УДК 517.956.32:539.3

Б. Д. Аннин, Ю. А. Чиркунов, Н. Ф. Бельмецев

ГРУППОВОЕ РАССЛОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ*

Методами группового анализа получена и исследована система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентная системе уравнений движения трансверсально-изотропной упругой среды, удовлетворяющей условию Гассмана.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная упругая среда, условие Гассмана, групповое расслоение.

Для описания упругого деформирования горных пород часто используют модель трансверсально-изотропного упругого тела, позволяющую описывать поведение материалов, обладающих анизотропией упругих свойств [1; 2]. В данной модели компоненты тензора напряжений σ^{ij} и тензора деформаций ε^{ij} в декартовой системе координат связаны соотношениями [2]:

$$\sigma^{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon^{11} + \lambda\varepsilon^{22} + \lambda'\varepsilon^{33},\ \sigma^{12} = 2\mu\varepsilon^{12},$$
$$\sigma^{22} = \lambda\varepsilon^{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon^{22} + \lambda'\varepsilon^{33},$$
$$\sigma^{13} = 2G'\varepsilon^{13},\ \sigma^{23} = 2G'\varepsilon^{23},$$
$$\sigma^{11} = \lambda'(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22}) + (\lambda' + 2\mu')\varepsilon^{33}, \tag{1}$$

где λ, μ, λ', G', μ' – независимые параметры тензора модулей упругости трансверсально-изотропного тела.

Компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x^1, x^2, x^3, t) \in R^3$ по формуле $2\varepsilon^{ij} = u^i_{x^j} + u^j_{x^i}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Исходная система уравнений движения нестационарной трансверсально-изотропной теории упругости в силу (1) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\rho u^1_{tt} &= \partial_x\left((\lambda+\mu)(u^1_x + u^2_y) + (\lambda' + G')u^3_z\right) + \\
&\quad + \mu(u^1_{xx} + u^1_{yy}) + G'u^1_{zz}, \\
\rho u^2_{tt} &= \partial_y\left((\lambda+\mu)(u^1_x + u^2_y) + (\lambda' + G')u^3_z\right) + \\
&\quad + \mu(u^2_{xx} + u^2_{yy}) + G'u^2_{zz}, \\
\rho u^3_{tt} &= \partial_z\left((\lambda'+G')(u^1_x + u^2_y) + (\lambda' + \mu')u^3_z\right) + \\
&\quad + G'(u^3_{xx} + u^3_{yy}) + \mu'u^3_{zz},
\end{aligned} \tag{2}$$

где ρ – постоянная плотность среды; $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T \in R^3$.

Математическая характеристика условия Гассмана. *Предложение*. Система уравнений (2) движения трансверсально-изотропной упругой среды имеет в качестве частного решения $\boldsymbol{u} = \nabla h(x, y, z)$ – градиент гармонической функции $h = h(x, y, z)$ – только в следующих случаях:

1) $h_{zz} = \text{const}$;
2) $h_{zz} == F(z)$, $\mu' = G'$;
3) $h_{zzz} = 0$, $\lambda' = \lambda + 2\mu - 2G'$;
4) $\mu' = G'$, $\lambda' = \lambda + 2\mu - 2G'$.

Особый интерес представляет четвертый случай, дающий ограничение лишь на модули упругости. Оказывается, что при таких модулях упругости заведомо выполняется условие Гассмана [3; 4], которое ранее было предложено в работе [5]. Это условие широко применяется в геофизике при исследовании распространения волн в трансверсально-изотропных упругих средах.

При $\mu' = G'$, $\lambda' = \lambda + 2\mu - 2G'$ уравнения (2) принимают вид

$$\rho\boldsymbol{u}_{tt} - (\lambda + 2\mu)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \operatorname{rot}\left(\begin{pmatrix} G' & 0 & 0 \\ 0 & G' & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\right) = 0. \tag{3}$$

Система (3) является объектом исследования в данной статье.

Основная группа Ли. Оператор, допускаемый системой (3), ищется в виде

$$\xi^0(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\partial_t + \xi(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\partial_{\boldsymbol{x}} + \eta(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\partial_{\boldsymbol{u}}.$$

Уравнения (3) ввиду линейности допускают бесконечную группу Ли преобразований с нормальным делителем, порождаемым операторами

$$\boldsymbol{u}_0(t, \boldsymbol{x})\,\partial_{\boldsymbol{u}}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{u}_0(t, \boldsymbol{x})$ – произвольное решение уравнений (3). Фактор-группа по этому нормальному делителю конечномерна, ее алгебра Ли разрешима и имеет базис:

$$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z,\ \partial_t, x\partial_y - y\partial_x + u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1},$$
$$t\partial_t + \boldsymbol{x}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{u}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}}.$$

Групповое расслоение. Задача отыскания операторов (4) равносильна решению исходных уравнений (3). Поэтому данные операторы не находят широкого применения в групповом анализе при построении классов частных решений, однако они могут быть использованы для преобразования системы (3) в равносильную ей систему.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-12075-офи-м-2011, гранта № НШ 6706.2012.1 в рамках Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ, гранта РФФИ № 12-01-00648.

