

ного обеспечения с использованием методов анализа сетей // Вестник СибГАУ. 2009. Вып. 1 (22). Ч. 2. С. 55–60.

2. Царев М. Ю., Царев Р. Ю., Шевчук С. Ф. Модификация ГЕРТ-сети для анализа временных характеристик сетевых моделей // Вестник СибГАУ. 2009. Вып. 1 (22). Ч. 2. С. 74–78.

3. Ковалев П. В., Капчинский И. А., Гриценко С. Н. Графоаналитический метод анализа мультиверсионных архитектур программного обеспечения // Вестник СибГАУ. 2009. Вып. 3 (24). С. 37–39.

4. Ковалев И. В., Письман Д. М., Слободин М. Ю. Модели оценки времени выполнения задачи на кластере с последовательной и параллельной архитекту-

рой обмена данными // Системы упр. и информ. технологии. 2005. № 3 (20). С. 58–62.

5. Condor Version 6.6.10 Manual [Electronic resource]. URL: <http://www.cs.wisc.edu/condor/manual/v6.6/> (date of visit: 10.10.2012).

6. К вопросу формирования мультиверсионного программного обеспечения с учетом ресурсных ограничений / П. В. Ковалев, И. А. Капчинский, А. Н. Лайков, С. Н. Гриценко // Вестник СибГАУ. 2009. Вып. 2 (23). С. 70–74.

7. Письман Д. М. Сравнение производительности прямого и обратного алгоритмов расчета модифицированной ГЕРТ-сети // Фундамент. исслед. 2006. № 2. С. 45–47.

R. Yu. Tsarev, A. V. Shtarik, E. N. Shtarik, M. A. Kochergina, T. A. Panfilova

ANALYSIS OF PROBABILISTIC AND INTERIM CHARACTERISTICS OF FAULT TOLERANT SOFTWARE OF DISTRIBUTED COMPUTING SYSTEMS

The paper presents description of developed software system for analysis of probabilistic and interim characteristics of the fault tolerant software of distributed computing systems with the use of GERT-networks.

Keywords: fault tolerant software, distributed computing, GERT-network.

© Царев Р. Ю., Штарик А. В., Штарик Е. Н., Кочергина М. А., Панфилова Т. А., 2012

УДК 512.54

А. А. Шлепки

О ПОДГРУППАХ СВОБОДНОЙ ДВУПОРОЖДЕННОЙ БЕРНСАЙДОВОЙ ГРУППЫ ПЕРИОДА ПЯТЬ

Получены достаточные условия существования в $B(2, 5)$ двупорожденных подгрупп, не изоморфных $B(2, 5)$.

Ключевые слова: проблема Бернсайда, вычислительная теория групп.

Одной из известных проблем теории групп является проблема Бернсайда о периодических группах фиксированного периода [1]. Эта проблема была поставлена английским математиком У. Бернсайдом в 1902 г. в следующей форме: пусть G – группа, порожденная m элементами, в которой каждый элемент в степени n равен единичному элементу группы. Будет ли такая группа конечной? Впоследствии эти группы получили название *свободных бернсайдовых групп* и обозначение $B(m, n)$.

Перечислим известные к настоящему времени результаты по данным группам. Группа $B(m, n)$ конечна для $n = 2$ (тривиальный случай), $n = 3$ [1], $n = 4$ ($m = 2$) [1], для $m > 2$ [2], $n = 6$ [3]. Группа $B(m, n)$ бесконечна для нечетных $n > 665$ [4] и для достаточно больших четных n [5; 6].

В 1950 г. В. Магнусом была поставлена еще одна проблема, известная как *ослабленная проблема Бернсайда*. В ней требовалось выяснить, существует ли максимальная конечная периодическая группа $B_0(m, n)$ с данным числом порождающих элементов m и фиксированным периодом n . Связь ослабленной проблемы

Бернсайда с основной проблемой сводится к тому, что если бы не существовало бесконечных периодических групп, то $B(m, n)$ была бы максимальной конечной периодической группой при этих m и n .

Решение ослабленной проблемы Бернсайда для периода 5 приведено в [7]. Для других показателей, наименьший из которых $n = 5$, вопрос о конечности остается открытым.

Наибольший интерес представляют двупорожденная группа периода 5 (группа $B(2, 5)$), поскольку эта группа имеет наименьший показатель и наименьшее число порождающих элементов в сравнении с другими бернсайдовыми группами, конечность которых не определена. Отметим два вопроса о подгруппах группы $B(2, 5)$, поставленные Б. Б. Симсом [8], ответы на которые до настоящего времени не известны:

– *вопрос 1:* существуют ли в $B(2, 5)$ нециклические конечные подгруппы;

– *вопрос 2:* существуют ли в $B(2, 5)$, при условии ее бесконечности, бесконечная двупорожденная подгруппа периода 5, не изоморфная $B(2, 5)$?

