

При локализации кистей рук людей наилучшие результаты показали методы пороговой сегментации и алгоритм Краскала: 91,75 и 95,38 % соответственно.

Средняя точность при локализации растений пороговой сегментацией составляет 90,9 %, алгоритмом Краскала – 91,2 %.

В ходе экспериментов было выяснено, что алгоритм Виолы–Джонса не подходит для сегментации растений, поскольку в процессе развития они неоднократно меняют свою геометрию, что затрудняет обучение каскадов Хаара. При этом точность локализации не превышает 37 %.

Все вычисления производились на компьютере Intel Core 2 Duo P8400 2,2 MHz, с 4 Гбайтами оперативной памяти. Следует отметить что реализации алгоритмов Виолы–Джонса и Краскала очень требовательны к ресурсам компьютера. Время работы алгоритма Виолы–Джонса превышает порог в 1 с при об-

работке небольших изображений, например при обработке изображения с размером 1 024×768 – более 3 с, при этом алгоритм Краскала выполняется за 0,4 с.

#### Библиографические ссылки

1. Бузаев Д. В., Зотин А. Г., Носов А. В. Сравнение методов для системы локализации и обнаружения лиц // Молодежь Сибири – науке России : материалы науч.-практ. конф. Красноярск, 2011.
2. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений : пер. с англ. М. : Техносфера, 2006.
3. Felzenszwalb P. F., Huttenlocher D. P. Efficient Graph-Based Image Segmentation // Intern. J. of Computer Vision. 2004. Vol. 59, № 2. P. 37–44.
4. Viola P., Jones M. Robust Real-Time Object Detection // Intern. J. of Computer Vision. Kluwer Academic Publishers, 2004. P. 137–154.

A. G. Zotin, A. V. Nosov, D. V. Buzaev

#### ANALYSIS OF SUITABILITY OF SEGMENTATION METHODS BASED ON COLOR AND STRUCTURAL FEATURES FOR LOCALIZATION OF OBJECTS

*The existing methods of segmentation, according to color and structural features, are considered. The algorithms of the most widely known methods of segmentation based on thresholding, graphs, and cascades are described. Results of the analysis of segmentation methods suitability for objects localization are shown for the cases of plants, people's faces and areas of the hands.*

*Keywords: image analysis, segmentation, threshold processing, the Kruskal's algorithm, Haar's cascades.*

© Зотин А. Г., Носов А. В., Бузаев Д. В., 2012

УДК 517.972.5

И. А. Лопатин

#### РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПО ВЫБОРУ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

*Представлено решение задачи о выборе закона изменения поперечного сечения стержня, обеспечивающего восприятие максимальной сжимающей силы при заданном объеме материала.*

*Ключевые слова: стержень, устойчивость, оптимизация.*

Осесимметричные пространственные фермы, составленные из прямолинейных стержней, нашли широкое применение в качестве адаптеров полезной нагрузки. Расчет таких конструкций проводится в предположении, что стержни фермы соединены шарнирно, а основным видом разрушения стержня является потеря устойчивости при действии на него сжимающей силы.

Стержни фермы в большинстве конструкций имеют постоянное по длине поперечное сечение. Однако использование в ферме стержней с переменным поперечным сечением позволяет создавать более эффективные конструкции [1; 2].

Рассмотрим шарнирно опертый стержень длиной  $l$ , нагруженный сжимающей силой  $P$ . Пусть стержень имеет круглое поперечное сечение, радиус которого  $r$

зависит от продольной координаты  $x$ . Длина стержня  $l$  и его объем  $V_0$  являются заданными величинами. Необходимо подобрать закон изменения радиуса поперечного сечения, который обеспечивает максимум критической силы  $P$  при известном объеме стержня  $V_0$ .

Сформулируем условие этой задачи как задачи вариационного исчисления. Объем стержня  $V_0$  определяется функционалом

$$V_0 = \int_0^l \pi [r(x)]^2 dx, \quad (1)$$

где  $r(x)$  – зависимость радиуса стержня от продольной координаты.

Уравнение устойчивости стержня имеет вид

$$w_{xx} + \frac{Pw}{EJ(x)} = 0, \quad (2)$$

где  $w(x)$  – прогиб стержня;  $E$  – модуль упругости;  $J(x)$  – момент инерции поперечного сечения.

