граммным комплексом для любого версионного состава.

4. Предложен и программно реализован алгоритм мультиверсионного формирования программно-информационных технологий с гарантированной доступностью ресурсов.

Библиографические ссылки

1. Антамошкин А. Н., Ковалев И. В. Определение оптимальной структуры мультиверсионного программного обеспечения при ограничениях по времени и стоимости // Вестник Сиб. аэрокосмич. акад. 2000. Вып. 1. С. 111–124.

2. Методы анализа и синтеза структур управляющих систем / Б. Г. Волик и др. ; под ред. Б. Г. Волика. М. : Энергоатомиздат, 1988.

3. Ковалев И. В. Система мультиверсионного формирования программного обеспечения управления космическими аппаратами : дис. … д-ра техн. наук. Красноярск, 1997.

4. Лебедев В. А., Трохов Н. Н., Царев Р. Ю. Параллельные процессы обработки информации в управляющих системах / НИИ СУВПТ. Красноярск, 2001.

E. L. Vaytekunene

MODEL OF RECOURSES USAGE AT MULTIVERSION FORMATION OF PROGRAM-INFORMATION TECHNOLOGIES FOR DISTRIBUTED SYSTEMS WITH THE RECOURSES RESTRICTION

The paper considers the model of recourses usage at multi-version formation of program-information technologies for distributed systems with the account of recourses base and limitations at the time of implementation.

Keywords: multi-version program complex (MPC), configuration vector of MPC.

УДК 512.54-512.55

А. П. Елисова

ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И АВТОМОРФИЗМЫ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР МАТРИЦ МАЛЫХ ПОРЯДКОВ*

Изучаются локальные дифференцирования и локальные автоморфизмы алгебры R нижних нильтреугольных (n × n)-матриц над ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей и ассоциированной с R алгебры Ли. Их описания завершаются при n = 3, а когда K – поле, также при n = 4.

Ключевые слова: алгебра нильтреугольных матриц, локальное дифференцирование, локальный автоморфизм.

Локальным дифференцированием алгебры A над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей называют эндоморфизм K-модуля A, действующий на каждый элемент α из A как дифференцирование алгебры, вообще говоря зависящее от выбора α. *Тривиальное* локальное дифференцирование дает всякое ее дифференцирование δ алгебры, т. е. эндоморфизм K-модуля A с условием $\delta(\alpha\beta) = \delta(\alpha)\beta + \alpha\delta(\beta)$ $(\alpha, \beta \in A)$. Аналогично определяют локальные автоморфизмы [1; 2].

В 2000 г. R. Crist [3] указал пример нетривиального локального автоморфизма подалгебры $\mathrm{C}(e_{12} + e_{21}) + \mathrm{C}e_{13} + \mathrm{C}e$ в $M(3, \mathrm{C})$, где e_{ij} обозначают, как обычно, матричные единицы соответствующего порядка, e – единичная матрица. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полной алгебры $M(n, \mathrm{C})$ комплексных $(n \times n)$-матриц исчерпывают ее локальные автоморфизмы [2]. Локальные автоморфизмы произвольной алгебры A образуют группу по умножению [4], обозначаемую через $\mathrm{Laut}\ A$.

Локальные дифференцирования алгебры A образуют подалгебру $\mathrm{Locder}\, A$ алгебры $\mathrm{End}(A^+)$ всех K-линейных эндоморфизмов аддитивной группы A^+.

Как показали A. Nowicki и I. Nowosad [5], локальные дифференцирования кольца $M(n, K)$ всех $(n \times n)$-матриц над коммутативным кольцом K с единицей, а также некоторых ее подколец исчерпываются ее дифференцированиями.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00968) и Министерства образования и науки (тема 1.34.11).