В [8] приведенные ниже соотношения длины 30 были получены как необходимое условие существования в $B(2, 5)$ конечных нециклических подгрупп порядка 25. Однако сами эти подгруппы там не были указаны. А. А. Кузнецовым в теореме 11 [9] приведен ряд соотношений, минимальное из которых имеет длину 47, являющихся достаточными условиями существования в $B(2, 5)$ нециклических подгрупп порядка 25, причем для каждого из данных соотношений указана соответствующая группа.

Автором получено достаточное условие положительного ответа по крайней мере на один из упомяну-

тых выше двух вопросов. Обозначим через 0, 1 порождающие элементы $B(2, 5)$.

Положим $v = 01$, $w = 10$ и рассмотрим в $B(2, 5)$ подгруппу $H = \langle v, w \rangle$. В [10; 11] представлены все соотношения до длины 36 включительно, доказать которые в $B(2, 5)$ не удастся, а невыполнение любого из них влечет бесконечность $B(2, 5)$.

В табл. 1 приведены все соотношения из [10; 11], которые являются соотношениями в подгруппе H в образующих v, w (табл. 2), с сохранением нумерации указанных соотношений из [12].

Таблица 1

Порядковый номер соотношения в массиве [12]	Вид соотношения до замены $v = 01, w = 10$
<i>Длина 30: 2 соотношения</i>	
1	$011010010110010101100101101001 = 101010011001101010011001101010$
2	$010101100110010101100110010101 = 100101101001101010011010010110$
<i>Длина 32: 16 соотношений</i>	
22	$01010110011010100110100101100101 = 10010110010110100110010101100110$
23	$01011001011010011010100110010101 = 10011001010110011010010110010110$
25	$01011010010110011010011010011001 = 10010101101010010101100110100110$
26	$01100101100110101001010110101001 = 10011001011001011001101001011010$
27	$01100110100101101001011010011001 = 10011001011010010110100101100110$
28	$01100110100110100110010110100101 = 10011010011001010110101001010110$
29	$01101001100101101001011001101001 = 10010110011010010110100110010110$
30	$01101010010101101010011001011001 = 10100101101001100101100101100110$
33	$01100110100110011001011001101001 = 10011001011001101001011010010110$
34	$01101001100101100110011010011001 = 10010110100101101001100101100110$
36	$01011010011001101001100110100101 = 10010101101010010110101001010110$
42	$01100101101010010110101001011001 = 10100101100110010110011001011010$
44	$01100110100110010110100101101001 = 10011001011001100110100110010110$
45	$01101001011010010110011010011001 = 10010110011010011001100101100110$
46	$01100110101001100101101001101001 = 10100110100101100101011001101010$
47	$01101001101001011001101010011001 = 10101001100101011001011010011010$
<i>Длина 34: 23 соотношения</i>	
223	$0110011010100110010110010110100110 = 1001011010011010010101100110101001$
225	$0101100110101001100110101001100101 = 1010100110010101100101011001101010$
228	$0110101001100101011010011010010110 = 1001101001011001011001101010011001$
232	$0101100101101001101010011010100110 = 1001101010011010010110100110100101$
233	$0101100110101001100110011010100110 = 1001101010011010011010100110010101$
234	$0101101001101001011010011010100110 = 1001101010011010100110100101100101$
235	$0101011001101010011010011010100110 = 1001101010011001100110101001100101$
248	$0110010101100110010101100110100101 = 1010100101011001101010011010100110$
249	$0110010101100101011001101010010101 = 1010010110011010100110011010100110$
250	$0110010101100101100101101001100101 = 1010011001011010011010011010100110$
251	$0101100110100101100101100101011001 = 1001101010011010011010010110011010$
252	$0101101001100101011001100101011001 = 1001101010011010100110010101101010$
253	$0101010110100110100101100101011001 = 1001101010011001011010011010011010$
254	$0101011010100110010101100101011001 = 1001101010011001101010011001011010$
266	$0101101001010110011001010110100101 = 1010010110101001100110101001011010$
274	$0110010101100101011001011010011010 = 1010010110010110100101100101011001$
276	$0110010101100101101001011001011010 = 1010011010010110010101100101011001$

