УДК 512.53

Г. С. Сулейманова

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ БОЛЬШИЕ УНИПОТЕНТНЫЕ АБЕЛЕВЫ ПОДГРУППЫ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА*

Пусть G – группа лиева типа над конечныи полем K, U – ее унипотентная подгруппа. В связи с проблемой описания больших абелевых подгрупп группы U исключительного типа выявляются большие абелевы подгруппы групп U типа $^2E_6$, не являющиеся G-сопряженными с нормальной подгруппой в U. Уточняются известные результаты о подгруппах Томпсона.

Ключевые слова: группа лиева типа, унипотентная подгруппа, большая абелева подгруппа.

В конечной группе для любого теоретико-группового свойства *P* всякую *P*-подгруппу наивысшего порядка называют *большой P-подгруппой*.

Вопрос описания больших абелевых подгрупп группы *G* лиева типа над конечным полем сводится к аналогичному вопросу для унипотентного радикала *U* подгруппы Бореля в *G* [1–4]. В 1970–1980-е гг. для классических типов изучено множество $A(U)$ больших абелевых подгрупп в *U* вместе с подмножествами $A_N(U)$ нормальных и $A_e(U)$ элементарных абелевых подгрупп в *U* и подгруппами Томпсона $J(U) = \langle A \mid A \in A(U)\rangle$ и $J_e(U) = \langle A \mid A \in A_e(U)\rangle$.

В [3] записана проблема 1.6: описать множества $A(U), A_e(U), A_N(U)$ и подгруппы Томпсона *J*(*U*), $J_e(U)$ для оставшихся случаев *G*.

В [5–7] проблема описания *A*(*U*) редуцирована к вопросу о том. что необходимо выявить группы *U*, в которых любая большая абелева подгруппа *G*-сопряжена с нормальной подгруппой в *U*, и перечислить исключительные большие абелевы подгруппы оставшихся групп *U*.

Существование и описание нормальных больших абелевых подгрупп в *U* установлены в [8–10], наряду с описанием максимальных нормальных абелевых подгрупп. Там же и в [11] доказано, что всякая большая абелева подгруппа унипотентной подгруппы *U* группы *G* лиева типа над конечным полем *G*-сопряжена с нормальной подгруппой в *U* или *G* есть группа типа $G_2, F_4, {}^3D_4$ либо $^2E_6$.

В данной статье выявляются исключительные большие абелевы подгруппы групп *U* типа $^2E_6$; случай групп *U* типа F_4 см. в [12; 13].

Предварительные замечания. Группу Шевалле Φ(*K*) над полем *K*, ассоциированную с системой корней Φ, порождают корневые подгруппы $X_r = x_r(K), r \in \Phi$. Скрученная группа $^m\Phi(K)$ типа $^m\Phi$ есть централизатор в Φ(*K*) скручивающего автоморфизма $\theta \in Aut\ \Phi(K)$ порядка *m* = 2 или 3. Это композиция графового автоморфизма τ и автоморфизма $\sigma : t \to \bar{t}\ (t \in K)$ основного поля, причем $\theta(X_r) = \tau(X_r) = X_{\bar{r}}\ (r \in \Phi)$ для естественного продолжения ¯ на Φ симметрии графа Кокстера порядка *m* [14; 15].

Для групп $^m\Phi(K)$ типа $^2E_6$ существует гомоморфизм ζ решетки корней системы Φ на решетку системы типа F_4, причем корни *r* и *s* лежат в одной ¯-орбите тогда и только тогда, когда $\zeta(r) = \zeta(s)$ (см. леммы 7, 8 [14] и замечание 13.3.8 [15]). Согласно предложению 13.6.4 [15], ¯-орбита α любого корня $r \in \Phi$ однозначно определяет корневую подгруппу X_α скрученной группы.

Обозначая множество всех ¯-орбит в Φ через $^m\Phi$, считаем, что $^m\Phi = \zeta(\Phi)$. База Π(Φ) системы корней Φ дает базу $\Pi(^m\Phi) = \zeta(\Pi(\Phi))$ системы $^m\Phi$. Если $K_\sigma := \mathrm{Ker}(1-\sigma)$ – ядро преобразования $1-\sigma$ поля *K*, то $X_\alpha = x_\alpha(K_\sigma) = x_q(K_\sigma)$ для орбит $\alpha = \{q\}$ длины 1; в остальных случаях $X_\alpha = x_\alpha(K)$.