Пусть R есть алгебра $NT(n,K)$ нижних нильтреугольных ($n \times n$)-матриц (с нулями на главной диагонали и над ней) над K. Дифференцирования и автоморфизмы алгебры R и ассоциированной с нею алгебры Ли $\Lambda(R)$ известны [6–8]. Мы исследуем локальные дифференцирования и автоморфизмы алгебр R и $\Lambda(R)$. Описание $\mathrm{Locder}\, R$ известно при n = 3 [4] и с ограничениями на K при n = 4 [9; 10].

Исследуются локальные дифференцирования алгебры R произвольной размерности. Доказывается теорема об описании всех локальных лиевых дифференцирований алгебры R над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей при n = 3, а также в случае, когда n = 4 и K – поле. См. также [11].

Предварительные замечания и основные теоремы при $n \le 4$. Напомним, что если A – ассоциативная алгебра и $\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha (\alpha, \beta \in A)$ – ассоциированное лиево умножение, то $\Lambda(A) := (A, +, *)$ есть алгебра Ли, называемая *ассоциированной* с A. Ее (локальное) дифференцирование называют также (локальным) *лиевым* дифференцированием алгебры A.

Отметим, что дифференцирования (и автоморфизмы) характеризуются действием на порождающих элементах алгебры. С другой стороны, очевидна лемма 1.

Лемма 1. Всякое локальное дифференцирование произвольной K-алгебры A характеризуются действием на элементах, порождающих A как K-модуль. Таким образом, локальное дифференцирование нетривиально, если оно ненулевое, но является нулевым на каком-либо множестве, порождающем эту алгебру.

Очевидно, что к локальным лиевым дифференцированиям относятся все локальные дифференцирования алгебры A.

Всюду далее K есть ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, $n \ge 3$ и $R = NT(n,K)$. Очевидно, алгебру R порождают матричные единицы $e_{i+1i}, 1 \le i < n$, а все матричные единицы $e_{ij}, 1 \le j < i \le n$ порождают R как K-модуль.

Следующие две теоремы дают описания локальных лиевых дифференцирований и автоморфизмов алгебры R при n = 3 и в случае, когда K – поле и n = 4. Когда n = 4, выделим при $k \in K$ и $\gamma = \|c_{ij}\| \in M(2,K)$ эндоморфизмы K-модуля R вида

$$\alpha \to \alpha + (a_{31}c_{11} - a_{42}c_{21})e_{31} + (a_{42}c_{22} - a_{31}c_{12})e_{42} + \\ + a_{41}(c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21})e_{41}, \tag{1}$$

$$\alpha \to (a_{31}c_{11} + a_{42}c_{21})e_{31} + (a_{42}c_{22} + a_{31}c_{12})e_{42}, \tag{2}$$

$$\rho_k : \alpha \to k a_{43} e_{42} \quad (\alpha = \|a_{ij}\| \in R). \tag{3}$$

Обозначим через $\bar{\gamma}$ отображение (1) при $\gamma \in GL(2,K)$ и $2c_{11}c_{12} = 2c_{21}c_{22} = 0$, через $\hat{\gamma}$ – отображение (2) при $2c_{12} = 2c_{21} = 0$.

Теорема 1. Если n = 3, то $\mathrm{Locder}\, \Lambda(R) = \mathrm{Locder}\, R + \mathrm{Der}\, \Lambda(R)$. Когда n = 4 и K – поле, всякое локальное лиево дифференцирование алгебры R над K есть сумма локального дифференцирования алгебры R, ее лиева дифференцирования и локальных лиевых дифференцирований вида $\hat{\gamma}$ и ρ_k.

Теорема 2. Если n = 3, то $\mathrm{Laut}\, \Lambda(R) = \mathrm{Laut}\, R \cdot \mathrm{Aut}\, \Lambda(R)$. Когда n = 4 и K – поле, всякий локальный лиев автоморфизм алгебры R над K есть произведение локального автоморфизма алгебры R, ее лиева автоморфизма и локальных лиевых автоморфизмов вида $\bar{\gamma}$ и $1 + \rho_k$.