Порядковый номер соотношения в массиве [12]	Вид соотношения до замены $v = 01, w = 10$
278	0101100110010110010110011001011010 = 10101001011001100101011001100101
279	0101100110010101011001100101101010 = 1010010110011001011001011001100101
284	0110100101100101101010011001010110 = 1001100101011001101001101001011001
295	0110010110100110100110010101100110 = 1001010110011010100101100101101001
296	0101011001101010011010100110010101 = 1010011001010110011001010110011010
297	0110100101011010011010010101101001 = 1001010110100110011001101001010110
<i>Длина 36: 48 соотношений</i>	
1733	010101101001011001100101100101100110 = 100110010101011001100101101010010101
1734	010101101010010110011001010101100110 = 100110010110010110011001011010010101
1755	010110010110100101100101101010011001 = 101010011001100110101001101010011010
1757	0110010110011010010110100101011010 = 100110011001011001011001101010010101
1758	010101100101101001011001101010011001 = 1001011010010110100101100101011010
1764	011001101010011001011010010110010101 = 101001010101100101101001011010010110
1780	011001101010010110010110100101100101 = 101001101010011010100110011001101010
1781	010101101010011001011001011001100110 = 101001010101101001011010011001011001
1797	010101011010011010010110100101101001 = 101001011010011001010110011001010110
1798	010110010110010110011010100110011001 = 100101100101011001011010010110011010
1799	010110010110100101100101011001101010 = 101010011001010110010101100101101001
1801	011010010110010101100101011001101010 = 101010011001010110010110100101100101
1805	010101101001010110101001101010010101 = 101001010101101001011001100101100110
1806	010101101010011010100101011010010101 = 1001100101100110010110100101011010
1822	010101101001011010100110011010100101 = 101001010110011001010110100101101010
1823	010110101001100110101001011010010101 = 101010010110100101011001100101011010
1845	010101011001010110010101011001010110 = 100110100101011010100101011010011001
1846	010110100110011010011010010101101001 = 101001010110100110010101101001100110
1850	011001100101101010011001011010100101 = 100101101010010110010110011001011010
1853	010101011010011001011010011010011010 = 100110011010100110100101100101011001
1855	010110011010100110011001010110011010 = 100101011001101010010101100110101001
1856	010110011010100110011010010110010110 = 101001011001011010010101100110101001
1857	011001101010010110100101011010100101 = 101001010110101001011010010101100110
1859	011001011010011010011010100110010101 = 101010011001010110010110010110100110
1860	011010011010010110011001010110011010 = 100101011001101010010110100110100101
1861	011010011010010110011010010110010110 = 101001011001011010010110100110100101
1862	011010011010100110011001010110010110 = 100101011001011010010110100110101001
1891	010110101001011001101010010110011001 = 101001011001100101100101101010010110
1893	010101100110101001101001101001011001 = 100110100101100101100101011001101010
1894	010110100110100101101001011001011010 = 100101100101101001100101101001101001
1895	010110100110100101101010011001010110 = 101001100101011001100101101001101001
1896	010110101001010110100101101010011001 = 100110010101101001011010100101011010
1900	011001010110010110100110101001100110 = 101001101001101001011001101001010101
1901	011010100110010101101001011001011010 = 100101100101101001100110101001100101
1902	011010100110010101101010011001010110 = 101001100101011001100110101001100101
1903	011010100110100101101001011001010110 = 100101100101011001100110101001101001
1906	011001101001010110101001010110100110 = 100101011001010101100101011001010101
1907	011010010101101001101001100110100101 = 100110011010010101100110100101011010
1933	010101100110101001101001011010011010 = 100101101001101010011010100110010101
1934	010101100110101001101010011010010110 = 101001101001011010011010100110010101
1935	011001101010011001011001101010011001 = 100110101001100101010110011010100110
1936	011010011001101001011010011001101001 = 101001100110100101010110100110011010

Окончание табл. 1

Порядковый номер соотношения в массиве [12]	Вид соотношения до замены $v = 01, w = 10$
1981	010110100101101001011010100110100110 = 101001011010010110011010011010011001
1997	010101011001011010010110100101100101 = 101010011001101010011001011010010110
1998	010110101001101001101010010110101001 = 101001010101100101100101010110010110
2027	010101011001100101100101100110100101 = 100101100110101001010110101001101010
2035	010101011010010110011001011001100101 = 100101101010010110101001011001101010
2036	011010100101101010011010011010100101 = 100101100101010110010110010101011010

Таблица 2

Порядковый номер соотношения в массиве [12]	Вид соотношения после замены $v = 01, w = 10$
<i>Длина 30: 2 соотношения</i>	
1	vvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvv
2	vvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvv
<i>Длина 32: 16 соотношений</i>	
22	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
23	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
25	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
26	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
27	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
28	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
29	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
30	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
33	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
34	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
36	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
42	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
44	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
45	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
46	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
47	vvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvv
<i>Длина 34: 23 соотношения</i>	
223	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
225	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
228	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
232	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
233	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
234	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
235	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
248	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
249	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
250	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
251	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
252	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
253	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
254	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
266	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
274	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
276	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
278	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
279	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
284	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv
295	vvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv = wvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvvv

Теорема. Пусть в $B(2, 5)$ выполнено хотя бы одно соотношение из табл. 1. Тогда в $B(2, 5)$ существуют двупорожденные подгруппы, не изоморфные $B(2, 5)$.

