УДК 519.248

И. И. Вайнштейн, Г. Е. Михальченко, В. И. Вайнштейн

# АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ВОССТАНОВЛЕНИЙ В ПРОЦЕССЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОРЯДКА $(k_1, k_2)$

*Доказана сходимость распределения числа восстановлений в момент времени $t$ к нормальному распределению для процесса восстановления порядка $(k_1, k_2)$, обобщающего известные в теории надежности простой и общий процессы восстановления.*

*Ключевые слова: процесс восстановления, число восстановлений, функции распределения, асимптотика числа восстановлений.*

В теории надежности процессом восстановления называется последовательность взаимно независимых неотрицательных случайных величин $X_i$ с функциями распределения $F_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ [1, 2]. Для восстанавливаемых элементов процесс восстановления моделирует ситуацию, когда после первого отказа ($X_1$ – наработка элемента от начала работы $(t = 0)$ до первого отказа) элемент восстанавливается или заменяется и работает до следующего отказа ($X_2$ – наработка элемента от первого до второго отказа), затем он восстанавливается или заменяется и работает до следующего отказа и т. д. Время восстановления не учитывается. Считается, что оно пренебрежимо мало по сравнению со временем наработки элемента между отказами.

Существуют различные модели процессов восстановления, отличающиеся разными предположениями относительно функций распределения $F_i(t)$ случайных величин $X_i$. Основной моделью, которая рассматривается в математической теории надежности, является простой процесс восстановления, для которого

$$F_i(t) = F_1(t),\ i = 2, 3, \dots .$$

Процесс восстановления называется *общим* (*запаздывающим*), если $F_i(t) = F_2(t)$, $i = 3, 4, \dots$ .

В данной статье мы будем рассматривать процесс восстановления порядка $(k_1, k_2)$. В этом процессе функции распределения удовлетворяют условию [3; 4]:

$$F_i(t) = F_j(t) \text{ при } i \equiv j (\mathrm{mod}\ k_2),\ i, j \ge k_1 .$$

Последовательность функций распределения для данного процесса имеет вид

$$F_1, F_2, \dots, F_{k_1-1},$$
$$\underbrace{F_{k_1}, F_{k_2+1}, \dots, F_{k_1+k_2-1}}, \underbrace{F_{k_1}, F_{k_2+1}, \dots, F_{k_1+k_2-1}}, \dots,$$

где функции распределения $F_{k_1}, F_{k_2+1}, \dots, F_{k_1+k_2-1}$ образуют повторяющуюся (периодическую) часть рассматриваемого процесса восстановления.

Процессы восстановления порядка (1, 1), (2, 1) (в первом случае $F_i(t) = F_1(t)$, во втором – $F_i(t) = F_2(t)$, $i = 2, 3, \dots$) соответствуют простому и общему (запаздывающему) процессам восстановления. Эти случаи хорошо изучены, особенно в том, что касается асимптотического поведения их различных характеристик [1; 2].

Пусть $N(t)$ – случайное число отказов (восстановлений) за время от нуля до $t$ и $T_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, $k \ge 1$ – моменты отказов (восстановлений). Тогда

$$P\big(N(t) \ge k\big) = P(T_k \le t). \tag{1}$$

Для асимптотического распределения $N(t)$ процесса восстановления порядка (2, 1) (общего процесса) имеет место теорема [2]: пусть случайные величины $X_1$, $X_2$ имеют конечные дисперсии $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} P\left( \frac{N(t) - \dfrac{t}{\mu_2}}{\sigma_2 \sqrt{t \mu_2^{-3}}} \le x \right) = \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $\mu_2 = M(X_2)$, здесь $M(X_i)$ – математическое ожидание случайной величины $X_i$.

Рассмотрим аналог этой теоремы для процесса восстановления порядка $(k_1, k_2)$.

Введем следующие обозначения: $Y_i = X_{k_1+i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, $M(Y_i) = M_i$, $D(Y_i) = D_i = \sigma_i^2$, $D = \sum_{i=1}^{k_2} D_i$, $A = \sum_{i=1}^{k_2} M_i$.

Для последовательности одинаково распределенных случайных величин имеет место центральная предельная теорема [5]: если независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ одинаково распределены и имеют конечную отличную от нуля дисперсию, то при $n \to \infty$ равномерно по $x$

$$P\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M(\xi_k)) < x \right\} \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t_2}{2}} dt,$$

где $B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(\zeta_k)}$.

Докажем аналог этой теоремы для процесса восстановления порядка $(1, k_2)$.