Теоремы 1 и 2 доказываются далее.

Нам потребуется описание из [7] группы $\mathrm{Der}\, R$, а также ее основных подгрупп. Для треугольной ($n \times n$)-матрицы γ над K отображение $\alpha \to \alpha * \gamma (\alpha \in R)$ дает треугольное (или диагональное, когда матрица γ диагональна) дифференцирование; при $\gamma \in R$ его называют внутренним. Заметим, что степени $R = R^1, R^2, R^3, ..., R^n = 0$ образуют центральный ряд алгебры R, причем $R^{n-1} = Ke_{n1}$ совпадает как с аннулятором, так и с центром Z алгебры R. В [7] доказана лемма 2.

Лемма 2. Аддитивная группа $\mathrm{Der}\, R$ дифференцирований алгебры R есть сумма подгрупп треугольных и центральных дифференцирований.

Известно, что центральные дифференцирования алгебры R (т. е. нулевые по модулю центра) порождаются всевозможными дифференцированиями:

$$\xi_{i,c} : \alpha \to c a_{i+1i} e_{n1} (\alpha = \|a_{km}\| \in R), 1 \le i < n, c \in K.$$

Для описания в [7] существенны следующие идеалы алгебры R и лемма о них.

Лемма 3. В алгебре R при $1 \le j < i \le n$ идеалы

$$Q_{ij} = \langle Ke_{uv} \mid 1 \le v \le j < i \le u \le n, (u,v) \ne (i,j) \rangle,$$
$$N_{ij} = Q_{ij} + Ke_{ij}$$

являются ($\mathrm{Der}\, R$)-инвариантными. Относительно $\mathrm{Der}\, \Lambda(R)$ инвариантны идеалы

$$R, R^2, ..., R^{n-1}, \quad N_{21} + N_{n3}, \quad N_{nn-1} + N_{n-21},$$
$$N_{ij} \ (j < i, i > 2, j < n-1).$$

Редукционные теоремы. Здесь $R = NT(n,K)$, $n \ge 4$. При любом $t \in K$ далее полагаем

$$\omega_t : \alpha \to t a_{31} e_{31} + t a_{42} e_{42} + ... + t a_{nn-2} e_{nn-2} \\ (\alpha = \|a_{ij}\| \in R). \tag{4}$$

Теорема 3. Всякий локальный автоморфизм алгебры R с точностью до умножения на автоморфизм тождественен на элементах $e_{ii-1}, 1 < i \le n$, а на элементы $e_{ii-2}, 2 < i \le n$ действует по модулю R^3 как $1 + \omega_t$, где $1 + t \in K^\sharp$ фиксировано.

Теорема 4. Всякое локальное дифференцирование φ алгебры R с точностью до прибавления дифференцирования является нулевым на элементах e_{ii-1},

$1 < i \leq n$, а на элементах $e_{ii-2}, 2 < i \leq n$ по модулю R^3 совпадает с отображением ω_t для фиксированного $t \in K$.

Теорему 3 совместно доказали автор и В. М. Левчук. Ее доказательство удается перенести и на теорему 4.

Прежде всего замечаем, что из леммы 3 сразу же вытекает лемма 4.

Лемма 6. Для произвольного локального дифференцирования φ алгебры R существуют элементы $c_{ij} \in K$ такие, что

$$\varphi(e_{ij}) = c_{ij}e_{ij} \bmod Q_{ij} \quad (1 \leq j < i \leq n). \tag{5}$$

Из леммы 2 легко вытекают также (полагаем $N_{kj} = 0$, если $k > n$ или $j < 1$) леммы 5, 6.

Лемма 5. Пусть $R = NT(n, K)$ и $\psi \in \mathrm{Der}\, R$. Если $1 \leq j < i \leq n$ и $\psi(e_{ij}) = 0$ по модулю N_{i+1j-1}, то выполняется равенство $\psi(e_{ij}) = 0$ при $i - j > 1$, а по модулю центра Z также при $i - j = 1$.