Среди операторов вида (4), допускаемых системой (3), содержатся операторы

$$\nabla h(x,y,z)\,\partial_{\boldsymbol{u}}\,, \qquad (5)$$

где $h(x,y,z)$ – произвольная гармоническая функция.

Базис дифференциальных инвариантов первого порядка бесконечной группы с оператором (5) можно выбрать следующим образом [6]:

$$\boldsymbol{J}_1 = t\,,\ \boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{x}\,,\ J_3 = \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,,\ \boldsymbol{J}_4 = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,,\ \boldsymbol{J}_5 = \boldsymbol{u}_t\,,$$

что позволяет выполнить групповое расслоение уравнений (3) относительно этой группы.

Автоморфная система имеет вид

$$\boldsymbol{u}_t = \nu(\boldsymbol{x},t)\,,\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = \theta(\boldsymbol{x},t)\,,\ \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \omega(\boldsymbol{x},t)\,, \qquad (6)$$

а разрешающая система – вид

$$\rho\nu_t = (\lambda+2\mu)\nabla\theta - \operatorname{rot}(M\cdot\omega)\,,\ \theta_t = \operatorname{div}\nu\,,$$
$$\omega_t = \operatorname{rot}\nu\,,\ \operatorname{div}\omega = 0\,, \qquad (7)$$

где $\nu = \left(\nu^1,\nu^2,\nu^3\right)^T$; $M = \begin{pmatrix} G' & 0 & 0 \\ 0 & G' & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1,\omega^2,\omega^3)^T$.

Система уравнений (3) равносильна системе первого порядка, составленной из уравнений (6) и (7), в которой искомыми функциями являются вектор перемещений $\boldsymbol{u}$ и дополнительные функции $\nu, \theta, \boldsymbol{\omega}$.

Если в системе (7) вектор ν заменить на вектор перемещений $\boldsymbol{u}$, то получится система уравнений

$$\rho\boldsymbol{u}_t = (\lambda+2\mu)\nabla\theta - \operatorname{rot}(M\cdot\omega)\,,$$
$$\theta_t = \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,,$$
$$\boldsymbol{\omega}_t = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,,$$
$$\operatorname{div}\omega = 0\,, \qquad (8)$$

содержащая меньшее, чем объединенная система (6), (7), число дополнительных функций, а именно: $\theta(\boldsymbol{x},t)$, $\omega(\boldsymbol{x},t)$.

Теорема. Система (8) равносильна системе (3), т. е. для любого решения $(\boldsymbol{u},\theta,\boldsymbol{\omega})$ системы (8) функция $\boldsymbol{u}$ является решением системы (3), и обратно: для любого решения $\boldsymbol{u}$ системы (3) найдутся функции $\theta, \boldsymbol{\omega}$, такие что $(\boldsymbol{u},\theta,\boldsymbol{\omega})$ является решением системы (8).

Доказательство. Если $(\boldsymbol{u},\theta,\boldsymbol{\omega})$ – решение системы (8), то его подстановка в данную систему и дифференцирование по t первого соотношения дают уравнения (3) для функции $\boldsymbol{u}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{u}$ является решением системы (3). Из третьего уравнения системы (8) после подстановки в него $\boldsymbol{u}$ получим:

$$\boldsymbol{\omega} = \int_0^t \operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\tau,\boldsymbol{x})\,d\tau + \boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{x}). \qquad (9)$$

Для того чтобы удовлетворить последнему уравнению системы (8), можно взять

$$\boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{x}) = \operatorname{rot}\psi(\boldsymbol{x}) \qquad (10)$$

с некоторой функцией $\psi(\boldsymbol{x})$.

