

А. В. Лопатин, Ю. В. Захаров, К. Г. Охоткин, В. В. Вильянен, А. В. Пашковский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСФОРМИРУЕМОГО ОБОДА БОЛЬШОЙ КОСМИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ С ГИБКИМИ КОМПОЗИТНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ*

Рассмотрена новая геометрически нелинейная модель трансформируемого обода большой космической антенны, построенного с использованием гибких композитных полос как основных элементов. Найденное решение позволит определять оптимальную форму изогнутой криволинейной полосы и оценивать запасенную энергию.

Ключевые слова: трансформируемая космическая антенна, гибкий изогнутый композитный элемент, геометрическая нелинейность.

В настоящее время активно развиваются космические телекоммуникационные услуги широкополосного доступа. В связи с этим актуальна тенденция роста диаметра космических антенн, которые используются для передачи больших объемов данных. У космических антенн есть большой диаметр в операционной конфигурации. Во время вывода на орбиту внутренний объем под обтекателем ракеты-носителя ограничен. Поэтому имеются существенные ограничения, накладываемые на любые большие бортовые антенны космических аппаратов: антенна должна быть сжато упакована, чтобы поместить ее под обтекатель ракеты-носителя, и должна быть развернута на орбите с высокой точностью. Несколько структурных моделей трансформируемых космических антенн могут быть найдены в литературе [1–5]. Одна из таких моделей – антенна, состоящая из обода и приложенной к нему тонкой радиотражающей мембраны. Концепция такой космической антенны была представлена ранее в работе [5]. Развертывание обода на орбите может быть выполнено несколькими способами. Самым перспективным является трансформация, когда развертывание обода антенны производится запасенной потенциальной энергией деформации его упругих гибких элементов. Применение композиционных материалов в дизайне такой оправы является самым эффективным.

Рассмотрена новая модель трансформируемого составного обода большой космической антенны с использованием гибких элементов. При моделировании использована геометрически нелинейная модель, представленная в работе авторов [6]. При этом использованы статические уравнения, описывающие геометрически нелинейную деформацию элемента – гибкой полосы – во время разворачивания обода антенны. В целях удобства проектирования была аналитически решена обратная задача. В этой задаче были исследованы и найдены усилия, смещения и потенциальная энергия, возникающие в гибкой полосе при ее деформации от прямолинейного состояния до сильно криволинейного. Полученное аналитическое решение

позволит определять оптимальную форму изогнутой полосы и оценивать зарезервированную энергию. Эти результаты позволяют подойти к проектированию основных упругих элементов обода антенны.

Модель трансформируемого обода антенны. Основным элементом трансформируемого обода антенны – криволинейная композитная полоса, которая в ненагруженном состоянии имеет форму, показанную на рис. 1.



Рис. 1. Изогнутая полоса

Такую изогнутую полосу можно получить формовкой на шаблоне, повторяя ее контур. Две изогнутых полосы формируют основной упругий элемент обода (рис. 2). Развернутый обод антенны состоит из двух кругов изогнутых углепластиковых полос и труб, соединяющих их (рис. 3).



Рис. 2. Гибкий упругий элемент

Через полосы на внутреннем круге продеты гибкие кабели. Кабели натягивают, прежде чем поместить антенну под обтекатель ракеты-носителя. Точки контакта кривых полос сдвигаются по радиусу к центру антенны (рис. 4).

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.B37.21.0405 «Моделирование композитных элементов крупногабаритных трансформируемых механических систем космических аппаратов связи и телекоммуникаций».

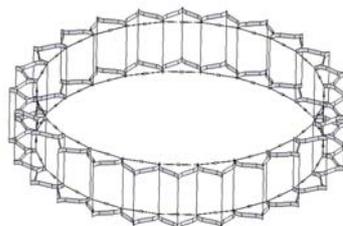
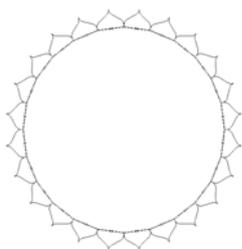


