

В [1] рассмотрены кубатурные формулы

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \quad (17)$$

с 2^d узлами $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in [0, 1]^n$, образующими Π_τ -сетки ($0 \leq \tau < d$), и доказано, что они точны на полиномах Хаара степеней $s \leq d - \tau$. В данной статье доказано асимптотическое равенство [1] для нормы функционала погрешности таких формул на пространствах H_α

$$\|\delta_N\|_{H_\alpha}^* = O(N^{-\alpha} \ln^{n-1} N), N \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что норма функционала погрешности $\|\delta_N\|_{H_\alpha}^*$ формул, изученных автором данной статьи, при $N \sim 2^d$, $d \rightarrow \infty$ тоже ограничена по сравнению с $N^{-\alpha} \ln N$, $N \rightarrow \infty$.

В частности, условию $N \sim 2^d$, $d \rightarrow \infty$ удовлетворяют кубатурные формулы, построенные в [3]. Данные формулы являются в некотором смысле обобщением формул, исследованных в [1] для случая $n = 2$. В то же время они, будучи минимальными формулами приближенного интегрирования, обеспечивают наилучшую поточечную сходимость $\delta_N[f]$ к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Библиографические ссылки

1. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара : монография. М. : Наука, 1969.
2. Кириллов К. А., Носков М. В. Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. математики и мат. физики. Т. 42. № 6. С. 791–799.
3. Кириллов К. А. Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара высших степеней в двумерном случае // Вычисл. технологии : спец. выпуск, посвящ. 50-летию Краснояр. гос. техн. ун-та. Т. 10. Красноярск, 2005. С. 29–47.
4. Noskov M. V., Kirillov K. A. Minimal Cubature Formulas Exact for Haar Polynomials // J. of Approximation Theory. 2010. Vol. 162, Iss. 3. P. 615–627.
5. Кириллов К. А. Алгоритм построения минимальных кубатурных формул, обладающих d -свойством Хаара в двумерном случае // Журн. Сиб. федер. ун-та. Серия «Математика и физика». 2010. Т. 3. № 2. С. 205–215.
6. Кириллов К. А., Носков М. В. Оценки погрешности на пространствах S_p кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49. № 1. С. 3–13.
7. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Annalen. 1910. Vol. 69. S. 331–371.

K. A. Kirillov

ON ERROR ESTIMATES FOR CUBATURE FORMULAS EXACT FOR HAAR POLYNOMIALS

On the spaces H_α the estimates are found for the norm of the error functional $\delta_N[f]$ of cubature formulas possessing the Haar d -property in the two-dimensional case.

Keywords: Haar d -property, error estimate for cubature formula.

© Кириллов К. А., 2012

УДК 004.932

Д. Ю. Колосов

ОЦЕНКА ДВИЖЕНИЯ В ВИДЕОПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ ТЕНЗОРНОГО ПОДХОДА

Рассмотрен подход к оценке движения с использованием ориентированного тензора. Представлен алгоритм построения оптического потока. Разработано программное обеспечение, с помощью которого проведены экспериментальные исследования.

Ключевые слова: оценка движения, ориентированные тензоры.

Информация о движении в видеопоследовательности может быть использована в разных областях: сжатия видео, в системах видеонаблюдения, при реализации интерфейса между человеком

и компьютером, в системах анализа дорожного трафика и т. д. В данной статье будет рассматриваться метод оценки движения, основанный на тензорном подходе.

Анализ последовательных кадров приводит к пространственно-временному набору изображений с двумя пространственными и одним временным измерением. При движении в видеопоследовательности структуры с определенной ориентацией в наборе кадров происходит ее трансформация. Например, точка в линию, направление которой напрямую связано с ее смещением. Мощным инструментом представления локальной ориентации является ориентированный тензор.

Тензорный подход относится к методам, основанным на уравнении оптического потока – стандартном уравнении в частных производных, используемом в физике для описания процессов переноса различных сред:

$$\partial_t F + \mathbf{v} \cdot \nabla F = S, \quad (1)$$

где $\partial_t F$ – производная по времени; ∇F – пространственный градиент функции. В уравнении (1) под переносимой средой понимается яркость изображения F , а член S в правой части моделирует источник, определяющий изменения яркости, не сводимые лишь к пространственному движению.