Для системы *G* = ^{m}Φ или *G* = Φ обозначим через G^+ множество положительных корней относительно фиксированной базы $\Pi = \Pi(G)$ в *G*, а через *UG*(*K*) или *U* – унипотентную подгруппу $\langle X_r \mid r \in G^+\rangle$ в ассоциированной с *G* группе *G*(*K*) лиева типа над полем *K* [14; 15]. В этих работах рассмотрены мономиальная *N* и диагональная $H \lhd N$ подгруппы, разложение Брюа $G(K) = BNB$ с подгруппой Бореля $B = U \rtimes H$ и $B \cap N = H$.

При *G* = Φ фактор-группа N/H изоморфна группе Вейля *W*, порождаемой отражениями $w_r\ (r \in \Phi)$, и для подходящих мономиальных элементов $n_r \in \langle X_r, X_{-r}\rangle$ определен гомоморфизм $n_r \to w_r\ (r \in \Phi)$ группы *N* в *W* с ядром *H*.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00968) и Министерства образования и науки Российской Федерации (тема 1.34.11).

В расширенной группе Шевалле K-характеру χ решетки корней (его значения на простых корнях можно выбирать произвольно) сопоставляют диагональный элемент $h(\chi)$, причем

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t),$$
$$n_s x_r(t) n_s^{-1} = x_{w_s(r)}(\pm t) \ \ (r, s \in \Phi).$$

Если $r = \Sigma_{\alpha\in\Pi}\, c_\alpha \alpha \in G$, то число $ht(r) = \Sigma_{\alpha\in\Pi}\, c_\alpha$ называют *высотой* r. Максимальный корень в G^+ обозначим через ρ. *Числом Кокстера* системы G называют число $h = h(G) := ht(\rho)+1$; для $G = \Phi$. Стандартный центральный ряд в $U = UG(K)$ образуют следующие подгруппы [15]:

$$U_i = \langle X_r \mid r \in G^+, ht(r) \geq i\rangle,$$
$$1 \leq i \leq h = h(G) \ (G = \Phi \text{ или } G = {}^m\Phi).$$

Всякий элемент γ в U допускает единственное (каноническое) разложение в произведение корневых элементов $x_r(\gamma_r)\,(r \in G^+)$, расположенных соответственно произвольному упорядочению G (см. лемму 18 [14]). Коэффициент γ назовем *r-проекцией элемента* γ. Через $\Phi(x)$ для элемента γ в U обозначим, как и в [4], множество таких корней r, что $\gamma_r \neq 0$ в разложении $\gamma = \Pi_{r\in\Phi^+} x_r(\gamma_r)$, где корни r выбраны в порядке возрастания.

Пусть $\{r\}^+$ – совокупность всех $s \in G^+$ с неотрицательными коэффициентами в разложении $s-r$ через базу $\Pi(G)$. Подмножество $\Psi \subseteq \Phi^+$ назовем *нормальным*, если $\{r\}^+ \subseteq \Psi$ для всех $r \in \Psi$. Полагаем

$$T(r) := \langle X_s \mid s \in \{r\}^+\rangle,$$
$$Q(r) := \langle X_s \mid s \in \{r\}^+, s \neq r\rangle, \quad r \in G.$$

Если $H \subseteq T(r_1)T(r_2)\ldots T(r_m)$ и любая замена $T(r_i)$ на $Q(r_i)$ нарушает включение, то тогда $L(H) = \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ назовем *множеством углов в* H.

Зафиксируем регулярное упорядочение корней, согласованное с функцией высоты корней (см. лемму 5.3.1 [15]). Тогда первый угол элемента из U соответствует его первому сомножителю в каноническом разложении. Через $L_1(H)$ обозначим множество первых углов всех элементов из H.

Исключительные большие абелевы подгруппы и подгруппы Томсона групп U типа ${}^2E_6$. В силу [12], в группе Шевалле G типа F_4 над полем K при $2K = K$ всякая большая абелева унипотентная подгруппа A сопряжена в G с нормальной подгруппой в U и $L_1(A)$ описано леммой 2 [12], однако при $2K = 0$ это не так [13]. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. В группе G типа ${}^2E_6$ над конечным полем $K = 2K$ существует большая абелева подгруппа группы U, которая не является G-сопряженной с нормальной подгруппой в U.