Рис. 3. Развернутый обод антенны

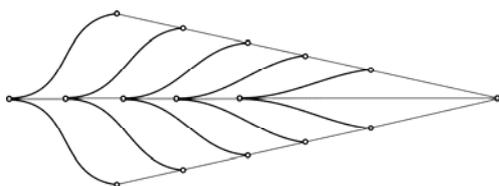


Рис. 4. Деформирование полос при развертывании обода антенны

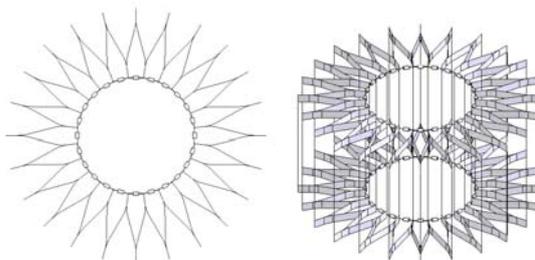


Рис. 5. Свернутый обод антенны

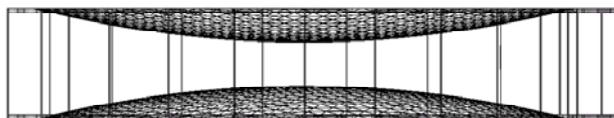
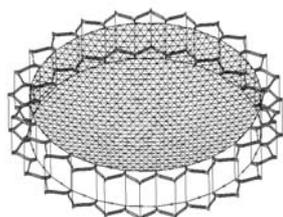


Рис. 6. Развернутая антенна с вантовой системой

В свернутой конфигурации (рис. 5) кривые полосы выправляются и резервируют энергию вследствие структурной деформации.

Развертывание антенны на орбите (рис. 6) осуществляется освобождением зарезервированной энергии. Кабель размотан, и происходит упругое движение элементов по радиусу от центра антенны до внешнего круга (см. рис. 4).

Начальными параметрами для проектирования являются внутренний диаметр обода в развернутом состоянии и внешний диаметр обода в свернутой конфигурации. Первый размер определяет диаметр апертуры, второй – диаметр пространства для хранения свернутой антенны под обтекателем ракеты-носителя.

Геометрически нелинейная модель гибкой полосы – элемента обода антенны. Рассмотрим задачу определения формы изогнутой полосы. Форма может быть найдена из решения обратной задачи, когда изначально прямоугольная полоса изгибается к необходимому положению (рис. 7).

Упругие параметры прямоугольной полосы:

$$B = E_x hb, \quad D = E_x I = E_x b \frac{h^3}{12},$$

где h – толщина полосы; b – ширина полосы; E_x – упругий модуль материала полосы в направлении оси x .

В нашей модели прямоугольную полосу будем рассматривать как гибкий упругий нерастяжимый стержень, консольно закрепленный. Концы стержня могут свободно смещаться вдоль заданных направляющих. Длина стержня L .

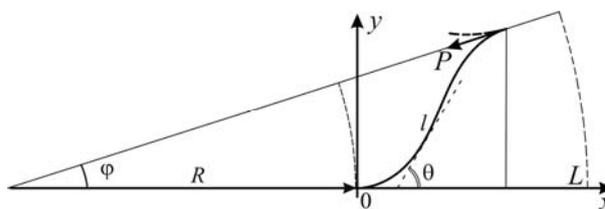


Рис. 7. Изогнутая полоса. Система координат

Деформация стержня имеет место в секторе с центральным углом φ . Величина угла определяется как $\varphi = \pi/n$, где n – число упругих элементов, состоящих из двух изогнутых полос (см. рис. 1); R – заданный внутренний радиус развернутого обода антенны. Рассмотрим далее изгиб стержня для заданных величин

R , L и φ (см. рис. 7). Найдем форму изогнутого стержня, отклонение конца стержня и запасенную энергию.

Выберем декартову систему координат так, что изначально прямой стержень расположен вдоль оси x , зашпелен на левом конце в начале координат. На правом конце рассмотрим два варианта его соединения со вторым стержнем (полосой): зашпеление и шарнирное соединение.

Стержень подвергается деформации изгиба под действием неизвестной равнодействующей силы реакции со стороны второго стержня P , которая сосредоточена на правом конце стержня и из соображений симметрии задачи имеет постоянное направление под углом φ к центру обода. P_x и P_y – декартовы компоненты силы P .

