УДК 519.6

А. А. Кузнецов, А. С. Кузнецова

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДВУПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП ПЕРИОДА 5*

Пусть $B_0(2, 5, k)$ – максимальная конечная двупорожденная бернсайдова группа периода 5 ступени нильпотентности k и $\{a_1, a_2\}$ – порождающие элементы данной группы. Проведены вычисления функции роста групп $B_0(2, 5, k)$ относительно порождающего множества $A = \{a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}\}$ для случаев k = 1, 2, 3, 4, 5.

Ключевые слова: группы Бернсайда, функция роста, диаметр Кэли.

Пусть $B_0(2,5,k)$ – максимальная конечная двупорожденная бернсайдова группа периода 5 ступени нильпотентности *k*. В данном классе групп наибольшей является группа $B_0(2,5,12)$, порядок которой равен 5^{34} [1]. Положим, что $\{a_1, a_2\}$ – порождающие элементы $B_0(2,5,k)$.

Авторами вычислены функции роста указанных групп для порождающего множества $A = \{a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}\}$ при $k \le 5$. Функция роста группы $B_0(2,5,6)$ относительно A получена Ч. Симсом в работе [2].

На множестве A введем отношение порядка $\prec$ (меньше): $a_1 \prec a_1^{-1} \prec a_2 \prec a_2^{-1}$.

Для получения функции роста и диаметра Кэли относительно *A* необходимо перечислить все элементы группы в формате минимальных слов [2], а после определения количества слов на каждой длине можно будет найти функцию роста группы, при этом максимально возможная длина минимальных слов будет являться диаметром Кэли группы.

Отметим, что для случаев *k* = 2, 3, 4, 5 были использованы компьютерные вычисления, основанные на алгоритме перечисления элементов группы.

Алгоритм перечисления элементов группы. Пусть *p* – простое число, а *G* – конечная группа экспоненты *p*. Это значит, что $g^p = 1$ для всех $g \in G$. Так как группа *G* нильпотентна, то мы можем найти цепочку подгрупп $G_i (1 \le i \le n)$, обладающих следующими свойствами:

– $G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} = e$;

– G_i нормальны в *G*;

– факторы G_i / G_{i+1} имеют порядок *p* и лежат в центре G / G_{i+1}.

Пусть для $1 \le i \le n$ элемент $a_i \in G_i$, но $a_i \notin G_{i+1}$. Тогда каждый элемент группы $g \in G$ однозначным образом записывается в виде

$$g = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_n^{\gamma_n}, 0 \le \gamma_i \le p. \quad (1)$$

Такое представление элементов группы (*pc*-представление) можно получить при помощи алгоритма, известного как P-Quotient Algorithm [3]. Он реализован в системах компьютерной алгебры GAP и Magma.

Если *A* – порождающее множество группы *G*, то любой ее элемент, записанный в виде слова $a_1 a_2 \ldots a_s$, где $a_i \in A$, можно преобразовать к виду (1):

$$a_1 a_2 \ldots a_s \xrightarrow{pq} a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_n^{\gamma_n}. \quad (2)$$

Процедура (2) дает возможность решить проблему равенства слов в *G*. На ее основе мы можем перечислить элементы *G* в формате минимальных слов.

Обозначим через $K_s(G)$ множество всех минимальных слов группы *G*, не превосходящих по длине *s*, через множество $Q_s(G)$ – элементы $K_s(G)$, записанные в виде правой части (2), через *e* – пустое слово – единицу группы.

Пусть $s_0 \in N$ – минимальное число, для которого выполняется равенство $K_{s_0}(G) = K_{s_0+1}(G)$. В этом случае s_0 будет являться диаметром Кэли группы *G*. Опишем алгоритм, вычисляющий K_s.

Шаг 1: $s = 0$, $K_0 = \{e\}$, $Q_0 = \{e\}$, $T = K_0$.

Шаг 2: $s = s+1$, $K_s = K_{s-1}$, $Q_s = Q_{s-1}$, $V = xT \bigcup yT$, $T = \varnothing$, $i = 1$.

