

$$\Gamma_h=\{S_i=(x_i),\ \ i=0,n\}.$$

В результате расчетная область $\overline{\Omega}$ разбилась на n интервалов.

Для каждого узла $S_i\in\overline{\Omega}_h$ введем базисную функцию $\varphi_i(x)$:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\left(1-|x_i-x|\right), & x\in[x_{i-1},x_{i+1}],\\ 0, & x\in(x_{i-1},x_{i+1}),\end{cases} \qquad (20)$$

которая равна единице в S_i и равна нулю во всех остальных узлах $\overline{\Omega}$.

Будем искать приближенное решение в виде

$$\sigma^h(t,x)=\sum_{i=0}^{n}\sigma_i(t)\varphi_i(x), \qquad (21)$$

$$u^h(t,x)=\sum_{i=0}^{n}u_i(t)\varphi_i(x), \qquad (22)$$

$$\varepsilon^h(t,x)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i(t)\varphi_i(x). \qquad (23)$$

После дискретизации по пространству уравнения (16) получаем дискретный аналог уравнения неразрывности:

$$\frac{d\sigma_l}{dt}+\frac{1}{4h}\sigma_l(u_{l+1}-u_{l-1})=0,$$
$$l=1,\dots,n-1. \qquad (24)$$

Дискретный аналог уравнения количества движения (17) принимает следующий вид:

$$\rho_l\frac{du_l}{dt}+\frac{2}{3h^2}\frac{1}{\mathrm{Re}}((u_l-u_{l-1})(\mu_{l-1}+\mu_l)-$$
$$-(u_{l+1}-u_l)(\mu_l+\mu_{l+1}))= \qquad (25)$$
$$=\frac{1}{2h}(P_{l-1}-P_{l+1}), \qquad l=1,\dots,n-1.$$

По аналогии с предыдущим уравнением выпишем дискретный аналог уравнения энергии (18) в следующем виде:

$$\rho_l \frac{d\varepsilon_l}{dt} - \frac{1}{2h^2}\frac{\gamma}{\text{PrRe}}\frac{\mu_l}{\varepsilon_l}((\varepsilon_{l+1}-\varepsilon_l)^2 + (\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1})^2) +$$
$$+\frac{1}{2h^2}\frac{\gamma}{\text{PrRe}}((\varepsilon_l - \varepsilon_{l-1})(\mu_{l-1}+\mu_l) - (\varepsilon_{l+1}-\varepsilon_l)(\mu_l + \mu_{l+1})) =$$
$$-\frac{1}{4h}\frac{P_l}{\varepsilon_l}(u_{l+1}-u_{l-1}) + \frac{1}{3h^2}\frac{1}{\text{Re}}\frac{\mu_l}{\varepsilon_l}((u_{l+1}-u_l)^2 + (u_l - u_{l-1})^2),$$
$$l = 1, ..., n-1. \qquad (26)$$

Метод траекторий. Введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau = t_{\text{fin}} / m$:

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, \qquad k = 0, ..., m\}.$$

Производную по времени (субстанциональная) в уравнении (24) аппроксимируем с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы следующим образом [2]:

$$\frac{d\sigma_l}{dt} \approx \frac{\sigma^{k+1}(x_l) - \sigma^k(X_l^k)}{\tau}, \qquad (27)$$

где X_l^k – решение при $t^* = k\tau$ уравнения

$$\frac{dX}{dt^*} = u(t^*, X), \qquad X((k+1)\tau) = x_l. \qquad (28)$$

Для численного решения уравнения (28) применим метод Эйлера, вычисление производится с $(k+1)$-го шага назад по времени. Полагая, что частица в промежутке времени (t_k, t_{k+1}) движется равномерно, получаем

$$X_l^k = x_l - u(t^*, x_l)\,\tau. \qquad (29)$$

Обозначим $u(t^*, x_l) = u_l^k$. Значение $\sigma^k(X_l^k)$ определяется путем линейной интерполяции.