Лемма 6. Произвольное локальное дифференцирование φ алгебры R с точностью до прибавления ее дифференцирования удовлетворяет условию

$$\varphi(e_{ii-1}) = 0, \quad i = 2, 3, ..., n. \tag{6}$$

Доказательство. В силу леммы 4, с точностью до прибавления к φ диагонального дифференцирования, имеем

$$\varphi(e_{ii-1}) = 0 \bmod Q_{ii-1}, \quad i = 2, ..., n.$$

Внутреннее дифференцирование $\alpha \to \alpha * \beta$ с матрицей вида $\beta = \sum_{i=1}^{n-2} x_i e_{i+22}$ $(x_i \in K)$ дает $\varphi(e_{21}) = 0$. Далее, применяя для каждого $i = 3, ..., n-1$ внутреннее дифференцирование с матрицей вида $xe_{i-11} + \sum_{s=i+1}^{n} y_s e_{si}$, приходим к равенствам

$$\varphi(e_{ii-1}) = k_{i2}e_{i2} + k_{i3}e_{i3} + ... + k_{ii-2}e_{ii-2} \bmod N_{i+1i-2}. \tag{7}$$

При $i = n$ внутреннее дифференцирование с матрицей вида xe_{n-11} (и соглашение $N_{n+1n-2} = 0$) также дает (7). Из (7) следует равенство (6) по модулю идеала N_{i+1i-2} на элементы e_{ii-1} для i = 2, 3. Далее проводим индукцию. При i = 4 находим

$$\varphi(e_{43}) = k_{42}e_{42} \bmod N_{52},$$

$$\varphi(e_{21} + e_{43}) = \varphi(e_{21}) + \varphi(e_{43}) = k_{42}e_{42} \bmod N_{52}.$$

Если дифференцирование $\psi \in \mathrm{Der}\, R$ действует как φ на элемент $\alpha = e_{21} + e_{43}$, то для подходящей матрицы $\gamma = \|\gamma_{uv}\| \in R$ по модулю N_{52} получаем равенство

$$\psi(e_{21} + e_{43}) = \alpha\gamma - \gamma\alpha =$$
$$= \gamma_{32}(e_{42} - e_{31}) + (\gamma_{31} - \gamma_{42})e_{41} - \gamma_{54}e_{53} - ... - \gamma_{n4}e_{n3},$$

откуда $\gamma_{32} = 0 = k_{42}$. Равенство $k_{ii-2} = 0$ для оставшихся i получаем аналогично.

Фиксируя $i \leq n$, докажем равенства $k_{ij} = 0$ коэффициентов в (7) в предположении, что равенства $k_{st} = 0$ при всех $s < i$ доказаны. Допустим также, что

$$k_{im+1} = k_{im+2} = ... = k_{ii-2} = 0$$

для некоторого $1 < m < i-1$. Выбирая дифференцирование $\psi \in \mathrm{Der}\, R$, действующее на элемент $e_{mm-1} + e_{ii-1}$ как φ, по модулю $N_{m+1m-2} + N_{i+1i-2} + N_{im-1}$, получаем

$$\psi(e_{mm-1} + e_{ii-1}) = \varphi(e_{mm-1} + e_{ii-1}) =$$
$$= \varphi(e_{mm-1}) + \varphi(e_{ii-1}) = k_{im}e_{im}.$$

Отсюда и из описания группы $\mathrm{Der}\, R$ (лемма 2) следует, что в этих соотношениях ψ можно считать внутренним дифференцированием с подходящей матрицей $\gamma = \|\gamma_{uv}\| \in R$. В этом случае

$$\psi(e_{mm-1} + e_{ii-1}) =$$
$$= \gamma_{i-1m}(e_{im} - e_{i-1m-1}) \bmod (N_{m+1m-2} + N_{i+1i-2} + N_{im-1})$$

и, следовательно, $\gamma_{i-1m} = 0 = k_{im} = 0$. Произвол в выборе m дает равенства $k_{ij} = 0$ в (7) для всех j.