На краях стержня выполняются следующие граничные условия:

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \quad (3)$$

Момент инерции круглого поперечного сечения будет

$$J(x) = \frac{\pi[r(x)]^4}{4}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим

$$[r(x)]^4 = -\frac{\mu^2 w}{w_{xx}}, \quad (5)$$

где

$$\mu^2 = \frac{4P}{\pi E}. \quad (6)$$

Подстановка  $[r(x)]^2$  из (5) и параметра  $\mu$  из (6) в функционал (1) дает

$$\frac{V_0 \sqrt{E}}{2\sqrt{\pi P}} = \int_0^l \sqrt{-\frac{w}{w_{xx}}} dx. \quad (7)$$

Объем  $V_0$  в уравнении (7) является постоянным. Поэтому минимум функционала

$$I = \int_0^l \sqrt{-\frac{w}{w_{xx}}} dx \quad (8)$$

обеспечивает максимум критической силы  $P$ .

Уравнение Эйлера сформулированной вариационной задачи будет следующим:

$$-w_{xx} \sqrt{-\frac{w}{w_{xx}^3}} + \left( \sqrt{-\frac{w}{w_{xx}^3}} \right)_{xx} w = 0. \quad (9)$$

С помощью замены

$$v = \sqrt{-\frac{w}{w_{xx}^3}} \quad (10)$$

дифференциальное уравнение (9) приводится к виду

$$(v_x w - v w_x)_x = 0. \quad (11)$$

Интегрируя уравнение (11) с учетом граничных условий (3) и того, что  $v(0) = 0$ , запишем его решение:

$$\sqrt{-\frac{w}{w_{xx}^3}} = c w, \quad (12)$$

где  $c$  – постоянная интегрирования. Форма потери устойчивости стержня определяется с точностью до произвольного множителя  $c$ , для удобства принятого равным единице:

$$w = -\frac{1}{w_{xx}^3}. \quad (13)$$

Умножим обе части уравнения (13) на  $2w_x$ :

$$2w_x w_{xx} = -2w_x w^{-1/3}. \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (14), получим

$$w_x = \sqrt{3} \sqrt{a^2 - w^{2/3}}. \quad (15)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (15) с помощью замены  $w = u^3$ ,  $dw = 3u^2 du$ , найдем общий интеграл уравнения (9):

$$x = \sqrt{3} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} + C. \quad (16)$$

Выполняя интегрирование в (16), получим общее решение дифференциального уравнения (9):

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \left[ \arcsin \frac{\sqrt[3]{w}}{a} - \frac{\sqrt[3]{w}}{a} \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt[3]{w}}{a} \right)^2} \right] + C, \quad (17)$$

где  $a$  и  $C$  – постоянные краевой задачи, которые находятся из граничных условий (3):

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{3}}}, \quad C = 0. \quad (18)$$

Подстановка  $w_{xx}$  из соотношения (13) в (5) дает следующее выражение для  $r(x)$ :

$$r^3 = \sqrt{\mu^3 w}. \quad (19)$$

С учетом (18) и (19) общее решение дифференциального уравнения (9) можно записать в виде

$$x = \frac{l}{\pi} \left[ \arcsin \frac{r}{r_0} - \frac{r}{r_0} \sqrt{1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2} \right], \quad (20)$$

где

$$r_0^4 = \frac{16l^2 P}{3\pi^3 E}. \quad (21)$$

На основе решения дифференциального уравнения (20) получено следующее трансцендентное уравнение для определения оптимального закона  $r(x)$ :

$$\arcsin \gamma - \gamma \sqrt{1 - \gamma^2} - \pi \cdot s = 0, \quad (22)$$

где

$$\gamma = \frac{r}{r_0}; \quad s = \frac{x}{l}. \quad (23)$$

Для того чтобы уравнение (22) имело вещественные корни, достаточно, чтобы значения параметра  $s$  изменялись в следующих пределах:

$$0 \leq s \leq 0,5. \quad (24)$$

Численное решение уравнения (22) было выполнено в приложении MATLAB. Для 100 значений параметра  $s$  (начальное значение параметра равно 0, шаг изменения параметра = 0,05) из промежутка (24) было найдено значение корня  $\gamma$  (см. таблицу).