Обозначим через l – криволинейную координату – длину вдоль изогнутой линии стержня, $\theta(l)$ – угол наклона касательной в текущей точке к линии стержня; тогда $d\theta/dl$ – кривизна кривой линии стержня. Зная зависимость $\theta(l)$, можно определить форму изогнутого стержня в параметрическом задании, с параметром криволинейной длины l , выражениями

$$x(l) = \int_0^l \cos \theta(l) dl, \quad y(l) = \int_0^l \sin \theta(l) dl.$$

Приведем далее систему нелинейных уравнений равновесия стержня, следуя работе [6]. Поскольку отсутствует внешнее давление (распределенная нагрузка), то уравнение равновесия элемента стержня имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{F}}{dl} = 0, \quad \vec{F} = \text{const}, \quad (1)$$

где F – упругая сила. Пусть $F_x = -P \sin \varphi$, $F_y = P \cos \varphi$ – ее компоненты в декартовой системе координат, F_n , F_τ – компоненты в касательной системе координат.

Уравнение моментов:

$$\frac{dM}{dl} = -F_n = F_x \sin \theta - F_y \cos \theta, \quad (2)$$

где M – изгибающий момент.

Закон Гука:

$$M = D \frac{d\theta}{dl}. \quad (3)$$

Из уравнений (1)–(3) имеем одно нелинейное уравнение для определения зависимости $\theta(l)$:

$$D \frac{d^2\theta}{dl^2} + P \sin \varphi \sin \theta + P \cos \varphi \cos \theta = 0,$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{P}{D} \sin(\theta + \varphi) = 0.$$

Преобразуем это уравнение равновесия стержня в уравнение типа нелинейного маятника. Введем безразмерную длину $t = l/L$, изменяющуюся от 0 до 1, и сделаем замену $\gamma = \theta + \varphi$. Введем обозначение для неизвестного параметра $q^2 = PL^2/D$. Тогда получим

уравнение для угла γ типа уравнения нелинейного маятника:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + q^2 \sin \gamma = 0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения хорошо известно:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qt + F_1, k)], \\ d\gamma(t)/dt &= 2kq \operatorname{cn}(qt + F_1, k), \\ \theta(t) &= -\varphi + 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qt + F_1, k)], \end{aligned} \quad (5)$$

где функции sn и cn – эллиптические синус и косинус Якоби. Модуль эллиптических функций k и параметр F_1 играют роль констант интегрирования, и их связь с параметром q и углом φ определяется далее из граничных условий для каждого конкретного случая изгиба стержня. Введем обозначение для аргумента эллиптических функций

$$u = qt + F_1.$$

Используя выражение (5), получим

$$\cos \gamma(t) = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u, \quad \sin \gamma(t) = 2k \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.$$

Интегрируя геометрические соотношения $dx/dl = \cos \theta$, $dy/dl = \sin \theta$, получим координаты произвольной точки стержня в параметрическом виде, определяющие изогнутую форму стержня:

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= \int_0^t \cos \theta dt = \int_0^t \cos(\gamma - \varphi) dt = \\ &= \cos \varphi \int_0^t \cos \gamma dt + \sin \varphi \int_0^t \sin \gamma dt = X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi, \\ \frac{y}{L} &= \int_0^t \sin \theta dt = \int_0^t \sin(\gamma - \varphi) dt = \\ &= \cos \varphi \int_0^t \sin \gamma dt - \sin \varphi \int_0^t \cos \gamma dt = Y_0 \cos \varphi - X_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Использованные здесь обозначения X_0 и Y_0 , полученные с помощью (4), имеют вид

$$\begin{aligned} X_0 &= \int_0^t \cos \gamma dt = \int_0^t (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u) dt = \\ &= -t + \frac{2}{q} [E(\operatorname{am} u) - E(\operatorname{am} F_1)], \\ Y_0 &= \int_0^t \sin \gamma dt = \int_0^t 2k \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u dt = \frac{2k}{q} [\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn} u], \end{aligned} \quad (7)$$

где $E(\operatorname{am} u)$ – неполный эллиптический интеграл второго рода от эллиптической амплитуды Якоби. Выражения (6) и (7) задают форму профиля изогнутого стержня в параметрическом виде с параметром t – приведенной криволинейной длиной.