Задача состоит в определении поля векторов движения (1) на основе знания о сигнале яркости в двух соседних кадрах. Например, за вектор движения можно принять вектор, минимизирующий правую часть уравнения (1) по всей площади макроблока. Если представить вычисления в матричном виде, то для вычисления векторов движения можно использовать тензорную алгебру.

При тензорном подходе последовательность кадров представляется в виде единой трехмерной структуре [1–3]. Смещение значения интенсивности этой структуры внутри последовательности изображений дает структуру, которая направлена вдоль временной оси пространственно-временного объемного изображения.

Запишем уравнение оптического потока в векторной форме [4]:

$$\nabla g^T \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где ∇g – пространственно-временной градиент функции интенсивности; $\mathbf{v} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta t)^T$ – смещение интенсивности во времени, от кадра к кадру. Из выражения (2) следует, что градиент ∇g ортогонален вектору смещения $\mathbf{v}$.

Введем функцию стоимости, определенную для окрестности $w(x - x')$ с центром в точке $\mathbf{x}$, для которой ищется вектор смещения и в которой он постоянен:

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x - x') [\nabla g^T \mathbf{v}]^2 dx'. \quad (3)$$

Для решения задачи поиска оптического потока необходимо найти такой вектор $\mathbf{v}$, который минимизирует функцию стоимости $\varepsilon(\mathbf{v})$, и наложить ограничение $\|\mathbf{v}\| = 1$ для исключения нулевых значений вектора $\mathbf{v}$.

Сделаем следующую замену:

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(x - x') a dx'. \quad (4)$$

и получим

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \left\langle [\nabla g^T \mathbf{v}]^2 \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}^T \nabla g \nabla g^T \mathbf{v} \right\rangle. \quad (5)$$

Из предположения, что скорость $\mathbf{v}$ постоянна в окрестности $w(x - x')$, следует, что значение $\mathbf{v}$ можно вынести из-под знака интеграла:

$$\varepsilon = \mathbf{v}^T \langle \nabla g \nabla g^T \rangle \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v}, \quad (6)$$

где $\mathbf{J}$ – произведение пространственно-временного градиента самого на себя, представляющее симметричный трехмерный структурный тензор:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle g_x g_x \rangle & \langle g_x g_y \rangle & \langle g_x g_t \rangle \\ \langle g_x g_y \rangle & \langle g_y g_y \rangle & \langle g_y g_t \rangle \\ \langle g_x g_t \rangle & \langle g_y g_t \rangle & \langle g_t g_t \rangle \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Элементы $\mathbf{J}$ определяются как

$$J_{pq} = \langle g_p g_q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(x - x') g_p g_q dx', \quad (8)$$

где g_p , $p \in \{x, y, t\}$, определяет частную производную по координате p .

Исходя из ограничения $\|\mathbf{v}\| = 1$, воспользуемся методом Лагранжа и минимизируем составленную функцию $L(\mathbf{v}, \lambda)$:

$$L(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v} + \lambda(1 - \mathbf{v}^T \mathbf{v}). \quad (9)$$

Параметр Лагранжа λ выбирается таким образом, чтобы все производные $L(\mathbf{v}, \lambda)$ по всем трем координатам $\mathbf{v}$ были равны нулю:

$$\frac{\partial L(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial v_i} = 2 \sum_k J_{ik} v_k - 2\lambda v_i = 0, i \in \{1, 2, 3\}. \quad (10)$$

Представим уравнение в виде линейной системы уравнений

$$\mathbf{J} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (11)$$

Таким образом, задача минимизации сводится к задаче поиска собственных значений симметричной матрицы $\mathbf{J}$. После минимизации формула (6) принимает вид

$$\varepsilon = \mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \lambda \mathbf{v} = \lambda, \quad (12)$$

который показывает, что минимум ε определяется собственным вектором матрицы тензора $\mathbf{J}$, соответствующим минимальному собственному значению λ .