Полученные результаты были аппроксимированы методами регрессионного анализа с помощью приложения Curve Expert (рис. 1). Аппроксимирующая функция имеет следующий вид:

$$\gamma = \frac{ab + c \cdot s^d}{b + s^d}, \quad (25)$$

где  $a = 4,683 \ 938 \cdot 10^{-3}$ ;  $b = 4,683 \ 938 \cdot 10^{-3}$ ;  $c = 1,401 \ 818$ ;  $d = 5,531 \ 215 \cdot 10^{-1}$ .

Значения корня  $\gamma$  для некоторых значений параметра  $s$

$s$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$\gamma$	0,592 751	0,726 609	0,810 933	0,870 672	0,914 770
$s$	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\gamma$	0,947 521	0,971 293	0,987 481	0,996 904	1,000 000

Учитывая (23), получим

$$r = r_0 f(x), \quad (26)$$

где

$$f(x) = \frac{ab + c \left(\frac{x}{l}\right)^d}{b + \left(\frac{x}{l}\right)^d}. \quad (27)$$

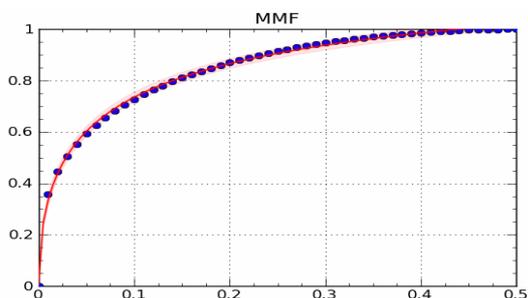


Рис. 1. График аппроксимирующей функции

Подставляя выражение для  $r(x)$  из (26) в (1), для заданного объема  $V_0$  имеем

$$r_0 = \sqrt{\frac{V_0}{\pi \int_0^l f^2(x) dx}}. \quad (28)$$

Из уравнения (21) следует выражение для максимальной критической силы:

$$P = \frac{3\pi^3 E r_0^4}{16l^2}. \quad (29)$$

Подставляя (28) в уравнение (29) для максимальной критической силы  $P$ , получаем

$$P = \frac{3\pi^3 E}{16l^2} \cdot \frac{V_0^2}{\left(\int_0^l f^2(x) dx\right)^2}. \quad (30)$$

Так как объем материала постоянный, то

$$V_0 = 4\pi I l^2, \quad (31)$$

где  $I$  – момент инерции стержня, имеющего постоянное поперечное сечение.

Подставляя (31) в выражение для максимальной критической силы (30), получим

$$P = \frac{3}{4} \frac{1}{\left(\int_0^l f^2(x) dx\right)^2} \cdot \frac{EI\pi^2}{l^2} = \varphi \cdot P_c, \quad (32)$$

где  $P_c$  – максимальная критическая сила для стержня постоянного поперечного сечения.

Интеграл в выражении (32) определялся численно с помощью приложения MATLAB:

$$\int_0^l f^2(x) dx = 0,749 292 \cdot l. \quad (33)$$

Подставим (33) в (32):

$$\varphi \approx 1,36. \quad (34)$$

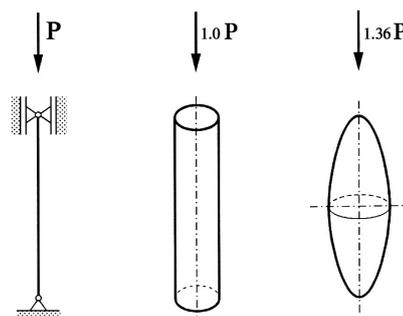


Рис. 2. Сравнение различных форм стержня

Анализ различных форм стержня показывает, что при заданном объеме  $V_0$  использование переменного поперечного сечения, является оптимальным, повышает на 36 % критическую силу по сравнению с критической силой стержня, имеющего постоянное поперечное сечение (рис. 2).

#### Библиографические ссылки

1. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М. : Гостехтеоретиздат, 1955.
2. Николаи Е. Л. Труды по механике. М. : Гостехтеоретиздат, 1955.

I. A. Lopatin

#### SOLUTION OF THE VARIATIONAL PROBLEM FOR THE OPTIMAL COMPRESS ROD SHAPE

The paper provides the solution of the problem of choosing the law of change of cross section of a rod, providing for sensing the maximum compressive force for a given volume of material.

Keyword: rod, stability, optimization.