При $u_l^k > 0$

$$\sigma^k(X_l^k) = \sigma^k(x_l) + (X_l^k - x_l)\frac{\sigma^k(x_l) - \sigma^k(x_{l-1})}{x_l - x_{l-1}}. \qquad (30)$$

При $u_l^k < 0$

$$\sigma^k(X_l^k) = \sigma^k(x_l) + (X_l^k - x_l)\frac{\sigma^k(x_{l+1}) - \sigma^k(x_l)}{x_{l+1} - x_l}. \qquad (31)$$

Производную по времени в уравнениях (25) и (26) аппроксимируем аналогично разностной производной (27), в результате получим

$$\rho_l \frac{du_l}{dt} \approx \rho_l^{k+1}\frac{u^{k+1}(x_l) - u^k(X_l^k)}{\tau}, \qquad (32)$$

$$\rho_l \frac{d\varepsilon_l}{dt} \approx \rho_l^{k+1}\frac{\varepsilon^{k+1}(x_l) - \varepsilon^k(X_l^k)}{\tau}. \qquad (33)$$

Значения $u^k(X_l^k)$ и $\varepsilon^k(X_l^k)$ вычисляются путем линейной интерполяции, аналогично $\sigma^k(X_l^k)$.

Системы алгебраических уравнений. После аппроксимации производной по времени в дискретных аналогах (24)–(26) получаем системы квазилинейных алгебраических уравнений. С учетом обозначений $\sigma^{k+1}(x_l) = \sigma_l^{k+1}$, $u^{k+1}(x_l) = u_l^{k+1}$ и $\varepsilon^{k+1}(x_l) = \varepsilon_l^{k+1}$ выпишем каждую систему.

Для уравнения переноса массы система алгебраических уравнений относительно неизвестных σ^{k+1} имеет вид

$$\left(\frac{h}{\tau} + \frac{1}{4}(u_{l+1}^k - u_{l-1}^k)\right)\sigma_l^{k+1} = \frac{h}{\tau}\sigma^k(X_l^k), \qquad (34)$$
$$l = 1, ..., n-1.$$

Для уравнения количества движения система алгебраических уравнений относительно неизвестных в узлах разбиения u^{k+1} имеет вид

$$\left[-\frac{2}{3h^2}\frac{1}{\text{Re}}(\mu_{l-1}^k + \mu_l^k)\right]u_{l-1}^{k+1} +$$
$$+\left[\frac{\rho_l^{k+1}}{\tau} + \frac{2}{3h^2}\frac{1}{\text{Re}}(\mu_{l-1}^k + 2\mu_l^k + \mu_{l+1}^k)\right]u_l^{k+1} +$$
$$+\left[-\frac{2}{3h^2}\frac{1}{\text{Re}}(\mu_l^k + \mu_{l+1}^k)\right]u_{l+1}^{k+1} = \qquad (35)$$
$$= \frac{\rho_l^{k+1}}{\tau}u^k(X_l^k) + \frac{1}{2h}(P_{l-1}^k - P_{l+1}^k), \qquad l = 1, ..., n-1.$$

Система квазилинейных алгебраических уравнений, соответствующая уравнению внутренней энергии, выглядит следующим образом:

$$\left[\frac{1}{2h^2}\frac{\gamma}{\text{PrRe}}\frac{\mu_l^k}{\varepsilon_l^k}(\varepsilon_l^k - \varepsilon_{l-1}^k) - \frac{1}{2h^2}\frac{\gamma}{\text{PrRe}}(\mu_{l-1}^k + \mu_l^k)\right]\varepsilon_{l-1}^{k+1} +$$
$$+\left[\frac{\rho_l^{k+1}}{\tau} - \frac{1}{2h^2}\frac{\gamma}{\text{PrRe}}\frac{\mu_l^k}{\varepsilon_l^k}(2\varepsilon_l^k - \varepsilon_{l+1}^k - \varepsilon_{l-1}^k) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2h^2}\frac{\gamma}{\text{PrRe}}(2\mu_l^k + \mu_{l+1}^k + \mu_{l-1}^k)\right]\varepsilon_l^{k+1} + \qquad (36)$$
$$+\left[-\frac{1}{2h^2}\frac{\gamma}{\text{PrRe}}\frac{\mu_l^k}{\varepsilon_l^k}(\varepsilon_{l+1}^k - \varepsilon_l^k) - \frac{1}{2h^2}\frac{\gamma}{\text{PrRe}}(\mu_l^k + \mu_{l+1}^k)\right]\varepsilon_{l+1}^{k+1} =$$
$$= \frac{\rho_l^{k+1}}{\tau}\varepsilon^k(X_l^k) - \frac{1}{4h}\frac{P_l^k}{\varepsilon_l^k}(u_{l+1}^{k+1} - u_{l-1}^{k+1}) +$$
$$+ \frac{1}{3h^2}\frac{1}{\text{Re}}\frac{\mu_l^k}{\varepsilon_l^k}[(u_{l+1}^{k+1} - u_l^{k+1})^2 + (u_l^{k+1} - u_{l-1}^{k+1})^2],$$
$$l = 1, ..., n-1.$$