Таким образом, доказаны соотношения $\varphi(e_{ii-1}) = 0 \bmod N_{i+1i-2}$. Вместе с леммой 5 они показывают, что $\varphi(e_{ii-1}) = 0$ для всех i, с точностью до прибавления центрального дифференцирования.

Доказательство теоремы 4 завершает лемма 7.

Лемма 7. Если локальное дифференцирование φ алгебры R удовлетворяет условию (6), то все элементы c_{ii-2} из леммы 4 попарно совпадают.

Доказательство. Для произвольного локального дифференцирования φ алгебры R существуют элементы $c_{ij} \in K$ такие, что выполняются равенства (5).

Пусть $2 < i < n$. Положим $\alpha = e_{ii-2} + e_{i-1i-2} + e_{i+1i-1} - e_{i+1i}$. Согласно описанию дифференцирований (лемма 2), φ действует на α по модулю центра Z как треугольное дифференцирование с треугольной матрицей $\gamma = \|x_{uv}\|$, в частности,

$$c_{ii-2}e_{ii-2} + c_{i+1i-1}e_{i+1i-1} = \varphi(\alpha) = \alpha * \gamma \bmod R^3.$$

Сравнение в левой и правой частях этого равенства элементов на позициях $(i-1, i-2)$ и $(i+1, i)$ дает равенства соответственно $d_{i-1} = d_{i-2}$ и $d_{i+1} = d_i$. Сравнивая элементы на позициях $(i, i-2)$ и $(i+1, i-1)$, получаем соответственно равенства

$$d_{i-2} - d_i - x_{ii-1} = c_{ii-2}, \quad d_{i-1} - d_{i+1} - x_{ii-1} = c_{i+1i-1}.$$

Отсюда $d_{i-1} - d_i - x_{ii-1} = c_{ii-2}, d_{i-1} - d_i - x_{ii-1} = c_{i+1i-1}$ и, следовательно, $c_{ii-2} = c_{i+1i-1}$. В силу произвольного выбора i получаем $c_{31} = c_{42} = ... = c_{nn-2}$.

Теорема о локальных лиевых дифференцированиях. Целью этой части работы является доказательство теоремы 1; теорема 2 доказывается по аналогичной схеме. Описание группы $\mathrm{Der}\,\Lambda(R)$ дано в [7, теорема 5].

Случай $n = 3$ теоремы 1 устанавливает лемма 8.

Лемма 8. Пусть K есть ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей и $R = NT(3,K)$. Тогда $\mathrm{Locder}\,\Lambda(R)$ есть сумма подгрупп $\mathrm{Der}\,\Lambda(R)$ и $\mathrm{Locder}\,R$.

Доказательство. Произвольное локальное лиево дифференцирование ψ алгебры $R = NT(3,K)$ действует на элементы e_{21} и e_{32} так, что

$$\psi : e_{i+1i} \to a_i e_{21} + b_i e_{32} \bmod R^2, i = 1,2 \ (a_i, b_i \in K).$$

Учитывая [7, теорема 5], можем считать, что ψ действует по модулю центра как нулевое отображение на элементы e_{21} и e_{32}. Тогда все идеалы N_{ij} являются ψ-инвариантными и поэтому $\psi \in \mathrm{Locder}\,R$.

С учетом теоремы 4 несложно доказывается (см. [4]) лемма 9.

Лемма 9. Если $R = NT(3,K)$, то $\mathrm{Locder}\,R$ аддитивно порождают $\mathrm{Der}\,R$ и локальные дифференцирования вида

$$\delta_t : \alpha \to t a_{n1} e_{n1} \quad (\alpha = \|a_{km}\| \in R), t \in K. \tag{8}$$

Далее полагаем $R = NT(4,K)$. При $t \in K$ выделяем эндоморфизмы K-модуля R,

$$\begin{aligned} &\varphi_{31,t} : \alpha \to t a_{31} e_{n1}, \\ &\varphi_{nn-2,t} : \alpha \to t a_{nn-2} e_{n1} \qquad (\alpha \in R). \end{aligned} \tag{9}$$

Следующая теорема анонсирована в [9]. См. также [10].