Шаг 3. Для $v_i \in V$ $\hat{v} = f(v_i)$. Если $\hat{v} \notin Q_s$, то $K_s = K_s \bigcup v_i$, $Q_s = Q_s \bigcup \hat{v}$, $T = T \bigcup v_i$.

Шаг 4. Если $i < |V|$, то $i = i+1$ и переход на шаг 3; если $i = |V|$, то переход на шаг 5.

Шаг 5. Если $T \ne \varnothing$, то переход на шаг 2; если $T = \varnothing$, то переход на шаг 6.

Шаг 6. Если диаметр *G* равен $s-1$, то тогда $K_{s-1}(G)$ – множество всех минимальных слов группы.

Шаг 7. Завершение работы алгоритма.

* Работа выполнена при финансовой поддержке КГАУ «Красноярский краевой фонд науки и научно-технической деятельности».

Таблица 1

Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов
0	1	2	8	4	4
1	4	3	8	–	–
$\lvert B_0(2,5,1)\rvert = 5^2 = 25$					

Таблица 2

Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов
0	1	2	12	4	62	6	2
1	4	3	32	5	12	–	–
$\lvert B_0(2,5,2)\rvert = 5^3 = 125$							

Группа $B_0(2,5,1)$. Данная группа представляет собой элементарную абелеву группу, порядок которой равен 5^2. Нетрудно вычислить функцию роста данной группы и диаметр Кэли (табл. 1). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Относительно порождающего множества *A* группа $B_0(2,5,1)$ имеет диаметр Кэли, равный 4, а функция ее роста задана табл. 1.

Доказательство теоремы очевидно.

Группа $B_0(2,5,2)$. Любой элемент группы $B_0(2,5,2)$ может быть представлен в виде нормального коммутаторного слова [1]:

$$g = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3}, \quad \gamma_i \in Z_5.$$

Здесь и далее $a_1^{-1} = a_1^4$ и $a_2^{-1} = a_2^4$.

Для умножения элементов будем использовать полиномы Холла, полученные в [4].

Пусть $a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3}$ и $a_1^{y_1} a_2^{y_2} a_3^{y_3}$ – два произвольных элемента в группе $B_0(2,5,2)$, записанных в коммутаторном виде. Тогда их произведение

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} \cdot a_1^{y_1} a_2^{y_2} a_3^{y_3} = a_1^{z_1} a_2^{z_2} a_3^{z_3},$$

где $z_i \in Z_5$, и

$$z_1 = x_1 + y_1,$$

$$z_2 = x_2 + y_2,$$

$$z_3 = x_3 + y_3 + x_2 y_1.$$

Применив алгоритм перечисления элементов группы, получим функцию роста группы $B_0(2,5,2)$ (табл. 2).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Относительно порождающего множества *A* группа $B_0(2,5,2)$ имеет диаметр Кэли, равный 6, а функция ее роста задана табл. 2.

Доказательство теоремы следует из вычислений функции роста группы $B_0(2,5,2)$ по алгоритму перечисления элементов группы.

Группа $B_0(2,5,3)$. Каждый элемент группы $B_0(2,5,3)$ может быть представлен в виде нормального коммутаторного слова

$$g = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4} a_5^{\gamma_5}, \ \gamma_i \in Z_5.$$

Пусть $a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} a_4^{x_4} a_5^{x_5}$ и $a_1^{y_1} a_2^{y_2} a_3^{y_3} a_4^{y_4} a_5^{y_5}$ – два произвольных элемента в группе $B_0(2,5,3)$, записанных в коммутаторном виде. Тогда их произведение

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} a_4^{x_4} a_5^{x_5} \cdot a_1^{y_1} a_2^{y_2} a_3^{y_3} a_4^{y_4} a_5^{y_5} = a_1^{z_1} a_2^{z_2} a_3^{z_3} a_4^{z_4} a_5^{z_5},$$

где $z_i \in Z_5$, и

$$z_1 = x_1 + y_1,$$

$$z_2 = x_2 + y_2,$$

$$z_3 = x_3 + y_3 + x_2 y_1,$$

$$z_4 = x_4 + y_4 + x_2 \binom{y_1}{2} + x_3 y_1,$$

$$z_5 = x_5 + y_5 + x_2 y_1 y_2 + \binom{x_2}{2} y_1 + x_3 y_2.$$

Здесь и далее $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ – биномиальный коэффициент.