Доказательство. Группу U порождают корневые подгруппы $X_a, a \in G^+$, где $X_a = x_a(K_\sigma)$ для орбит a длины 1 (класс первого типа); в остальных случаях $X_a = x_a(K)$. Скручивание системы корней типа E_6 приводит к системе типа F_4 (см. предварительные замечания). Поэтому считаем, что a пробегает систему Φ типа F_4. Для краткости вместо записи $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – простые корни системы типа F_4, будем использовать запись $abcd$ [16].

Пусть A – большая абелева подгруппа группы $U = U^2E_6(K)$, $2K = K$. Согласно [8], группа U имеет единственную большую абелеву нормальную подгруппу $H = X_{0122}U_6$.

Рассмотрим подгруппу

$$X_{1111}(K_\sigma)X_{1121}(K_\sigma)X_{1221}(aK_\sigma)X_{1231}(bK_\sigma)T(0122) \quad (\bar{a} = -a, \bar{b} = -b). \tag{1}$$

Предположим, что подгруппа (1) сопряжена в группе G с подгруппой H, т. е. $gAg^{-1} = H$ для некоторого $g \in G$. Пусть B – подгруппа Бореля группы G, N – мономиальная подгруппа и n_w – фиксированный (произвольно) прообраз в N элемента w группы Вейля W при естественном гомоморфизме $N \mapsto W$. Известно [15], что

$$g = bn_w u, \quad b \in B, \ u \in U_w^- = \langle X_r \mid r \in G^+, w(r) \in G^-\rangle,$$

причем элементы b, w, u определены однозначно. Тогда $(bn_w u)A(bn_w u)^{-1} = H$ или $n_w(uAu^{-1})n_w^{-1} = H$, при этом $L_1(uAu^{-1}) = L_1(A) = \{1111\}^+$. Множество $\{1111\}^+$ содержит четыре коротких корня, следовательно множество $\Phi(H) = \cup_{x\in H}\Phi(x)$ также должно содержать четыре коротких корня. Но $\Phi(H) = \{1221\}^+ \cup \{0122\}^+$ содержит три коротких корня.

Строение подгрупп Томпсона требует уточнения для типов G_2, ${}^3D_4, E_8$ [9–11], а также для типа ${}^2E_6$, как показывает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть U – унипотентная подгруппа группы G типа ${}^2E_6$ над конечным полем K. Тогда $J(U) = J_e(U) = X_{\alpha_2}X_{\alpha_3}X_{\alpha_4}U_2$.

Построение больших абелевых подгрупп групп U использует известные понятия. А. И. Мальцев назвал подмножество $\Psi \subseteq \Phi^+$ *коммутативным*, если $r+s \not\in \Phi$ для любых $r, s \in \Psi$ [1]. Описав наибольшие из таких подмножеств в Φ^+, он применил их в описании коммутативных подалгебр наивысшей размерности в простых комплексных алгебрах Ли.

Лемма 1. Наибольшие коммутативные множества системы корней типа F_4 имеют порядок 9 и *W*-сопряжены с $\{0122\}^+ \cup \{1221\}^+$.

Подмножество $\Psi \subseteq \Phi^+$ Е. П. Вдовин называл *абелевым относительно p*, если для любых его корней *r*, *s* либо $r+s \in \Phi$ и структурная константа C_{11rs} коммутаторной формулы Шевалле равна нулю в характеристике *p*, либо $r+s \not\in \Phi$ [4] (очевидно, это абелевы, как и в [1], множества корней, если $p>3$ или в Ф все корни одной длины). Такие максимальные подмножества Ψ описаны компьютерными средствами в [4] для типа G_2 при *p* = 2 и 3, а также для типа F_4 при *p* = 2, где они дают максимальные абелевы подгруппы $X_\Psi = \langle X_r \mid r \in \Psi \rangle$.