Теорема 5. Если K – поле, то $\mathrm{Locder}\,R$ аддитивно порождают $\mathrm{Der}\,R$ и локальные дифференцирования вида (9), (8) и (4).

Описание лиевых дифференцирований приведено в [7]. Выделим эндоморфизмы

$$\sigma_a : e_{21} \to a e_{n2}, \sigma'_b : e_{nn-1} \to b e_{n-11} \ a,b \in K,$$
$$\varphi_c : e_{21} \to c e_{43}, e_{31} \to c e_{42},$$
$$\varphi'_d : e_{43} \to d e_{21}, e_{42} \to d e_{31}, c,d \in K,$$

аддитивной группы $\Lambda(R^+)$. (Считаем, что матричная единица e_{ij} обращается в нуль, если ее образ не указан.) Описание $\mathrm{Der}\,\Lambda(R)$ в [7] использует подгруппы

$$L_3 = \langle \varphi_c \,|\, c \in K, 2c = 0 \rangle, L'_3 = \langle \varphi'_d \,|\, d \in K, 2d = 0 \rangle;$$
$$\tilde{L}_2 = \langle \sigma_a \,|\, a \in K \rangle, \tilde{L}'_2 = \langle \sigma'_b \,|\, b \in K \rangle.$$

Лемма 10. Пусть K – ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Тогда

$$Der\,\Lambda(R) = \tilde{L}_2 + \tilde{L}'_2 + L_3 + L'_3 + Der\ R \quad (n = 4).$$

Как и в (2), выберем $\gamma = \|c_{ij}\| \in M(2,K)$. Отображения $\hat{\gamma}$ и ρ_k введены перед теоремой 1 и в (3). Они дают нетривиальные локальные лиевы дифференцирования, как показывают следующие две леммы.

Лемма 11. Если K – поле и $2c_{12} = 2c_{21} = 0$, то отображение $\hat{\gamma}$ есть локальное лиево дифференцирование алгебры R.

Доказательство. Фиксируя $\alpha = \|a_{ij}\| \in R$, найдем $\psi \in Der\,\Lambda(R)$ такое, что

$$\psi(\alpha) = \hat{\gamma}(\alpha). \tag{10}$$

Пусть $a_{31}c_{11} + a_{42}c_{21}$ и $a_{42}c_{22} + a_{31}c_{12}$ одновременно $\neq 0$, иначе $\hat{\beta}(\alpha) = 0$. Когда $\alpha \in N_{32}$, дифференцирование ψ в (10) даст сумма диагонального дифференцирования с матрицей $\mathrm{diag}\{d_1, d_2, d_3, d_1\}$ над K и дифференцирования $\varphi_c + \varphi'_d$, где $\varphi_c \in L_3, c = c_{12}$ и $\varphi'_d \in L'_3, d = c_{21}$.

Если $a_{21} \neq 0$, то $\hat{\gamma}(\alpha) = (\sigma_a + \chi)(\alpha)$ для $\chi : \alpha \to \alpha\gamma - \gamma\alpha, \gamma = (-a_{21}^{-1}(a_{31}c_{11} + a_{42}c_{21}))e_{32}$ и

$$\sigma_a \in \tilde{L}_2, \quad a = a_{21}^{-1}(a_{42}c_{22} + a_{31}c_{12}) +$$
$$+ a_{43}a_{21}^{-2}(a_{31}c_{11} + a_{42}c_{21}).$$

Когда $a_{21} = 0$ и $a_{43} \neq 0$, выбираем ψ аналогично, используя замену σ_a на σ'_b.