Вначале необходимо построить тензор по формуле (7), элементы которого вычисляются по формуле (8). Для практического применения интеграл заменяют на взвешенную или простую сумму, например для окрестности $(2w_x + 1) \times (2w_y + 1)$ точки $\mathbf{x} = (x, y, t)^T$:

$$J_{pq} = \sum_{i=x-w_x}^{i=x+w_x} \sum_{j=y-w_y}^{j=y+w_y} \omega_{ij} g_p g_q. \quad (13)$$

Здесь g_p , $p \in \{x, y, t\}$, задает частную производную по координате p , ω_{ij} – вес соответствующей точки. Пространственные производные по x и y для точки $\mathbf{x}$ определяются соответствующими операторами Собела,

Шарра или другими. Временная производная является разностью между текущим и следующим значениями интенсивности в точке $\mathbf{x}$:

$$g_t = I_t(x, y) - I_{t-1}(x, y). \quad (14)$$

Структурный тензор содержит внутреннюю информацию о распределении яркости в пределах локальной пространственно-временной окрестности. В трехмерной пространственно-временной структуре путем анализа ранга структурного тензора, который получается из числа ненулевых собственных значений, могут быть выделены и определены четыре различных класса [5].

Первый класс – это класс постоянной яркости. В этом случае ранг ($\mathbf{J}$) = 0 и все собственные значения вектора смещения, т. е. все частные производные вдоль главных осей, равны нулю:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Таким образом, распределение яркости остается постоянным в U , и нет движения, которое мы можем оценить. Этот класс можно отличить по сумме всех собственных значений, которая равна следу $\mathbf{J}_0$:

$$\text{trace}(\mathbf{J}') = \text{trace}(\mathbf{J}) = \sum_i^3 \mathbf{J}_{pp},$$

где $\text{trace}(\mathbf{J})$ – след структурного тензора, который можно обнаружить, сравнивая его с порогом:

$$\text{trace}(\mathbf{J}) < t, \quad (15)$$

перед нахождением собственных значений. Для этих точек поиск собственных значений может быть полностью пропущен, а порог t выбирается исходя из уровня шума видеопоследовательности.

Второй класс возникает, если ранг ($\mathbf{J}$) = 1 и структуры изображения имеют пространственную ориентацию и движутся с постоянной скоростью.

Если пространственно-временная структура проста, т. е. направлена вдоль одной линии и только одно из собственных значений больше нуля:

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

то возникает проблема апертур, которая заключается в следующем. Если движущаяся линейная структура наблюдается через небольшое отверстие, то единственное смещение, которое может быть определено, является компонентой, перпендикулярной к структуре (рис. 1). Окрестности, помеченные как P , содержат изображения простых локальных структур и для них можно оценить только нормаль смещения. Окрестности же, обозначенные как L , не являются простыми и для них можно определить истинное смещение.

Теперь вычислим нормаль движения к линейной структуре. Для этого рассмотрим локальную линейную структуру, движущуюся с компонентой смещения

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

по двумерному изображению. Если смещение происходит в единицу времени на каждый кадр в последовательности, то это означает, что любая точка линейной

структуры перемещается на расстояние между каждым кадром, равное в $3D$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

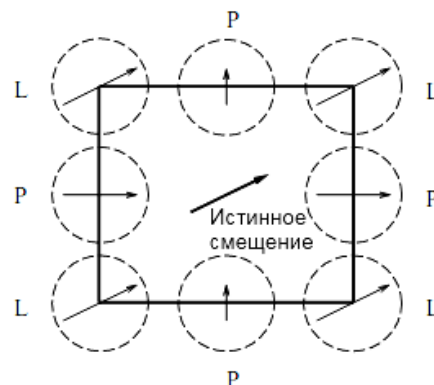


Рис. 1. Проблема апертур при оценке движения

Вектор $\mathbf{v}$ называют *пространственно-временным вектором смещения*. Этот вектор находится в постоянной трехмерной плоскости, которая появилась при движении линейной структуры, т. е. $\mathbf{v}$ является собственным вектором ориентированного тензора и его собственное значение равно 0. Поскольку сигнал в этом случае является локально простым, то соответствующий ориентированный тензор имеет ранг 1.