**Теорема 1.** Пусть случайные величины $Y_i$, задающие процесс восстановления порядка $(1, k_2)$, имеют конечные дисперсии $D_i = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, k_2$, хотя бы одна из которых отлична от нуля. Тогда равномерно по $x$

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(Y_i - M(Y_i))}{\sum_{i=1}^{k} D_i} \le x\right) = \Phi(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При сделанных предположениях достаточно проверить, что выполняется условие Линдеберга: при любом $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \int_{|x-M_k|>\tau B_n} (x - M_k)^2 dF_k(x) = 0. \qquad (2)$$

Действительно, пусть $B_n = \sqrt{D\sum_{i=1}^{n} Y_i}$, $n = p_n k_2 + q_n$, где $q_n$ – остаток от деления $n$ на $k_2$ $(q_n < k_2)$. Тогда $B_n = \sqrt{D\sum_{i=1}^{n} Y_i} = \sqrt{p_n D + \sum_{i=1}^{q_n} D_i}$. При $n > k_2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{B_n^2} \int\limits_{|x-M_k|>\tau B_n} (x - M_k)^2 dF_k(x) =$$

$$= \frac{1}{p_n D + \sum_{i=1}^{qn} D_i}\left[\int\limits_{|x-M_1|>\tau B_n} (x - M_1)^2 dF_1(x) + \ldots + \int\limits_{|x-M_{k_2}|>\tau B_n} (x - M_{k_2})^2 dF_{k_2}(x) + \ldots + \int\limits_{|x-M_n|>\tau B_n} (x - M_n)^2 dF_n(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{p + \sum_{i=1}^{q_n} D_i}\left[p_n \int\limits_{|x-M_1|>\tau B_n} (x - M_1)^2 dF_1(x) + \ldots + p_n \int\limits_{|x-M_{k_2}|>\tau B_n} (x - M_{k_2})^2 dF_{k_2}(x) + \sum_{k=1}^{q_n} \int\limits_{|x-M_k|>\tau B_n} (x - M_k)^2 dF_k(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{D + \frac{1}{p_n}\sum_{i=1}^{q_n} D_i}\left[\int\limits_{|x-M_1|>\tau B_n} (x - M_1)^2 dF_1(x) + \ldots + \int\limits_{|x-M_{k_2}|>\tau B_n} (x - M_{k_2})^2 dF_{k_2}(x) + \frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{q_n} \int\limits_{|x-M_k|>\tau B_n} (x - M_k)^2 dF_k(x)\right].$$

Учитывая, что интегралы в правой части последнего равенства стремятся к нулю при $n \to \infty$ (в силу предположения о конечности дисперсий $D_i$) и $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$, получим равенство (2).

**Теорема 2.** Пусть случайные величины $X_i$ имеют конечные дисперсии, хотя бы одна из которых при $k_1 \le i \le k_1 + k_2$ отлична от нуля. Тогда в процессе восстановления порядка $(k_1, k_2)$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{N(t) - \frac{k_2}{A}t}{k_2\sqrt{DtA^{-3}}} \le x\right) = \Phi(x). \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что функции распределения $F_i(t)$, $i = 1, \ldots, k_1 - 1$ не влияют на асимптотическое распределение случайной величины $N(t)$. Запишем $k$ в виде $k = m_k k_2 + q_k$, где $q_k$ – остаток от деления $k$ на $k_2$. Тогда

$$M\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} M(Y_i) = m_k A + \sum_{i=1}^{q_k} M_i = \frac{k - q_k}{k_2} A + \sum_{i=1}^{qk} M_i,$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} D(Y_i) = m_k D + \sum_{i=1}^{q_k} D_i = \frac{k - q_k}{k_2} D + \sum_{i=1}^{q_k} D_i,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}(Y_i - M(Y_i))}{\sum_{i=1}^{k} D_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i - \frac{k - q_k}{k_2} A - \sum_{i=1}^{q_k} M_i}{\sqrt{\frac{k - q_k}{k_2} D + \sum_{i=1}^{q_k} D_i}}.$$

Обозначим

$$Z_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i - \frac{k - q_k}{k_2} A - \sum_{i=1}^{q_k} M_i}{\sqrt{\frac{k - q_k}{k_2} D + \sum_{i=1}^{qk} D_i}}.$$

По теореме 1 имеем

$$\lim_{k\to\infty} P(Z_k \le t) = \Phi(t). \qquad (4)$$

Рассмотрим $P(N(t) \ge k)$:

$$P(N(t) \ge k) = P\left(\frac{N(t) - \frac{tk_2}{A}}{\sqrt{t}} \ge \frac{k - \frac{tk_2}{A}}{\sqrt{t}}\right). \qquad (5)$$

