

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ МАКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

На основе структурного подхода предложен метод для построения поверхности прочности макронеоднородных композитов в пространстве параметров внешнего воздействия, при этом используются физические соотношения для композитного материала, которые учитывают корректно сформулированные условия сопряжения на границах раздела фаз. Для случая плоского напряженного состояния дан численный анализ влияния характера анизотропии элементов субструктуры, их прочностных свойств, объемного содержания и взаимного расположения на условие начала разрушения композитного материала.

Ключевые слова: макронеоднородные композиты, поверхность начального разрушения.

Перспективы применения композитов, составленных из различных субструктурных элементов и существенно отличающихся по своим механическим свойствам, связаны с новыми технологическими решениями в различных отраслях промышленности. Поэтому особую актуальность приобретает задача прогнозирования прочности макронеоднородных материалов по известным свойствам компонентов, их концентрации и расположению в пространстве.

Литература по исследованию прочности композитных материалов достаточно обширна, поэтому укажем источники [1–9], в которых представлены более полные списки работ по данному вопросу. Не анализируя различия используемых методов и моделей, отметим только, что часть этих работ относится к исследованию разрушения анизотропных материалов на основе феноменологических критериев прочности, а другая часть содержит элементы структурного анализа, в частности традиционного послойного анализа. В этих работах при выводе определяющих соотношений, как правило, используется либо закон смесей, либо предположения Фойгта или Рейсса.

Основные соотношения и алгоритм исследования прочности структурно-неоднородных композитов. Для исследования прочности структурно-неоднородных материалов будем использовать обобщенный закон Гука, полученный в [10], на основе корректно сформулированных условий сопряжения на границах раздела фаз в общем случае пространственного напряженного состояния.

В частности, для композита, состоящего из M продольных фаз (рис. 1) при плоском напряженном состоянии, т. е. при нагружении в плоскости n_1On_3 усилиями $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$, учитывая соотношения из [10], имеем следующие выражения для напряжений в элементах композиции:

$$\sigma_i^{(s)} = B_{i1}^{(s)} \sigma_1 + B_{i3}^{(s)} \sigma_3, \quad \sigma_5^{(s)} = \sigma_5, \quad \sigma_2^{(s)} = \sigma_4^{(s)} = \sigma_6^{(s)} = 0, \quad i=1,3, \quad s=1,2,\dots,M, \quad (1)$$

где

$$B_{ji}^{(s)} = b_{ji} \beta_{ij}^{(s)} + b_{i3} \beta_{3j}^{(s)}, \quad j=1,3,$$

здесь

$$B_{55}^{(s)} = \left[a_{55}^{(s)} \sum_{s=1}^M \frac{\omega_s}{a_{55}^{(s)}} \right]^{-1}, \quad \beta_{11}^{(s)} = \frac{a_{33}^{(s)}}{\Delta_{13}^{(s)}}, \quad \beta_{33}^{(s)} = \frac{a_{11}^{(s)}}{\Delta_{13}^{(s)}},$$

$$\beta_{12}^{(s)} = \frac{a_{13}^{(s)} a_{23}^{(s)} - a_{12}^{(s)} a_{33}^{(s)}}{\Delta_{13}^{(s)}}, \quad \beta_{32}^{(s)} = \frac{a_{12}^{(s)} a_{13}^{(s)} - a_{11}^{(s)} a_{23}^{(s)}}{\Delta_{13}^{(s)}}, \quad (2)$$

$$\beta_{13}^{(s)} = \beta_{31}^{(s)} = -\frac{a_{13}^{(s)}}{\Delta_{13}^{(s)}}, \quad \Delta_{13}^{(s)} = a_{11}^{(s)} a_{33}^{(s)} - \left(a_{13}^{(s)} \right)^2,$$

$$b_{kl} = \frac{|\bar{A}_{kl}|}{|A_{kl}|}, \quad k, l=1,2,3, \quad (3)$$

$|A_{kl}|$ – определитель матрицы (A_{kl}) , $|\bar{A}_{kl}|$ – алгебраическое дополнение к элементу A_{kl} матрицы (A_{kl}) , при этом элементы матрицы (A_{kl}) имеют вид