Используя алгоритм перечисления элементов группы, вычислим функцию роста группы $B_0(2,5,3)$ (табл. 3).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Относительно порождающего множества *A* группа $B_0(2,5,3)$ имеет диаметр Кэли, равный 10, а функция ее роста задана табл. 3.

Доказательство теоремы следует из вычислений функции роста группы $B_0(2,5,3)$ по алгоритму перечисления элементов группы.

Группа $B_0(2,5,4)$. Каждый элемент группы $B_0(2,5,4)$ может быть представлен в виде нормального коммутаторного слова:

$$g = a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} a_4^{\gamma_4} a_5^{\gamma_5} a_6^{\gamma_6} a_7^{\gamma_7} a_8^{\gamma_8},\ \gamma_i \in Z_5.$$

Пусть $a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} a_4^{x_4} a_5^{x_5} a_6^{x_6} a_7^{x_7} a_8^{x_8}$ и $a_1^{y_1} a_2^{y_2} a_3^{y_3}\ a_4^{y_4}\ a_5^{y_5} a_6^{y_6} a_7^{y_7} a_8^{y_8}$ – два произвольных элемента в группе $B_0(2,5,4)$, записанных в коммутаторном виде. Тогда их произведение

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} a_4^{x_4} a_5^{x_5} a_6^{x_6} a_7^{x_7} a_8^{x_8} \cdot a_1^{y_1} a_2^{y_2} a_3^{y_3} a_4^{y_4} a_5^{y_5} a_6^{y_6} a_7^{y_7} a_8^{y_8} = \\ = a_1^{z_1} a_2^{z_2} a_3^{z_3} a_4^{z_4} a_5^{z_5} a_6^{z_6} a_7^{z_7} a_8^{z_8},$$

где $z_i \in Z_5$, и

$$z_1 = x_1 + y_1,$$

$$z_2 = x_2 + y_2,$$

$$z_3 = x_3 + y_3 + x_2 y_1,$$

$$z_4 = x_4 + y_4 + x_2 \binom{y_1}{2} + x_3 y_1,$$

$$z_5 = x_5 + y_5 + x_2 y_1 y_2 + \binom{x_2}{2} y_1 + x_3 y_2,$$

$$z_6 = x_6 + y_6 + x_2 \binom{y_1}{3} + x_3 \binom{y_1}{2} + x_4 y_1,$$

$$z_7 = x_7 + y_7 + \binom{x_2}{2}\binom{y_1}{2} + \\ + x_2 \binom{y_1}{2} y_2 + x_3 y_1 y_2 + x_4 y_2 + x_5 y_1,$$

$$z_8 = x_8 + y_8 + \binom{x_2}{3} y_1 + \binom{x_2}{2} y_1 y_2 + \\ + x_2 y_1 \binom{y_2}{2} + x_3 \binom{y_2}{2} + x_5 y_2.$$

Применив алгоритм перечисления элементов группы, найдем функцию роста группы $B_0(2,5,4)$ (табл. 4).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Относительно порождающего множества A группа $B_0(2,5,4)$ имеет диаметр Кэли, равный 19, а функция ее роста задана табл. 4.

Доказательство теоремы следует из вычислений функции роста группы $B_0(2,5,4)$ по алгоритму перечисления элементов группы.