Определим теперь запасенную потенциальную энергию изогнутого стержня:

$$U = \frac{1}{2D} \int_0^L M^2 dl = \frac{1}{2} \frac{D}{L} \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dt.$$

Введем безразмерный параметр полной потенциальной энергии изогнутого стержня f :

$$U = \frac{3D}{L} f, \text{ т. е. } f = \frac{1}{6} \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 dt. \quad (8)$$

Таким образом, зная решение $\theta(t)$, можно точно вычислить запасенную энергию.

Рассмотрим случай защемления в соединении двух стержней в элементе обода антенны. Определим связь между параметрами k, F_1, q и φ из граничных условий:

- 1) на левом конце стержня $\theta(0) = 0$;
- 2) на правом конце стержня $\theta(1) = \pi/n = \varphi$.

Применим первое условие, используя решение (4) уравнения (5). Получим $\operatorname{sn} F_1 = \sin(\varphi_0/2)/k$, следовательно

$$F_1 = F \left[\arcsin \left(\frac{\sin \varphi / 2}{k} \right), k \right].$$

Соответственно, модуль k изменяется в пределах $\sin(\varphi_0/2) < k < 1$.

Применив второе условие, аналогично получим, что

$$\operatorname{sn}(q + F_1) = \sin(\varphi)/2. \quad (9)$$

Из-за периодичности эллиптического синуса sn уравнение (9) имеет бесконечное количество корней, каждое из них будет определять отдельную ветвь (моду) решений с разным числом перегибов стержня. Исходя из разумного предположения, что изогнутый стержень в реальной задаче будет иметь одну точку перегиба, выберем второй корень уравнения (9), который даст соотношение

$$q = 2K(k) - F_2 - F_1, \quad F_2 = F \left(\arcsin \left(\frac{\sin \varphi}{k} \right), k \right), \quad (10)$$

где $K(k)$ и $F(\varphi, k)$ – соответственно полный и неполный эллиптические интегралы первого рода.

Поскольку правый конец стержня смещается по линии под углом φ , то исходя из геометрии задачи (см. рис. 7), получим дополнительное соотношение

$$\frac{y_1}{(r + x_1)} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (11)$$

где y_1 и x_1 – координаты правого конца изогнутого стержня, а y_1 – прогиб стержня. Используя выражения (6) и (7), найдем координаты правого конца стержня:

$$x_1 = \sin \varphi Y_1 + \cos \varphi X_1, \quad y_1 = \sin \varphi X_1 - \cos \varphi Y_1,$$

$$X_1 = -1 + \frac{2}{q} (2E(k) - E_2 - E_1),$$

$$Y_1 = \frac{2k}{q} \left(\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi / 2}{k^2}} + \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\varphi)}{k^2}} \right), \quad (12)$$

$$E_1 = E \left(\arcsin \left(\frac{\sin \varphi / 2}{k} \right), k \right), \quad E_2 = E \left(\arcsin \left(\frac{\sin \varphi}{k} \right), k \right),$$

где $E(k)$ и $E(\varphi, k)$ – соответственно полный и неполный эллиптические интегралы второго рода. Далее рассмотрим число упругих элементов $n = 18, 24, 32, 48$. Внутренний радиус обода антенны зададим $r = 2, 3, 4, 5, \dots$, где введен безразмерный радиус $r = R/L$.

Система алгебраических уравнений (10)–(12) позволяет найти неизвестные параметры решения q и k . Последовательно задавая известные параметры $\varphi = \pi/n$, n и r , подставляя выражение (10) для параметра $q(k)$ в (12), а выражения $x_1(k)$ и $y_1(k)$ из (12) в геометрическое соотношение (11), получим одно нелинейное алгебраическое уравнение для определения зависимости модуля k от n и r . Это уравнение можно легко решить любым численным методом. Определив модуль k , можно вычислить параметр q , используя выражение (10).

Далее, используя параметрические выражения (6), (7) с найденными значениями параметров, можно построить изогнутые формы стержня. Координаты точек стержня в параметрическом задании $x(t)$ и $y(t)$ определяются выражениями (6) и (7) подстановкой значений q и F_1 из (10). Таким образом, каждому значению параметров n и r будет соответствовать своя форма изгиба стержня, определяемая одним вычисляемым параметром – модулем k , который находится численным решением алгебраического уравнения (10). Минимальному значению $k = \sin \varphi / 2$ соответствует минимальное значение силы P и неизогнутая форма стержня. Когда сила $P \rightarrow \infty$ и модуль $k \rightarrow 1$, мы имеем максимально возможную сильно искривленную форму стержня.