$$A_{ji} = \gamma_{ji} + \gamma_{j2} A_{2i}, \quad i, j=1,3,$$

$$A_{12} = A_{21} = -A_{22} \cdot \sum_{s=1}^M \omega_s \delta_{21}^{(s)},$$

$$A_{22} = \left(\sum_{s=1}^M \omega_s \delta_{22}^{(s)} \right)^{-1}, \quad A_{23} = A_{32} = \gamma_{32} A_{22}, \quad (4)$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{s=1}^M \omega_s \beta_{ij}^{(s)}, \quad i=1,3, \quad j=1,2,3,$$

$$\delta_{21}^{(s)} = a_{12}^{(s)} \beta_{11}^{(s)} + a_{23}^{(s)} \beta_{13}^{(s)},$$

$$\delta_{22}^{(s)} = a_{12}^{(s)} \beta_{12}^{(s)} + a_{23}^{(s)} \beta_{32}^{(s)} + a_{22}^{(s)}.$$

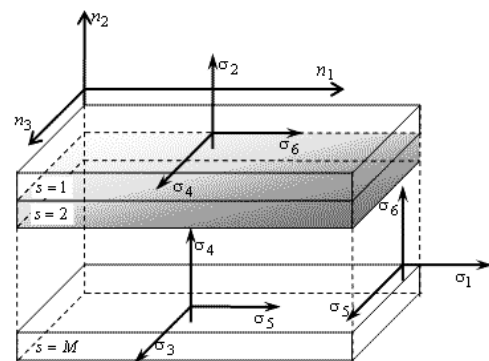


Рис. 1. Характерный структурный элемент композита с продольным расположением M фаз

Здесь и далее для напряжений используются матричные обозначения из [9; 10]; верхний индекс s обо-

значает принадлежность соответствующей величины к s -й фазе; $a_{ij}^{(s)}$, $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $a_{ij}^{(s)} = a_{ji}^{(s)}$ – коэффициенты податливости в обобщенном законе Гука для материала s -й фазы:

$$\varepsilon_i^{(s)} = a_{ij}^{(s)} \sigma_j^{(s)} \quad (5)$$

(суммирование производится по повторяющимся индексам); ω_s – удельное объемное содержание s -й фазы, $\sum_{s=1}^M \omega_s = 1$.

В случае поперечного расположения M фаз, когда граница раздела фаз параллельна плоскости $n_2 On_3$ (см. рис. 1) для рассматриваемого плоского напряженного состояния выражения для напряжений в элементах субструктуры определяются следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(s)} &= \sigma_1, \quad \sigma_i^{(s)} = B_{i1}^{(s)} \sigma_1 + B_{i3}^{(s)} \sigma_3, \\ \sigma_5^{(s)} &= \sigma_5, \quad \sigma_4^{(s)} = \sigma_6^{(s)} = 0, \quad i = 2, 3, \quad s = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} B_{i1}^{(s)} &= b_{12} \beta_{i2}^{(s)} + b_{13} \beta_{i3}^{(s)} + \beta_{i1}^{(s)}, \\ B_{i3}^{(s)} &= b_{23} \beta_{i2}^{(s)} + b_{33} \beta_{i3}^{(s)}, \quad i = 2; 3, \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} \beta_{21}^{(s)} &= \frac{a_{13}^{(s)} a_{23}^{(s)} - a_{12}^{(s)} a_{33}^{(s)}}{\Delta_{23}^{(s)}}, \\ \beta_{22}^{(s)} &= \frac{a_{33}^{(s)}}{\Delta_{23}^{(s)}}, \quad \beta_{23}^{(s)} = \beta_{32}^{(s)} = -\frac{a_{23}^{(s)}}{\Delta_{23}^{(s)}}, \\ \beta_{31}^{(s)} &= \frac{a_{12}^{(s)} a_{23}^{(s)} - a_{13}^{(s)} a_{22}^{(s)}}{\Delta_{23}^{(s)}}, \quad \beta_{33}^{(s)} = \frac{a_{22}^{(s)}}{\Delta_{23}^{(s)}}, \\ \Delta_{23}^{(s)} &= a_{22}^{(s)} a_{33}^{(s)} - \left(a_{23}^{(s)}\right)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