Если λ_1 является наибольшим собственным значением соответствующего нормализованного собственного вектора

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

то можно считать, что $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{v}$ перпендикулярны:

$$v_1x_1 + v_2x_2 + x_3 = 0. \quad (18)$$

В связи с проблемой апертур это будет единственным вариантом представления вектора смещения $\mathbf{v}$.

С другой стороны, если $\mathbf{e}_1$ спроецировать на пространственные измерения, то тогда результирующий вектор $\mathbf{n}$ будет иметь вид

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

и являться вектором-нормалью к двумерной линейной структуре сигнала. Следовательно, вектор

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix},$$

перпендикулярный к вектору $\mathbf{n}$, указывает направление вдоль двумерной линейной структуры. Если вектор $\mathbf{v}$ представлен нормалью к смещению, то это означает, что векторы $\mathbf{m}$ и $\mathbf{v}$ перпендикулярны:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{m} = v_1x_2 - v_2x_1. \quad (19)$$

Комбинируя формулы (18) и (19), получим

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Отметим, что для нахождения оценки смещения здесь нужно не истинное смещение линейной структуры, а нормаль к компоненте истинной скорости.

Третий класс определяется для ранга $(\mathbf{J}) = 2$. В этом случае структура пространственного распределения яркости движется с постоянной скоростью и проблемы апертюры не возникает. Пространственно-временная окрестность состоит из вытянутой структуры, в которой только один собственный вектор имеет нулевое собственное значение:

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0.$$

Как и в случае движения линейной структуры, вектор смещения $\mathbf{v}$ может быть выведен вместе с соответствующим пространственно-временным вектором смещения $\mathbf{v}'$ по формулам (16) и (17). В этом случае есть два перпендикулярных собственных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, оба с ненулевыми собственными значениями. Очевидно, что $\mathbf{v}$ перпендикулярен $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{v}' \propto \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вектор смещения $\mathbf{v}$ определяется как

$$\mathbf{v} = \frac{1}{x_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Это смещение оценивает истинное смещение точки.

Четвертый класс возникает при ранге $(\mathbf{J}) = 3$, когда тензор не представляет очевидного линейного движения, структура яркости показывает изменения во всех направлениях и все собственные значения вектора смещения больше нуля:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0,$$

т. е. в этом случае вектор движения определить нельзя.

Для отнесения тензора к определенному классу при $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ можно использовать следующие метрики [6]:

– $\text{tr}(\mathbf{J}) < t$ – для первого класса;

– $c_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1}$ – для второго класса;

– $c_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1}$ – для третьего класса;

– $c_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ – для четвертого класса.

Отметим, что $0 \leq c_k \leq 1$ и $c_1 + c_2 + c_3 = 1$.

Эти метрики могут быть использованы для классификации трехмерного ориентированного тензора. В большинстве практических реализаций, однако, нулевой класс необходим для тех случаев, когда разница между самым большим и вторым по величине значением является слишком малой.

Общий подход к оценке локального смещения на двумерном изображении можно сформулировать следующим образом:

а) последовательность изображений рассматривается как трехмерный сигнал и для каждой локальной пространственно-временной окрестности оцениваются структуры, соответствующие трехмерному ориентированному тензору;

б) тензор относится к одному из четырех классов;

- если тензор отнесен ко второму классу, то вычисляется соответствующая нормаль движения;
- если тензор отнесен к третьему классу, то вычисляется соответствующий вектор движения;
- если тензор отнесен к первому или четвертому классу, то вектор смещения принимается равным нулю.

Для реализации данного алгоритма было создано программное обеспечение (ПО), в котором алгоритмы оценки были реализованы на языке программирования C++, а интерфейс – на языке программирования C#. Это ПО позволяет загружать видеофайлы или последовательности изображений и выделять движущиеся объекты и строить для них оптический поток.

Оптический поток, построенный на нескольких кадрах, был визуализирован в виде векторов (рис. 2).