Таким образом, получена консервативная вариационно-разностная схема первого порядка аппроксимации.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей используется метод немонотонной прогонки, который отличается высокой вычислительной устойчивостью [3].

Тестовые расчеты. Для тестирования полученной математической модели функции u, σ, ε задаются следующим явным образом:

$$u(x,t) = x(x-1)^2\,t,$$

$$\sigma(x,t) = x(x-1)^2\, t + 1, \qquad (37)$$
$$\varepsilon(x,t) = x(x-1)^2\, t + 1.$$

При подстановке функций (37) в исходные уравнения и модифицированные уравнения получаются соответственно правые части f_ρ, f_σ, f_u, f_e и f_ε, которые учитываются в системах уравнений при их численном решении. Нормы погрешности в пространстве L_2 и L_∞ определяются следующим образом:

$$\|\delta a\|_{2,h} = \left(\int (\delta a)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta a = \left|a_i^* - a_i^h\right|,$$

$$\int (\delta a)^2\, dx = \frac{h}{2}\left(\left|a_0^* - a_0^h\right|^2 + \left|a_n^* - a_n^h\right|^2\right) + h\sum_{i=1}^{n-1}\left|a_i^* - a_i^h\right|^2,$$

$$\|\delta a\|_{\infty,h} = \max_i \left|a_i^* - a_i^h\right|.$$

Для $\|\delta\sigma\|_{\infty,h}$ и $\|\delta\rho\|_{\infty,h}$ можно получить соотношение

$$\|\delta\rho\|_{\infty,h} = \|\delta\sigma\|_{\infty,h} \max_i \left|\sigma_i^* + \sigma_i^h\right|.$$

Норму $\|\delta\rho\|_{2,h}$ можно выразить через $\|\delta\sigma_i\|_{\infty,h}$ следующим образом:

$$\|\delta\rho\|_{2,h} = \left(\frac{h}{2}\left(\|\delta\rho\|^2_{\infty,h} + \|\delta\rho_n\|^2_{\infty,h}\right) + h\sum_{i=1}^{n-1}\|\delta\rho_i\|^2_{\infty,h}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\delta\rho\|_{2,h} = \left(\frac{h}{2}\left[\left(\|\delta\sigma_0\|_{\infty,h}\left|\sigma_0^* + \sigma_0^h\right|\right)^2 + \left(\|\delta\sigma_n\|_{\infty,h}\left|\sigma_n^* + \sigma_n^h\right|\right)^2\right] + h\sum_{i=1}^{n-1}\left(\|\delta\sigma_i\|_{\infty,h}\left|\sigma_i^* + \sigma_i^h\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нормы погрешностей в табл. 1 и 2 приведены для шага по времени $\tau = 0{,}000\,1$ в момент времени $t = k\tau$ $(k = 1\,000)$.

Задача о распространении теплового импульса. При решении модельной задачи тепловой импульс задается в окрестности центра расчетной области, газодинамическая постоянная γ, число Рейнольдса Re, число Прандтля Pr, число Маха M_∞ и ω имеют следующие значения: $\gamma = 1{,}4$, $\mathrm{Re} = 2\cdot 10^3$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\mathrm{M}_\infty = 4$, $\omega = 0{,}8$ [4–6]. Температура T определяется из следующего уравнения состояния:

$$T = \frac{\gamma \mathrm{M}_\infty^2 P}{\rho}. \qquad (38$$

В качестве начальных условий задаются условия затухания возмущений в бесконечном удалении от источника. Условия на границе для плотности, скорости и энергии следующие: $\rho|_{x=0} = \rho|_{x=1} = 1$, $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$, $e|_{x=0} = e|_{x=1} = 1$).