коэффициенты b_{kl} , $k, l = 1, 2, 3$, определяются, так же как в (3), при этом элементы матрицы (A_{kl}) имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{s=1}^M \omega_s \delta_{11}^{(s)}, \quad A_{li} = -A_{1l} \cdot \sum_{s=1}^M \omega_s \delta_{li}^{(s)}, \quad i = 2, 3, \\ A_{ji} &= \gamma_{ji} + \gamma_{j1} A_{li}, \quad i, j = 2, 3, \\ \gamma_{ij} &= \sum_{s=1}^M \omega_s \beta_{ij}^{(s)}, \quad i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \\ \delta_{11}^{(s)} &= a_{11}^{(s)} + a_{12}^{(s)} \beta_{21}^{(s)} + a_{13}^{(s)} \beta_{31}^{(s)}, \\ \delta_{li}^{(s)} &= a_{12}^{(s)} \beta_{2i}^{(s)} + a_{13}^{(s)} \beta_{3i}^{(s)}, \quad i = 2, 3. \end{aligned} \quad (8)$$

На основе структурного подхода [6] проведем анализ прочности многофазного композита. При этом будем полагать, что для каждого субструктурного элемента выполняется условие прочности П. П. Баландина [11], которое позволяет учитывать различные пределы прочности при растяжении $\sigma_+^{(s)}$ и сжатии $\sigma_-^{(s)}$ материала s -й фазы.

В случае продольного расположения фаз (см. рис. 1) имеем следующее условие прочности для материала s -й фазы:

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_1^{(s)}\right)^2 + \left(\sigma_3^{(s)}\right)^2 - \sigma_1^{(s)} \sigma_3^{(s)} + 3\left(\sigma_5^{(s)}\right)^2 + \\ &+ \left(\sigma_-^{(s)} - \sigma_+^{(s)}\right) \left(\sigma_1^{(s)} + \sigma_3^{(s)}\right) = \sigma_-^{(s)} \cdot \sigma_+^{(s)}, \end{aligned} \quad (9)$$

а для поперечного расположения фаз – условия прочности

$$\begin{aligned} &\sigma_1^2 + \left(\sigma_2^{(s)}\right)^2 + \left(\sigma_3^{(s)}\right)^2 - \sigma_1 \sigma_2^{(s)} - \sigma_1 \sigma_3^{(s)} - \sigma_2^{(s)} \sigma_3^{(s)} + \\ &+ 3\sigma_5^2 + \left(\sigma_-^{(s)} - \sigma_+^{(s)}\right) \left(\sigma_1 + \sigma_2^{(s)} + \sigma_3^{(s)}\right) = \sigma_-^{(s)} \cdot \sigma_+^{(s)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$s = 1, 2, \dots, M$.

Для построения условия прочности макронеоднородного композита в пространстве внешних усилий $\sigma_1 \sigma_3 \sigma_5$ воспользуемся алгоритмом [12]. Примем

$$\sigma_i = L_i p, \quad \sum_{l=1,3,5} |L_l| = 1, \quad L_l \in [-1; 1], \quad (11)$$

где L_i – интенсивность i -го типа внешнего воздействия, $i = 1, 3, 5$; $p > 0$ – параметр нагружения. Тогда из (9) и (10), учитывая (1), (6) и (11) при фиксированных L_i , получим величину параметра нагружения $p_b^{(s)}$, отвечающую началу разрушения s -й фазы:

$$p_b^{(s)} = \frac{-C^{(s)} + \sqrt{\left(C^{(s)}\right)^2 + 4\sigma_+^{(s)} \sigma_-^{(s)} A^{(s)}}}{2A^{(s)}}, \quad (12)$$