Оставшиеся уравнения дают систему для функции θ:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\theta = \rho\boldsymbol{u}_t + \operatorname{rot}(M\cdot\omega)\,,\ \theta_t = \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,, \qquad (10)$$

условия совместности которой таковы:

$$\operatorname{rot}\left(\rho\boldsymbol{u}_t + \operatorname{rot}(M\cdot\omega)\right) = 0\,. \qquad (11)$$

Для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = \operatorname{rot}\left(\rho\boldsymbol{u}_t + \operatorname{rot}(M\cdot\omega)\right)$ справедливы равенства

$$\boldsymbol{f}_t(\boldsymbol{x},t) = \operatorname{rot}\left(\rho\boldsymbol{u}_{tt} + \operatorname{rot}(M\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{u})\right) =$$
$$= \operatorname{rot}\left((\lambda+2\mu)\nabla\theta_t\right) = 0.$$

Это означает, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},0)$. Условия совместности (11) принимают вид

$$\operatorname{rot}\left[\boldsymbol{u}_t|_{t=0} + \operatorname{rot}\left(M\cdot\boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{x})\right)\right] = 0.$$

Эти условия заведомо выполняются, если в качестве $\boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{x})$ взять функцию (10), где $\psi(\boldsymbol{x}) = \left(\psi^1,\psi^2,\psi^3\right)$ – решение линейной эллиптической системы с постоянными коэффициентами

$$\Delta\psi + \left(1-\frac{\mu}{G'}\right)\operatorname{rot}\left(0,0,\psi^2_x-\psi^1_y\right)^T = \frac{1}{G'}\boldsymbol{u}_t|_{t=0}\,. \qquad (12)$$

Итак, функция θ определяется из совместной системы в полных дифференциалах (11), а функция $\boldsymbol{\omega}$ задается формулами (9), (10), (13).

Следствие. Если в системе (8) отбросить последнее уравнение, то оставшаяся эволюционная часть этой системы будет равносильна уравнениям (3) движения нестационарной трансверсально-изотропной упругой среды.

Последнее уравнение в системе (8) делает ее переопределенной, но оставляет пассивной. Роль этого уравнения сводится к уменьшению произвола в выборе дополнительных функций.

Групповое свойство системы (8). Оператор, допускаемый системой (8), ищется в виде

$$X = \xi^0\partial_t + \boldsymbol{\xi}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\eta}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + \sigma\partial_\theta + \boldsymbol{\tau}\cdot\partial_{\boldsymbol{\omega}}\,,$$

где координаты касательного векторного поля группы Ли ξ^0, $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1,\xi^2,\xi^3)^T$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta^1,\eta^2,\eta^3)^T$, σ, $\boldsymbol{\tau} = (\tau^1,\tau^2,\tau^3)^T$ являются функциями от t, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, θ, $\boldsymbol{\omega}$ соответственно.

Решение системы определяющих уравнений с помощью критериев *x*-автономности и линейной автономности, полученных в работах [7–10], показывает, что основная алгебра Ли системы (8) (фактор-алгебра по идеалу, связанному с линейностью системы) является семимерной алгеброй L_7 и порождается операторами

$$X_1 = \partial_x\,,\ X_2 = \partial_y\,,\ X_3 = \partial_z\,,\ X_4 = \partial_t\,,$$
$$X_5 = x\partial_y - y\partial_x + u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + \omega^1\partial_{\omega^2} - \omega^2\partial_{\omega^1}\,,$$
$$X_6 = t\partial_t + \boldsymbol{x}\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} \qquad (13)$$
$$X_7 = \boldsymbol{u}\cdot\partial_{\boldsymbol{u}} + \theta\partial_\theta + \boldsymbol{\omega}\cdot\partial_{\boldsymbol{\omega}}\,,$$

где оператор X_7 – ее центр.

Таким образом, система (8) допускает ту же самую основную группу Ли преобразований, что и уравнения системы (3), только действующую в ином пространстве. Расширение данной группы возможно только в случае $G' = \mu' = \mu$, рассмотренном в работе [6].

Для классификации инвариантных и частично инвариантных решений системы (8) нужно перечислить все неподобные подалгебры алгебры Ли L_7 с базисом (14), т. е. построить оптимальную систему ее подалгебр [11]. Эта задача решена с помощью двухшагового алгоритма, предложенного в работе [12]. Ввиду громоздкости результаты в данной статье не приводятся.