Графики распределения плотности, температуры, скорости и давления газа при $h = 0{,}002\,(n = 500)$, $\tau = 0{,}000\,1$ представлены на рис. 1–4. Кривые, обозначенные на рисунках как 1, 2, 3, 4, соответствуют расчетным моментам безразмерного времени $t = 0{,}01;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}2$.

Таблица 1

h	0,05	0,04	0,025	0,02	0,0125	0,01
$\|\delta\sigma\|_{2,h}$	0,000 044 1	0,000 031 9	0,000 016 1	0,000 011 7	0,000 006 1	0,000 004 6
$\|\delta\rho\|_{2,h}$	0,000 088 2	0,000 063 7	0,000 032 1	0,000 023 3	0,000 012 2	0,000 009 2
$\|\delta\varepsilon\|_{2,h}$	0,000 033 8	0,000 027 8	0,000 019 6	0,000 017 2	0,000 014 2	0,000 013 3
$\|\delta e\|_{2,h}$	0,000 067 2	0,000 055 1	0,000 038 8	0,000 034 1	0,000 028 0	0,000 026 4
$\|\delta u\|_{2,h}$	0,000 145 0	0,000 106 5	0,000 057 5	0,000 044 1	0,000 027 5	0,000 023 0

Таблица 2

h	0,05	0,04	0,025	0,02	0,0125	0,01
$\|\delta\sigma\|_{\infty,h}$	0,000 248 2	0,000 200 6	0,000 128 2	0,000 103 8	0,000 067 0	0,000 054 6
$\|\delta\rho\|_{\infty,h}$	0,000 495 9	0,000 400 7	0,000 256 0	0,000 207 3	0,000 133 8	0,000 109 1
$\|\delta\varepsilon\|_{\infty,h}$	0,000 211 9	0,000 192 9	0,000 164 1	0,000 154 4	0,000 139 7	0,000 134 8
$\|\delta e\|_{\infty,h}$	0,000 420 6	0,000 382 6	0,000 324 9	0,000 305 4	0,000 276 0	0,000 266 2
$\|\delta u\|_{\infty,h}$	0,000 839 1	0,000 692 0	0,000 469 2	0,000 394 5	0,000 281 9	0,000 244 2