$s = 1, 2, \dots, M$,

где выражения для $A^{(s)}$ и $C^{(s)}$ в случае продольного расположения фаз имеют вид

$$\begin{aligned} A^{(s)} &= \left(\varphi_1^{(s)}\right)^2 + \left(\varphi_3^{(s)}\right)^2 - \varphi_1^{(s)} \varphi_3^{(s)} + 3\left(\varphi_5^{(s)}\right)^2, \\ C^{(s)} &= \left(\sigma_-^{(s)} - \sigma_+^{(s)}\right) \left(\varphi_1^{(s)} + \varphi_3^{(s)}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\varphi_i^{(s)} = B_{i1}^{(s)} L_1 + B_{i3}^{(s)} L_3, \quad i = 1, 3, \quad \varphi_5^{(s)} = B_{55}^{(s)} L_5,$$

$B_{ij}^{(s)}$, $i, j = 1, 3, 5$, определены в (1)–(4), а в случае поперечного расположения фаз – вид

$$\begin{aligned} A^{(s)} &= L_1^2 + \left(\varphi_2^{(s)}\right)^2 + \left(\varphi_3^{(s)}\right)^2 + 3L_5^2 - \\ &- L_1 \left(\varphi_2^{(s)} + \varphi_3^{(s)}\right) - \varphi_2^{(s)} \varphi_3^{(s)}, \\ C^{(s)} &= \left(\sigma_-^{(s)} - \sigma_+^{(s)}\right) \left(L_1 + \varphi_2^{(s)} + \varphi_3^{(s)}\right), \\ \varphi_i^{(s)} &= B_{i1}^{(s)} L_1 + B_{i3}^{(s)} L_3, \end{aligned} \quad (14)$$

$B_{ij}^{(s)}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 3$, определены в (6)–(8).

Величину нагрузки p_b , соответствующую началу разрушения композита, представим следующим образом:

$$p_b = \min_s \left\{ p_b^{(s)} \right\}, \quad s = 1, 2, \dots, M. \quad (15)$$

Тогда, учитывая первые соотношения из (11) и (15), найдем внешние усилия, при которых начинается разрушение многофазного материала:

$$\sigma_{ib} = L_i p_b, \quad i = 1, 3, 5. \quad (16)$$

Затем, придавая коэффициентам L_i все возможные значения из второго соотношения (11), получим поверхность прочности композита в пространстве внешних усилий $\sigma_{1b} O \sigma_{3b} \sigma_{5b}$.

Анализ влияния структуры многофазной среды на условие начального разрушения композита. В качестве примера рассмотрим структурно-неоднородный материал в случае $M = 2$, обе фазы которого являются различными трансверсально изотропными материалами. Тогда имеем следующие выражения для коэффициентов податливости [9]:

$$a_{ii}^{(s)} = \frac{1}{E_1^{(s)}}, \quad a_{i3}^{(s)} = -\frac{\nu_2^{(s)}}{E_2^{(s)}}, \quad i = 1, 2,$$

$$a_{12}^{(s)} = -\frac{\nu_1^{(s)}}{E_1^{(s)}}, \quad a_{33}^{(s)} = \frac{1}{E_2^{(s)}},$$

$$a_{jj}^{(s)} = \frac{1}{G_2^{(s)}}, \quad j = 4, 5, \quad a_{66}^{(s)} = \frac{1}{G_2^{(s)}},$$

$$G_1^{(s)} = \frac{E_1^{(s)}}{2(1 + \nu_1^{(s)})}, \quad s = 1, 2,$$

где $E_1^{(s)}, E_2^{(s)}$ – модули Юнга; $G_1^{(s)}, G_2^{(s)}$ – модули сдвига; $\nu_1^{(s)}, \nu_2^{(s)}$ – коэффициенты Пуассона материала s -й фазы.