Полученные в последнем случае 82 подмножества выписаны в табл. 3 [4] с обозначением $\Psi_{i,j}$, где *i* – номер строки; *j* – номер столбца. В частности,

$$\Psi_1 = \{0121\}^+,\ \Psi_2 = \{1111\}^+ \cup \{0122\}^+,$$

$$\Psi_3 = \{0011, 0111, 1111, 1231\} \cup \{0122\}^+$$

есть $\Psi_{2,12}, \Psi_{2,13}, \Psi_{6,10}$ соответственно. Из [4] несложно вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Всякое максимальное абелево относительно 2 подмножество системы корней типа F_4 либо есть одно из множеств $\Psi_{1,j}$, $\Psi_{4,j}$ порядка 10 ($1 \le j \le 13$), либо *W*-сопряжено с одним из множеств Ψ_i, $\overline{\Psi}_i$ порядка 11 для *i* = 1, 2 или 3 (всего 28, 22 или 6 соответственно).

При $r, s, r+s \in \Phi^+$ выберем

$$x_r(F) \subseteq X_r, \quad x_s(V) \subseteq X_s, \quad F, V \subseteq K, \quad FV \ne 0.$$

В [10] доказана следующая лемма.

Лемма 3. Если $[x_r(F), x_s(V)] \subseteq Q(r+s)$, то *r* + *s* есть класс первого типа, *r* и *s* не являются классами первого типа и, с точностью до сопряжения диагональным автоморфизмом, $F \subseteq K_\sigma$, $V \subseteq K^{1-\sigma}$.

Положим $m(x) := L_1(x) \in \Phi^+$ при всех $x \in U$. Используя лемму 3 и табл. 3 [4], получим две следующие леммы.

Лемма 4. Пусть *A* – абелева подгруппа группы *U* типа ${}^2E_6$. Тогда для любых ее неединичных элементов *x*, *y* множество $\{m(x), m(y)\}$ – абелево относительно 2, когда $m(x)+m(y) \in \Phi$, *m*(*x*)-проекции всех элементов из *A* с первым углом *m*(*x*) лежат в 1-мерном K_σ-модуле.

Лемма 5. Пусть *A* – большая абелева подгруппа в *U*, Ψ – максимальное абелево относительно 2 множество системы типа F_4 *и* $L_1(A) \subseteq \Psi$. Тогда:

а) подмножество $\{r_1, r_2, r_3\} \subseteq \Psi$ лежит в $L_1(A)$, если для всех $i \ne j$ имеем $r_i + r_j \in \Phi$ и $C_{11,r_i,r_j} = \pm 2$;

б) если $r+s \in \Phi$ для пары $\{r, s\}$ корней из Ψ, не входящей в тройки из п. «а», и $C_{11,r,s} = \pm 2$, то *r* или *s* входит в $L_1(A)$;

в) если Ψ содержит корень *r* такой, что $(r+\Psi) \cap \Phi = \varnothing$, то $r \in L_1(A)$.

Аналогично, используя леммы 4, 5 и табл. 3 [4], получим следующую лемму.

Лемма 6. Максимальные абелевы относительно 2 подмножества Ψ, для которых существует большая абелева подгруппа *A* с условием $L_1(A) \subseteq \Psi$, *W*-сопряжены с Ψ_1 при 2*K* = 0 и с Ψ_2 при 2*K* = *K*. Кроме того, они исчерпываются множествами $\Psi_{2,9}, \Psi_{2,12}, \Psi_{3,1}, \Psi_{3,7}, \Psi_{3,12}, \Psi_{5,1}, \Psi_{5,3}, \Psi_{5,6}, \Psi_{5,8}, \Psi_{5,9}, \Psi_{5,13}, \Psi_{6,4}, \Psi_{6,11}, \Psi_{7,1}$; $\Psi_{2,10}, \Psi_{2,11}, \Psi_{2,13}, \Psi_{3,13}, \Psi_{5,2}, \Psi_{5,4}, \Psi_{5,5}, \Psi_{5,7}, \Psi_{6,7}, \Psi_{7,2}, \Psi_{7,3}$ соответственно.

Доказательство теоремы 2 вытекает из леммы 6 и табл. 3 [4].

Библиографические ссылки

1. Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1945. Т. 9, № 4. С. 291–300.

2. Barry M. J. J. Large Abelian Subgroups of Chevalley Groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. Vol. 27, № 1. P. 59–87.

3. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1 (247). С. 57–96.

4. Вдовин Е. П. Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 523–544.

5. Gupta C. K., Levchuk V. M., Ushakov Yu. Yu. Hypercentral and Monic Automorphisms of Classical Algebras, Rings and Groups // J. of Siberian Federal Univ. Mathematics & Physics. 2008. Vol. 1, № 4. P. 280–290.