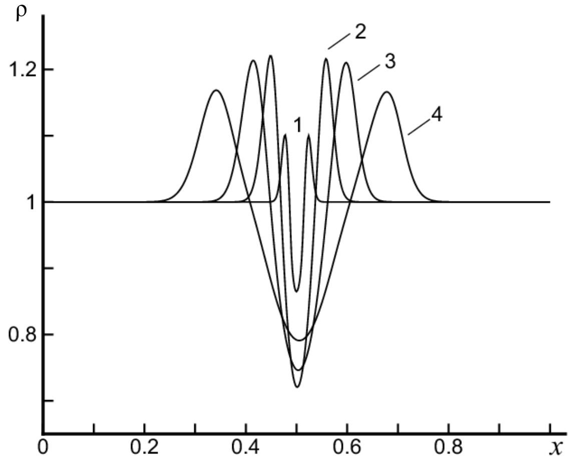

Рис. 1

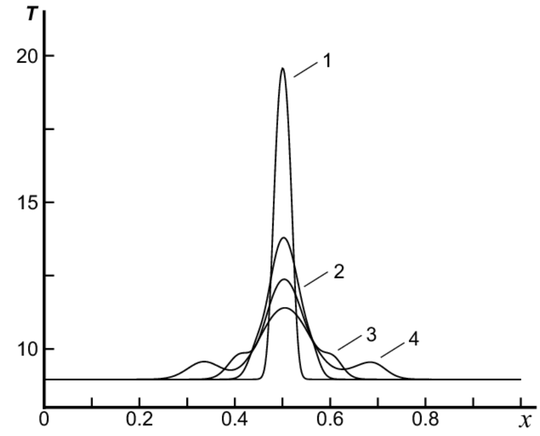

Рис. 2

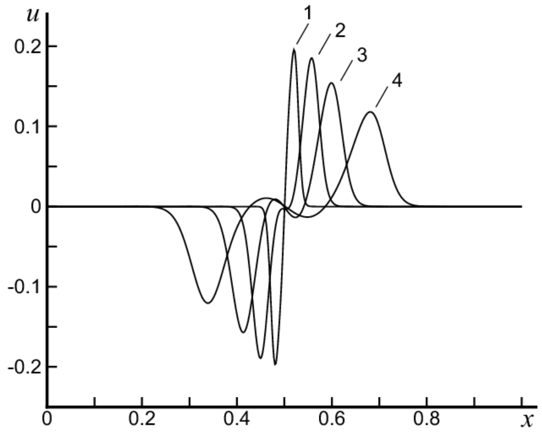

Рис. 3

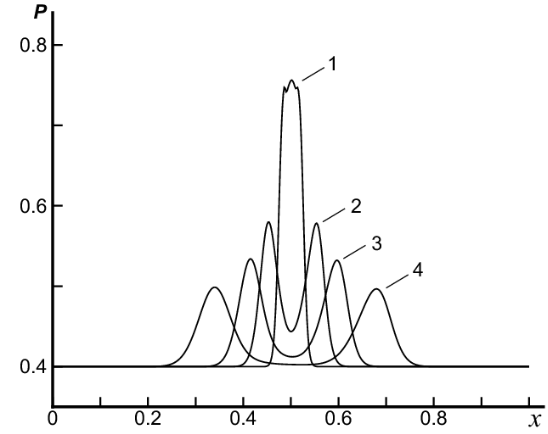

Рис. 4

В заключение следует отметить, что полученные системы уравнений удовлетворяют законам сохранения массы и полной энергии на дискретном уровне, обеспечивая устойчивость дискретного решения по времени. Замена искомых функций в уравнениях неразрывности и внутренней энергии обеспечивает повышение точности приближенного решения и приводит к меньшей абсолютной погрешности в норме L_2 и L_∞. Применение комбинации метода траекторий и метода конечных элементов не требует согласования триангуляций на соседних временных слоях, что значительно облегчает динамическое разрежение или сгущение триангуляций по времени для оптимизации вычислительной работы или улучшения аппроксимации в пограничных слоях и ударных волнах. Для решения систем алгебраических уравнений используется многосеточный метод с внешними итерациями по нелинейности. Совокупность методов позволяет построить экономичный алгоритм с вычислительной точки зрения.

Библиографические ссылки

1. Ушакова О. А., Шайдуров В. В, Щепановская Г. И. Метод конечных элементов для уравнений Навье–Стокса в сферической системе координат // Вестник КрасГУ. 2006. № 4. С. 151–156.

2. Pironneau O. On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations // Numerische Mathematik. 1982. № 38. P. 309–332.

3. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М. : Наука, 1978.

4. Шайдуров В. В., Щепановская Г. И., Якубович М. В. Одномерная модель динамики вязкого теплопроводного газа // Материалы XIV Междунар. науч. конф. «Решетневские чтения». Красноярск, 2010. С. 440–441.

5. Шайдуров В. В, Щепановская Г. И. Газодинамическая модель внутреннего строения Земли // Вестник СибГАУ. 2008. № 1. 79–83.

6. Vyatkin A. V., Shaidurov V. V., Shchepanovskaya G. I. Numerical Spherically-Symmetric Simulation of Deep-Seated Geodynamics // J. of Applied and Industrial Mathematics. 2010. Vol. 4. № 2. P. 290–297.

7. Шайдуров В. В., Щепановская Г. И., Якубович М. В. Применение метода траекторий и метода конечных элементов в моделировании движения вязкого теплопроводного газа // Вычислит. методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 275–281.

G. I. Shchepanovskaya

MATHEMATICAL AND NUMERICAL MODELLING OF CURRENTS OF VISCOUS THERMALLY CONDUCTIVE GAS

In the work the author offers an algorithm of the numerical decision of the modified equations of Nave-Stoksa for one-dimensional movement of viscous thermally conductive gas. Test calculations are carried out. The task of distribution of a thermal impulse in gas is realized. The approved computer model is used for studying of one-dimensional geodynamic processes.

Keywords: equations of Nave-Stoksa, viscous thermally conductive gas, numerical modeling, a method of trajectories, a method of final elements.