Учитывая (1), получим

$$P(N(t) \ge k) = P\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i \le t\right) =$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} Y_i - \frac{k - q_k}{k_2} A - \sum_{i=1}^{q_k} M_i}{\sqrt{\frac{k - q_k}{k_2} D + \sum_{i=1}^{q_k} D_i}} \le \frac{t - \frac{k - q_k}{k_2} A - \sum_{i=1}^{q_k} M_i}{\sqrt{\frac{k - q_k}{k_2} D + \sum_{i=1}^{q_k} D_i}}\right) =$$

$$= P\left(Z_k \le \frac{t - \frac{kA}{k_2} + \frac{q_k A}{k_2} - \sum_{i=1}^{q_k} M_i}{\sqrt{\frac{D}{k_2}}\sqrt{k - q_k + \frac{k_2}{D}\sum_{i=1}^{q_k} D_i}}\right). \qquad (6)$$

Следуя доказательству теоремы об асимптотическом поведении распределения $N(t)$ для общего процесса восстановления [2; 6], рассмотрим при фиксированном $t$ последовательность $\{z_k\}$, определяемую равенством

$$k = \frac{tk_2}{A} + \sqrt{t} z_k .$$

Из (5) и (6) получим

$$P\left( \frac{N(t) - \frac{tk_2}{A}}{\sqrt{t}} > z_k \right) =$$

$$= P\left( Z_k \le - \frac{\frac{z_k A\sqrt{t}}{k_2} - \frac{q_k A}{k_2} + \sum_{i=1}^{q_k} M_i}{\sqrt{\frac{D}{k_2}} \sqrt{z_k \sqrt{t} + \frac{tk_2}{A} - q_k + \frac{k_2}{D} \sum_{i=1}^{q_k} D}} \right).$$

Предполагая, что $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z$ , из (4) имеем

$$\lim_{t\to\infty} P\left( \frac{N(t) - \frac{tk_2}{A}}{\sqrt{t}} > z \right) = 1 - \Phi\left( \frac{zA}{k_2 \sqrt{\frac{D}{k_2}} \sqrt{\frac{k_2}{A}}} \right) = 1 - \Phi\left( \frac{z\sqrt{A^3}}{k_2 \sqrt{D}} \right).$$

Обозначив $x = \dfrac{z\sqrt{A^3}}{k_2\sqrt{D}}$, окончательно получим

$$\lim_{t\to\infty} P\left( \frac{N(t) - \frac{tk_2}{A}}{k_2 \sqrt{tDA^{-3}}} > x \right) = 1 - \Phi(x).$$

Отсюда следует равенство (3).

Таким образом, для процесса восстановления порядка $(k_1, k_2)$, обобщающего известные в теории надежности простой и общий процессы восстановления, имеет место сходимость распределения числа восстановлений в момент времени $t$ к нормальному распределению $M\left(N(t)\right) = \dfrac{k_2}{A} t$ и $\sigma\left(N(t)\right) = k_2 \sqrt{tDA^{-3}}$ . Этот результат можно использовать, например, для расчета необходимого на данный период времени числа запасных элементов при эксплуатации технических систем.

**Библиографические ссылки**

1. Вопросы математической теории надежности / Е. Ю. Барзилович, Ю. К. Беляев, В. А. Каштанов и др. ; под ред. Б. В. Гнеденко. М. : Радио и связь, 1983.

2. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход : пер. с нем. М. : Радио и связь, 1988.

3. Вайнштейн И. И. Прикладная математика : сб. индивидуал. заданий / Краснояр. политехн. ин-т. Красноярск, 1993.

4. Вайнштейн И. И., Вайнштейн В. И., Вейсов Е. А. О моделях процессов восстановления в теории надежности // Вопросы математического анализа : сб. науч. трудов / под ред. В. И. Половинкина ; Краснояр. гос. техн. ун-т. 2004. Вып. 6. С. 78–84.

5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей : учебник. 6-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1988.

6. Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления : пер. с англ. М. : Сов. радио, 1967.

I. I. Vainshtein, G. E. Mikhalchenko, V. I. Vainshtein

**ASYMPTOTICS OF RENEWAL QUANTITY DISTRIBUTION IN THE PROCESS OF RESTORATION ORDER $(k_1, k_2)$**

*For the process of renewal of the order $(k_1, k_2)$, generalizing the acquainted simple and general processes of restoration in the theory of reliability, there has been proved convergence of the renewal quantity distribution at the $t$ moment to the normal distribution.*

*Keywords: restoration process, number restorations, distribution function, restorations number, asymptotics.*