Конкретные вычисления были проведены при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1^{(1)} &= 15; \quad \bar{E}_1^{(2)} = 1; \quad \bar{E}_2^{(1)} = 5; \quad \bar{E}_2^{(2)} = 3; \\ \bar{G}_2^{(1)} &= 1; \quad \bar{G}_2^{(2)} = 0,25; \\ \nu_1^{(1)} &= \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(1)} = \nu_2^{(2)} = 0,25; \\ \bar{\sigma}_+^{(1)} &= 10; \quad \bar{\sigma}_-^{(1)} = 30; \quad \bar{\sigma}_-^{(2)} = 3, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\bar{E}_i^{(s)} = \frac{E_i^{(s)}}{E_0}$, $i = 1, 2$, $s = 1, 2$; $\bar{G}_2^{(s)} = \frac{G_2^{(s)}}{E_0}$;

$\bar{\sigma}_\pm^{(s)} = \frac{\sigma_\pm^{(s)}}{\sigma_0}$; $\bar{\sigma}_{jb} = \frac{\sigma_{jb}}{\sigma_0}$, $j = 1, 3, 5$, здесь σ_0, E_0 – постоянные размерности напряжения.

Поверхности прочности макронеоднородного композита и их сечения плоскостью $\sigma_{5b} = 0$, определенные в соответствии с параметрами (17), представлены ниже (рис. 2–6).

На рис. 3, 5, 6 для сплошных кривых, в силу ограниченности размеров рисунков, приведена лишь часть соответствующих эллипсов. Вид начального разрушения указан около каждого гладкого участка кривой: символ ① отмечает начало разрушения композитного материала вследствие разрушения 1-й фазы, символ ② – вследствие разрушения 2-й фазы, угловые

точки кривой отвечают одновременному разрушению 1-й и 2-й фаз.

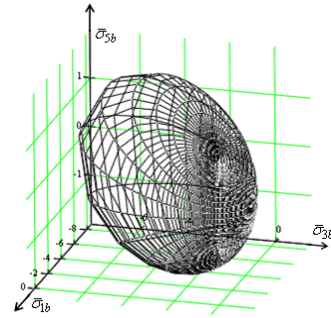


Рис. 2. Поверхность прочности макронеоднородного композита в случае поперечного расположения фаз ($\omega_1 = 0,2$, $\bar{\sigma}_+^{(2)} = 1$)

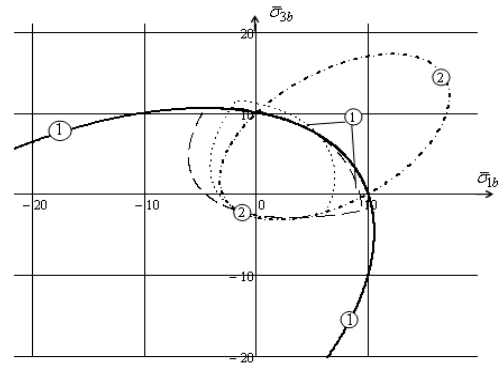


Рис. 3. Сечение поверхности прочности двухфазного композита плоскостью $\sigma_{5b} = 0$ в случае поперечного расположения фаз ($\bar{\sigma}_+^{(2)} = 10$):
— $\omega_1 = 1$; $\cdots$ — $\omega_1 = 0,2$; $----$ — $\omega_1 = 0,8$; $- - -$ — $\omega_1 = 0$

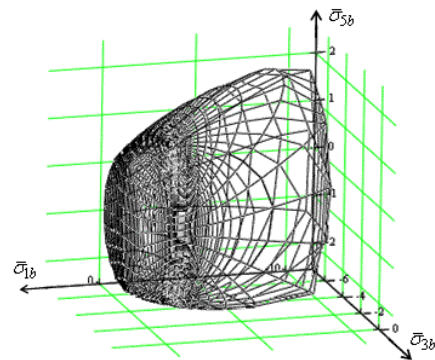


Рис. 4. Поверхность прочности макронеоднородного композита в случае продольного расположения фаз ($\omega_1 = 0,2$, $\bar{\sigma}_+^{(2)} = 1$)

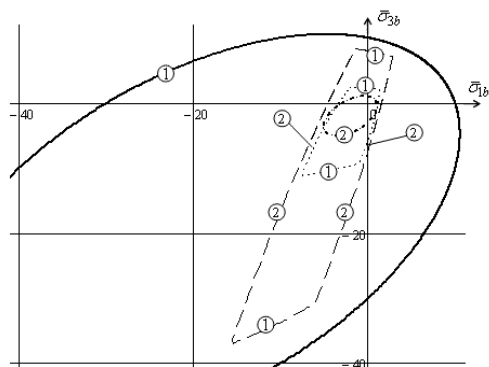


Рис. 5. Сечение поверхности прочности двухфазного композита плоскостью $\bar{\sigma}_{5b} = 0$ в случае продольного