6. Levchuk V. M., Suleymanova G. S., Voitenko T. Yu. Some Questions for the Unipotent Subgroup of the Chevalley Group // Алгебра и ее приложения : тез. докл. Междунар. конф. / Сиб. федер. ун-т. Красноярск, 2007. С. 168–169.

7. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. Automorphisms and Normal Structure of Unipotent Subgroups of Finitary Chevalley Groups // Proc. of the Steklov Inst. of Mathematics. 2009. № 3. P. 118–127.

8. Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы // Докл. Рос. акад. наук. 2008. Т. 419, № 5. С. 595–598.

9. Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Нормальное строение и экстремальные подгруппы в унипотентной подгруппе групп лиева типа // Фундамент. и прикл. математика. 2011. Т. 17, № 10. С. 169–182.

10. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. Extremal and Maximal Normal Abelian Subgroups of a Maximal

Unipotent Subgroup in Lie Type Groups // J. of Algebra. 2012. Vol. 349, № 1. P. 98–116.

11. Сулейманова Г. С. Сопряженность в конечной группе Шевалле типа E_8 больших абелевых унипотентных подгрупп // J. of Siberian Federal Univ. Mathematics & Physics. 2011. Vol. 4, № 4. P. 536–540.

12. Сулейманова Г. С. О сопряженности в группе Шевалле больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы // Фундамент. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 7. С. 205–216.

13. Сулейманова Г. С. Классы сопряженных в группе Шевалле типа F_4 больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы // Владикавказ. мат. журнал. 2011. Т. 13, вып. 2. С. 45–55.

14. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М. : Мир, 1975.

15. Carter R. Simple Groups of Lie Type. New York : Wiley and Sons, 1972.

16. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М. : Мир, 1972.

G. S. Suleymanova

EXEPTIONALY LARGE ABELIAN UNIPOTENT SUBGROUPS IN GROUPS OF LIE TYPE

Let G be a group of Lie type over a finite field K and let U be its unipotent subgroup. In the connectoin to the problem of description of large abelian subgroups in the group U of exceptional type, we discover large abelian subgroups in the group U of type $^2E_6$*, which are not G-ajoint to a normal subgroup in U. Some results on the Thopson subgroup are revised.*

Keywords: group of Lie type, unipotent subgroup, large abelian subgroup.

УДК 681.34

Р. Ю. Царев, А. В. Штарик, Е. Н. Штарик, М. А. Кочергина, Т. А. Панфилова

АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНО-ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТКАЗОУСТОЙЧИВОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ*

Представлено описание программного комплекса анализа вероятностно-временных характеристик отказоустойчивого программного обеспечения распределенных вычислительных систем с использованием ГЕРТ-сетей.

Ключевые слова: отказоустойчивое программное обеспечение, распределенные вычисления, ГЕРТ-сети.

На сегодняшний день распределенные вычислительные системы все чаще используются для решения управленческих, исследовательских и производственных задач. Одним из видов таких систем являются гетерогенные вычислительные системы высокой надежности для высокопроизводительных вычислений (системы обработки высокой пропускной способности), объединяющие в единую вычислительную среду гетерогенные вычислительные ресурсы (суперкомпьютеры, серверы, рабочие станции, локальные и глобальные сети с различной пропускной способностью, хранилища данных и пр.), благодаря чему создается единая среда обработки информации и распределенных вычислений.

Большинство исследовательских задач, решаемых в сфере гетерогенных вычислений, направлено на разработку системы поддержки параллельных или распределенных вычислений, стремящихся приблизить практическую продолжительность работы (производительность, коэффициент ускорения) к теоретически возможной для данного кластера.

Постановка задачи. Использование суперкомпьютера или специализированного кластера невозможно или малоэффективно в таких случаях, когда алгоритм программы нельзя эффективно преобразовать из последовательного в параллельный, время выполнения задачи сравнимо со временем создания параллельного алгоритма [1] или требуется решать множество одинаковых задач с различными входными данными, при этом время выполнения каждой задачи в отдельности невелико (не превышает нескольких часов). Для таких задач возможна разработка гетерогенной распределенной вычислительной системы (РВС), использующей узлы с высокой надежностью и отказоустойчивостью.

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.