Рис. 2. Оптический поток объекта на кадрах с 2 по 30 с шагом 2

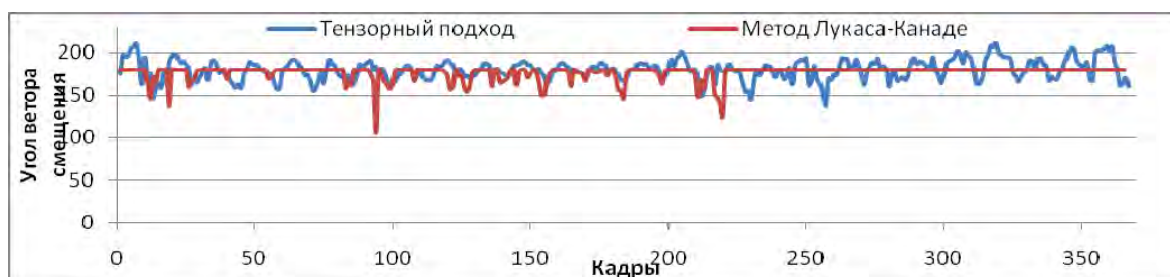


Рис. 3. Сравнительная оценка ориентации вектора смещения

Для проведения исследований использовалась база видеопоследовательностей Object Tracking and Classification in and Beyond the Visible Spectrum [7].

В ходе экспериментов было выявлено, что тензорный подход по скорости работы сопоставим с методом Лукаса–Канаде, но при этом обладает большей чувствительностью в оценке и лучше определяет ориентацию вектора смещения (рис. 3). С помощью тензорного подхода легче фильтровать ложные срабатывания, что делает его более устойчивым к шуму.

Таким образом, в данной статье рассмотрен тензорный подход к оценке движения и сформулирован общий алгоритм, который позволяет построить оптический поток для выбранных точек кадра. Разработано программное обеспечение, реализующее данный подход и проведено его сравнение с методом Лукаса–Канаде. Сравнение показало, что по скорости работы рассматриваемый подход сравним с методом Лукаса–Канаде, но обладает большей чувствительностью к оценке ориентации вектора смещения, что характеризует его как более точный.

Библиографические ссылки

1. Collins T. Analyzing Video Sequences Using the Spatio-Temporal Volume // MSc Informatics Research Rev. 2004. P. 1–28.

2. Farneback G. Motion-Based Segmentation of Image Sequences Using Orientation Tensors [Electronic resource] // Proc. of the SSAB Symp. on Image Analysis. 1997. URL: <http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:273874/FULLTEXT01> (date of visit: 30.05.2012).

3. Jiang H. Robust Tensor-Based Velocity Estimation of Plant Root Growth : MS Thesis / Univ. of Missouri. Columbia, 2001.

4. Jahne B., Haussecker H. Handbook of Computer Vision and Applications [Electronic resource]. 1999. URL: http://www.filesonic.com/file/165368752/handbook_of_computer_vision_and_applications_volume_3_systems_and_applications_-_bernd_jahne.pdf (date of visit: 30.05.2012).

5. Knutsson H. Edupack LiU.CVL.Orientation [Electronic resource] // Linkopings Univ. Tekniska Hogskolan. 2009. URL: <http://www.cvl.isy.liu.se/education/tutorials/edupack-orientation/orientation.pdf> (date of visit: 30.05.2012).

6. Kondo T., Kongprawechanon W. Robust Motion Estimation Methods Using Gradient Orientation Information // Science Asia : J. of the Science Soc. of Thailand. 2009. Vol. 35, №. 2. P. 189–195.

7. Object Tracking and Classification in and Beyond the Visible Spectrum (OTCBVS'07) [Electronic resource]. 2007. URL: www.cse.ohio-state.edu/otcbvs-bench (date of visit: 30.05.2012).

D. Yu. Kolosov

MOTION ESTIMATION BASED ON A TENSOR APPROACH

The author considers the approach to motion estimation using a pointed tensor and present an algorithm for construction of optical flow. The software for the experimental studies is developed.

Keywords: motion estimation, pointed tensors.

© Колосов Д. Ю., 2012