Лемма 12. Если K – поле, то ρ_k есть локальное лиево дифференцирование алгебры R для любого элемента $k \in K$.

Доказательство. Зафиксируем $k \in K$. Для произвольной матрицы $\alpha = \|a_{ij}\| \in R$ найдем лиево дифференцирование $\psi \in \mathrm{Der}\Lambda(R)$ такое, что

$$\rho_k(\alpha) = k a_{43} e_{42} = \psi(\alpha). \tag{11}$$

Если $ka_{43} = 0$, то можно взять $\psi = 0$. Поэтому далее $ka_{43} \neq 0$.

При $a_{21} \neq 0$, полагая $b = k a_{21} a_{43}^{-1} \in K$ и $\gamma = k e_{32}$, получаем $\rho_k(\alpha) = \sigma'_b(\alpha) + \alpha * \gamma$, так что в (11) можно взять $\psi = \sigma'_b(\alpha) + \alpha * \gamma$. Пусть $a_{21} = 0$. Тогда ψ действует на α как внутреннее дифференцирование с матрицей ke_{32}.

Замечание. Построенные нетривиальные локальные дифференцирования $\hat{\gamma}$ и ρ_k не обязаны лежать в $\mathrm{Der}\,\Lambda(R) + \mathrm{Locder}\,R$. Кроме того, если $k \neq 0$, то ρ_k есть нетривиальное локальное лиево дифференцирование, относительно которого все идеалы N_{ij} инвариантны, хотя $\rho_k \notin \mathrm{Locder}\,R$.

Лемма 13. Всякое локальное лиево дифференцирование алгебры R над полем K действует на совокупность элементов $e_{i+1i} (1 \le i \le 3)$ как сумма лиева дифференцирования и локального лиева дифференцирования вида ρ_k.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathrm{Locder}\,\Lambda(R)$. В силу леммы 3, ψ индуцирует линейные преобразования фактор-алгебр $\Lambda(R)/N_{32}, (N_{21} + N_{43})/R^2$, N_{32}/R^2 и, следовательно, однозначно определяет элементы $c_i, d_j \in K$ такие, что

$$\psi(e_{21}) = d_1 e_{21} + c_1 e_{43}, \quad \psi(e_{43}) = c_2 e_{21} + d_2 e_{43},$$
$$\psi(e_{32}) = d_3 e_{32} \bmod R^2.$$

Поэтому ψ действует как нулевое отображение по модулю R^2 на всех элементах e_{i+1i}, с точностью до прибавления дифференцирований из L_3, L'_3 и диагонального дифференцирования.

Далее, для каждого i добиваемся равенства $\psi(e_{i+1i}) = 0$ по модулю центра $Z = R^3$. С этой целью прибавляем к ψ внутреннее дифференцирование $\alpha \to \alpha * \gamma (\alpha \in R)$ с матрицей $\gamma \in (Ke_{21} + Ke_{43})$ для $i = 2$, а для $i = 1$ – с матрицей $\gamma \in Ke_{32}$ и, кроме того, прибавляем дифференцирование вида φ_c. (Условие $\psi(e_{32}) = 0 \bmod R^3$ при этом не изменяется.) Для случая $i = 3$ достаточно прибавить к ψ дифференцирование вида φ'_d и локальное лиево дифференцирование вида ρ_k.

Наконец, прибавляя к ψ центральное дифференцирование алгебры *R*, добиваемся точных равенств $\psi(e_{i+1i}) = 0$.