В заключение приведем пример точного решения системы (3), описывающей динамическую деформацию трансверсально-изотропной упругой среды. Решение системы (8), инвариантное относительно подгруппы $H\left\langle X_2, \gamma X_1 + X_4, X_7 + X_2 \right\rangle$, $\gamma > 0$, имеет вид

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(p)e^y,\ \theta = \Theta(p)e^y,\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{g}(p)e^y,\ p = x - \gamma t.$$

Соответствующая фактор-система приводится к виду

$$\gamma f_p^1 + (\lambda + 2\mu)\Theta_p - \mu g^3 = 0,\ \gamma f_p^2 + (\lambda + 2\mu)\Theta + \mu g_p^3 = 0,$$

$$\gamma f_p^3 + G'(g^1 - g_p^2) = 0,\ \gamma\Theta_p + f_p^1 + f^2 = 0,\ \gamma g_p^1 + f^3 = 0,$$

$$\gamma g_p^2 - f_p^3 = 0,\ \gamma g_p^3 + f_p^2 - f^1 = 0,\ g_p^1 + g^2 = 0.$$

Решение системы (3) в данном случае определяется по формулам

$$u^1 = C_1 e^{y + k_1(x - \gamma t)} + C_2 e^{y - k_1(x - \gamma t)} + C_3 e^{y + k_2(x - \gamma t)} + C_4 e^{y - k_2(x - \gamma t)},$$

$$u^2 = k_1 e^y \left(C_2 e^{-k_1(x - \gamma t)} - C_1 e^{k_1(x - \gamma t)} \right) + k_2^{-1} e^y \left(C_3 e^{k_2(x - \gamma t)} - C_4 e^{-k_2(x - \gamma t)} \right),$$

$$u^3 = C_5 e^y \sin\left(\sqrt{\frac{G'}{G' - \gamma^2}} (x - \gamma t) \right) + C_6 e^y \cos\left(\sqrt{\frac{G'}{G' - \gamma^2}} (x - \gamma t) \right),$$

где $k_1 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\gamma^2 - \mu}}$; $k_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\gamma^2 - \lambda - 2\mu}}$; C_i – произвольные постоянные, $i = 1, 2, ..., 6$. При этом также должно выполняться ограничение на модули упругости:

$$\max(\mu, \lambda + 2\mu) < \gamma^2 < G'.$$

Это решение является аналогом волн Рэлея для трансверсально-изотропной упругой среды. Перемещения экспоненциально убывают по y при $y \to -\infty$.

Поверхности уровня для u^1 и u^2 представляют собой бегущие волны цилиндрической формы с образующими, параллельными оси Oz и экспоненциальной кривой на плоскостях, перпендикулярных этой оси. Поверхности уровня для u^3 в каждом сечении плоскостью, перпендикулярной оси Oy, являются бегущими волнами синусоидальной формы.

Библиографические ссылки

1. Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И. Анизотропия упругих свойств материалов // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 49, № 6. С. 131–151.

2. Аннин Б. Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3 (39). С. 5–14.

3. Gassmann F. Introdaction to Seismic Travel Time Metods in Anisotropic Media // Pure Appl. Geophisics. 1964/II. Vol. 58. P. 1–224.

4. Гольдин С. В. Сейсмические волны в анизотропных средах. Новосибирск : Изд-во Сиб. отд-ния Рос. акад. наук, 2008.

5. Carrier G. F. Propagation of Waves in Orthotropic Media // Quarter of Appl. Mathematics. 1946. Vol. 2, № 2. P. 160–165.

6. Чиркунов Ю. А. Групповое расслоение уравнений Ламе классической динамической теории упругости // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 47.

7. Чиркунов Ю. А. Условия линейной автономности основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений // Докл. Рос. акад. наук. 2009. Т. 426, № 5. С. 605–607.

8. Чиркунов Ю. А. Системы линейных дифференциальных уравнений, симметричные относительно преобразований, нелинейных по функции // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 680–686.

9. Чиркунов Ю. А. Системы линейных дифференциальных уравнений с не *x*-автономной основной алгеброй Ли // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. XIV, № 2 (46). С. 112–123.

10. Chirkunov Yu. A. A Criterion for the Existence of a Nonlinear Mapping Whose Jacobian Matrix Commutes with a Matrix Ring // Siberian Advances in Mathematics. 2011. Vol. 21, № 4. P. 250–258.

11. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978.

12. Овсянников Л. В. Об оптимальных системах подалгебр // Докл. Рос. акад. наук. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.

B. D. Annin, Yu. A. Chirkunov, N. F. Belmetzev

GROUP FIBRATION OF TRANSVERSE ISOTROPIC ELASTICITY EQUATIONS

The system of the first order linear differential equations, equivalent to the system of the equations of motion of transverse isotropic elastic media, meeting the Gassmann condition, is obtained and analyzed by means of group analysis.

Keywords: transverse isotropic elastic media, Gassmann condition, group fibration.