Доказательство. Если $B(2, 5)$ – конечная группа, то, как показано в [7], ее порядок равен 5^{34} и, следовательно, $B(2, 5)$ содержит нециклические конечные подгруппы. Пусть $B(2, 5)$ – бесконечная группа. Положим $v = 01$, $w = 10$ и рассмотрим в $B(2, 5)$ подгруппу $H = \langle v, w \rangle$. Тогда в H должно выполняться хотя бы одно соотношение из табл. 2.

Используя вычисления на основе алгоритма из [13], можно убедиться в том, что левая и правая части любого соотношения из табл. 2 инвариантны, т. е. не меняются, по применению к ним указанного алгоритма. Последнее означает, что в $B(2, 5)$ левая и правая части любого соотношения из табл. 2, поскольку их длины в терминах образующих v и w не превосходят 29, – это различные элементы указанной группы (см. теорему 2) [10]. Таким образом, подгруппа H не изоморфна $B(2, 5)$ и, следовательно, H – собственная подгруппа группы $B(2, 5)$. Если H – бесконечная группа, то утверждение теоремы выполнено.

Пусть теперь H – конечная группа. Покажем, что она отлична от циклической группы порядка 5. Предположим обратное. Тогда $H = \langle v, w \rangle = \langle v \rangle = \langle w \rangle$ – циклическая группа порядка 5. Рассмотрим в $B(2, 5)$ автоморфизм φ порядка 2, который на образующих 0, 1 действует следующим образом: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$. Нетрудно видеть, что $\varphi(v) = w$ и $\varphi(w) = v$ и $\varphi(H) = H$. Так как φ – нетривиальный автоморфизм порядка 2 группы H , то $\varphi(x) = v^{-1} = v^4$. Следовательно, $v^4 = w$ и $01010101 = 10$. Домножив обе части последнего равенства слева на 01, получим $0101010101 = 0110 = e$, где e – единица группы H . Следовательно, $0^{-2} = 1^2$ и, как легко видеть, $01 = 10 = e$. Таким образом, $B(2, 5)$ – абелева, что невозможно.

Теорема доказана.

Таким образом, в данной статье с использованием вычислений на ЭВМ получен новый результат, дающий достаточные условия существования в группе $B(2, 5)$ двупорожденных подгрупп, не изоморфных $B(2, 5)$.

Библиографические ссылки

1. Burnside W. On an Unsettled Question in the Theory of Distinctions Groups // J. of Pure and Applied Mathematics. 1902. Vol. 33. P. 393–399.
2. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для периода 4 // Учен. зап. ЛГУ. Серия математическая. 1940. Т. 10. С. 166–170.
3. Hall M. Jr. Solution of the Burnside Problem for Exponent Six // Illinois J. of Mathematics. 1958. № 2. 764–786.
4. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
5. Ivanov S. V. The Free Burnside Groups of Sufficiently Large Exponents // Intern. J. of Algebra and Computation. 1994. Vol. 4. P. 2.
6. Лысенко И. Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. Рос. акад. наук. Серия математическая. 1996. Т. 60. С. 4–5.
7. Кострикин А. И. Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5 // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1955. Т. 19, № 3. С. 233–244.
8. Sims B. B. The Knuth–Bendix Procedure for Strings as a Substitute for Coset Enumeration // J. of Symbolic Computation. 1991. Vol. 12. P. 438–442.
9. Кузнецов А. А. Комплекс алгоритмов компьютерного моделирования дискретных алгебраических систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 2009.
10. Кузнецов А. А., Шлепкин А. А. Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B_0(2, 5)$ и $B(2, 5)$ // Тр. Ин-та математики и механики Урал. отд-ния Рос. акад. наук. 2010. Т. 2. С. 133–138.
11. Кузнецов А. А., Шлепкин А. А. О соотношениях в бернсайдовых группах $B(2, 5)$ и $B_0(m, n)$ // Мат. системы. 2011. Вып. 9. С. 95–148.
12. Арзуманян М. С. Симметричность в бернсайдовой группе $B_0(2, 5)$ // Мат. системы. 2011. Вып. 9. С. 3–85.
13. Кузнецов А. А., Шлепкин А. А. Сравнительный анализ соотношений бернсайдовых групп $B_0(2, 5)$ и $B(2, 5)$ // Тр. Ин-та математики и механики Урал. отд-ния Рос. акад. наук. 2009. Т. 15, № 2. С. 125–132.

A. A. Shlyopkin

ABOUT SUBGROUPS OF FREE BIN-INDUCED BURNSIDE GROUP OF THE PERIOD FIVE

The authors obtain and present sufficient conditions of existence of bin-induced subgroups of non-isomorphic $B(2,5)$ in $B(2,5)$.

Keywords: Burnside problem, computational group theory.