Доказательство теоремы 1. Исследуем произвольное локальное лиево дифференцирование ψ алгебры $R = NT(4, K)$ над полем *K*. С учетом леммы 15 можем считать, что ψ действует как нулевое отображение на элементы e_{21}, e_{32}, e_{43}. В силу линейности ψ на R^2 / R^3, существует матрица $\|b_{ij}\| \in M(2, K)$ такая, что

$$\psi(e_{i+2i}) = b_{i1} e_{31} + b_{i2} e_{42} \bmod R^3, \quad i = 1, 2.$$

Нам достаточно доказать, что $2b_{12} = 2b_{21} = 0$. Можно считать, что K – поле характеристики $\neq 2$. Пусть $b_{12} \neq 0$. Ясно, что идеал N_{31} инвариантен относительно подгруппы T дифференцирований $\alpha \to \alpha * \gamma (\alpha \in R)$ для треугольных матриц γ над *K*. Поскольку $\psi \in \mathrm{Locder}\Lambda(R)$, то существует $\theta \in \mathrm{Der}\Lambda(R)$ с условием $\theta(e_{31}) = \psi(e_{31})$. По лемме 10, $\theta \in L_3 + T$, т. е. $\theta = \mu + \varphi_c$, где $\mu \in T$, $\varphi_c \in L_3$, в частности $c \in K, 2c = 0$. Отсюда и из связи θ, ψ получаем $c = b_{12}$, $2c = 2b_{12} = 0$ и поэтому $b_{12} = 0$. Аналогично, $b_{21} = 0$. Таким образом, несложно видеть, что всегда $2b_{12} = 2b_{21} = 0$ и прибавлением к ψ подходящего локального лиева дифференцирования $\hat{\gamma}$ добиваемся по модулю центра *Z* равенств $\psi(e_{31}) = 0$ и $\psi(e_{42}) = 0$. К точным равенствам приходим, прибавляя к ψ локальные дифференцирования вида $\varphi_{31,t}$ и $\varphi_{42,t}$. И, наконец, $\psi(e_{41}) = 0$, с точностью до прибавления к ψ локального дифференцирования вида δ_t. Тем самым доказательство теоремы завершено.

Библиографические ссылки

1. Kadison R. Local derivations // J. Algebra. 1990. Vol. 130. P. 494–509.
2. Larson D. R., Sourour A. R. Local derivations and local automorphisms of $B(H)$ // Proc. Sympos. Pure Math. 1990. Vol. 51. P. 187–194.
3. Crist R. Local automorphisms // Proc. Am. Math. Soc. 2000. Vol. 128. P. 1409–1414.
4. Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования нильпотентных матричных алгебр / А. П. Елисова, И. Н. Зотов, В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2011. Т. 4, № 1. С. 9–19.
5. Nowicki A., Nowosad I. Local derivations of subrings of matrix rings // Acta Mathematica Hungarica. 2004. Vol. 105, № 1–2. P. 145–150.
6. Ou S., Wang D., Yao R. Derivations of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring // Linear Algebra and its Applications. 2007. Vol. 424. P. 378–383.
7. Levchuk V. M., Radchenko O. V. Derivations of the locally nilpotent matrix rings // J. Algebra and Applications. 2010. Vol. 9, № 5. P. 717–724.
8. Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 4. С. 543–557.
9. Елисова А. П. Локальные автоморфизмы и дифференцирования алгебр нильтреугольных матриц // Тез. докл. междунар. конф. по теории колец. Новосибирск, 2011. С. 8–10.
10. Wang X. Local derivations of a matrix algebra over a commutative ring // J. of Math. Research and Exposition. 2011. Vol. 31, № 5. P. 781–790.
11. Elisova A. Local automorphisms and derivations of nilpotent matrix algebras // Book of abstracts of the Int. conf. on algebra. Kiev, 2012. P. 46.

A. P. Elisova

LOCAL DERIVATIONS AND LOCAL AUTOMORPHISMS OF NILPOTENT ALGEBRAS OF MATRICES OF SMALL ORDERS

Let K be associative and commutative ring with identity. In the article we study local derivations and local automorphisms of algebra R of lower niltriangular n×n matrices over K and associated with R of Lie algebra. Their descriptions are completed under n = 3 and when K is a field, under n = 4.

Keywords: algebra of niltriangular matrices, local derivation, local automorphisms.