расположения фаз ($\bar{\sigma}_+^{(2)} = 1$):

— $\omega_1 = 1$; ... — $\omega_1 = 0,2$; ---- — $\omega_1 = 0,8$; -.- - $\omega_1 = 0$

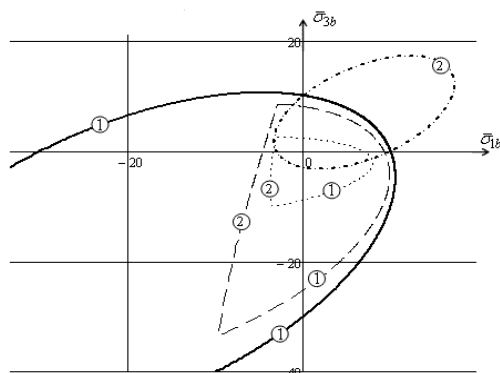


Рис. 6. Сечение поверхности прочности двухфазного композита плоскостью $\bar{\sigma}_{5b} = 0$ в случае продольного

расположения фаз ($\bar{\sigma}_+^{(2)} = 10$):

— $\omega_1 = 1$; ... — $\omega_1 = 0,2$; ---- — $\omega_1 = 0,8$; -.- - $\omega_1 = 0$

Анализ полученных результатов (см. рис. 2–6) и расчеты для различных макронеоднородных композитов показали, что за счет изменения характера анизотропии субструктурных элементов, их объемного содержания и взаимного расположения можно целенаправленно проектировать многофазные материалы

с требуемыми по условиям эксплуатации прочностными свойствами.

Библиографические ссылки

1. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига : Зинатне, 1967.
2. Ашкенази Е. К. Анизотропия машино-строительных материалов. Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1969.
3. Ву Э. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. Т. 2 : Механика композиционных материалов / под ред. Дж. Сендечки. М. : Мир, 1978.
4. Прочность и разрушение композитных материалов : тр. 2-го Сов.-амер. симп. Рига : Зинатне, 1983.
5. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Мир, 1982.
6. Немировский Ю. В., Резников Б. С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
7. Максименко В. Н., Олегин И. П. Теоретические основы методов расчета прочности элементов конструкций из композитов. Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. техн. ун-та, 2006.
8. Полилов А. Н. Этюдные задачи механики композитов : учеб. пособие / Учеб.-науч. испытат. комплекс для техн. ун-тов Москвы ; Ин-т машиноведения Рос. акад. наук. М., 2004.
9. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М. : Наука, 1977.
10. Резников Б. С., Никитенко А. Ф., Кучеренко И. В. Прогнозирование макроскопических свойств структурно-неоднородных сред // Изв. вузов. Строительство. 2008. № 2. С. 10–17.
11. Баландин П. П. К вопросу о гипотезах прочности // Вестн. инженеров и техников. 1937. № 1. С. 19–24.
12. Резников Б. С. Прогнозирование разрушения кольцевых пластин с учетом реальной структуры и стохастической природы армированного материала // Краевые задачи и их приложения : сб. науч. тр. / Чуваш. гос. ун-т. Чебоксары, 1989. С. 89–99.

V. N. Maksimenko, B. S. Reznikov, O. V. Sheremet

STRUCTURAL ANALYSIS OF DURABILITY OF MACROHETEROGENEOUS SOLIDS UNDER PLANE STRESS STATE

The authors propose a method, based on the structural approach, for construction of a surface of resistance, in an interspace of characteristics of external action. The authors take into account physical correlations for a composite material which take into account the correctly formulated boundary conditions at the interface between phases. A numerical analysis is performed to study the effect of anisotropic properties of the substructural elements, their strength, volume fraction, and relative position, on the rupture of a composite material.

Keywords: macroheterogeneous composites, initial failure surface.

© Максименко В. Н., Резников Б. С., Шеремет О. В., 2012