Таблица 3

Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов
0	1	3	32	6	572	9	178
1	4	4	88	7	1 068	10	16
2	12	5	236	8	918	–	–
$\lvert B_0(2,5,3)\rvert = 5^5 = 3\,125$							

Таблица 4

Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов
0	1	5	236	10	24 380	15	29 304
1	4	6	632	11	49 056	16	3 168
2	12	7	1 660	12	83 204	17	198
3	32	8	4 220	13	102 930	18	40
4	88	9	10 512	14	80 944	18	4
$\lvert B_0(2,5,4)\rvert = 5^8 = 390\,625$							

Таблица 5

Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов
0	1	6	632	12	215 242	18	259 624
1	4	7	1 688	13	546 024	19	4 752
2	12	8	4 476	14	1 266 612	20	92
3	32	9	11 896	15	2 438 246	–	–
4	88	10	31 368	16	3 112 570	–	–
5	236	11	82 356	17	1 789 674	–	–
$\lvert B_0(2,5,5)\rvert = 5^{10} = 9\,765\,625$							

Таблица 6

Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов	Длина	Количество слов
0	1	8	4 476	16	10 401 496	24	1 000 867 498
1	4	9	11 896	17	26 831 306	25	130 718 312
2	12	10	31 528	18	68 290 046	26	1 353 842
3	32	11	83 508	19	169 729 186	27	3 454
4	88	12	221 108	20	403 331 722	28	714
5	236	13	582 828	21	873 779 504	29	146
6	632	14	1 529 508	22	1 558 150 656	30	12
7	1 688	15	3 998 452	23	1 853 591 734	–	–
$\lvert B_0(2,5,6)\rvert = 5^{14} = 6\,103\,515\,625$							

Группа $B_0(2,5,5)$. Аналогичным образом вычислим функцию роста группы $B_0(2,5,5)$ (табл. 5).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. В алфавите *A* группа $B_0(2,5,5)$ имеет диаметр Кэли, равный 20, а функция ее роста задана табл. 5.

Доказательство теоремы следует из вычислений функции роста группы $B_0(2,5,5)$ по алгоритму перечисления элементов группы.

Группа $B_0(2,5,6)$. Функция роста группы $B_0(2,5,6)$ вычислена в работе [2] (табл. 6).

Библиографические ссылки

1. Hawas G., Wall G., Wamsley J. The Two Generated Burnside Group of Exponent Five // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. № 10. P. 459–470.

2. Sims C. Fast Multiplication and Growth in Groups // Proc. of the 1998 Intern. Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. Rostock, Germany, 1998. P. 165–170.

3. Sims C. Computation with Finitely Presented Groups. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1994.

4. Кузнецов А. А., Кузнецова А. С. Быстрое умножение элементов в конечных двупорожденных группах периода пять // Прикл. дискрет. математика. 2012. № 4 (17). С. 54–60.

A. A. Kuznetsov, A. S. Kuznetsova

COMPUTER MODELING OF FINITE TWO-GENERATOR GROUPS OF EXPONENT 5

Let $B_0(2,5,k)$ *be the largest finite, provided by two, Burnside group of period of the* 5^{th} *step of nilpotency k, and* $\{a_1, a_2\}$ *be generators of this group. In this article the growth functions of the groups* $B_0(2,5,k)$ *,relative to* $\mathrm{A} = \{a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}\}$, *are calculated for cases k =* 1, 2, 3, 4, 5.

Keywords: Burnside groups, growth function, Cayley diameter.

© Кузнецов А. А., Кузнецова А. С., 2012

УДК 004.4

В. В. Кукарцев, Д. А. Шеенок

ОЦЕНКА ЗАТРАТ НА МОДЕРНИЗАЦИЮ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ПО НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

Предложен подход для оценки затрат на модернизацию программного обеспечения с учетом различных этапов жизненного цикла и введения программной избыточности. Проведены расчеты затрат на модернизацию программного обеспечения реальной системы.

Ключевые слова: программная избыточность, трудозатраты, программное обеспечение, декомпозиция.

При разработке высокобюджетных программных проектов важную роль играет оценка затрат. Расхождение планируемых затрат с фактическими может привести к серьезным финансовым потерям и даже банкротству компании-разработчика. Существует множество простых и сложных моделей и основанных на них методик оценки будущей стоимости проекта, но они в совокупности имеют следующие недостатки.