Значение прогиба правого конца изогнутого стержня $y_1(k)$ можно вычислить с помощью выражений (12), зная параметры решения q и k . Ранее в работе [5] был введен безразмерный параметр z :

$$z = \frac{y_1}{(1+r) \operatorname{tg} \varphi}.$$

В работе [5] были найдены значения этого параметра, а также параметра энергии f по линейной теории. Найденные в [5] значения являются оценкой сверху.

Сделав предельный переход $k \rightarrow 1$ в уравнениях (10)–(12), получим ограничение на область значений параметров n и r :

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leq \frac{1}{r}, \quad (13)$$

или приближенно $\pi r \leq n$. Это соотношение важно при проектировании обода антенны для выбора разрешенных значений параметров n и r .

Последовательные формы изогнутого гибкого элемента обода при $r = 2, 3, 4$ для случая $n = 18$, построенные по аналитическим выражениям (6) и (7), приведены на рис. 8, а для случая $n = 32$ – на рис. 9.

Вычисленные значения модуля k путем решения алгебраической системы (10)–(12) приведены в табл. 1, вычисленные по геометрически нелинейной модели с использованием выражения (12) значения безразмерного параметра прогиба z , приведены в табл. 2, значения безразмерного параметра запасенной энергии f одного стержня, вычисленные с помощью выражения (8) для различных n и r , – в табл. 3. В этих таблицах прочерки поставлены там, где наступает ограничение (13).

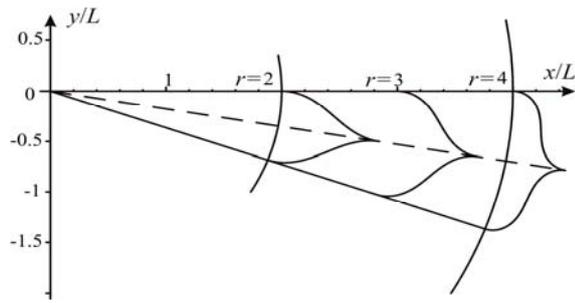


Рис. 8. Последовательные формы изогнутого гибкого элемента обода с защемлением при $r = 2, 3, 4$ для случая $n = 18$

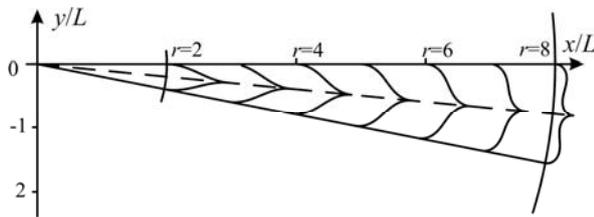


Рис. 9. Последовательные формы изогнутого гибкого элемента обода с защемлением при $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ для случая $n = 32$

Полная сохраненная энергия обода антенны равна сумме энергий деформации всех кривых полос: $f_{\text{полн}} = 2nf$. Большую запасенную энергию обода антенны обеспечивает разбиение на возможно большее число элементов.

Таким образом, развита новая модель трансформируемого композитного обода большой космической антенны. В свернутой конфигурации изогнутые элементы обода выправляются и резервируют энергию вследствие структурной деформации. Открытие антенны на орбите осуществляется за счет выпуска зарезервированной энергии. Выполненный анализ с точным учетом геометрической нелинейности позволяет определять форму упругих полос, которые формируют обод антенны на случай любых сильных изгибов элементов.

Полученные аналитические решения позволяют оценивать форму и величину прогибов элементов, запасенную энергию кривой полосы, и, впоследствии, вычислять полную сохраненную энергию, требуемую для разворачивания антенны. Такой анализ необходим на ранней стадии дизайна обода антенны. Все аналитические решения легко реализуются в пакете Maple.

Таблица 1

Значения модуля $k(n, r)$

n	r								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	0,460	0,598	0,755	–	–	–	–	–	–
24	0,349	0,451	0,559	0,678	0,841	–	–	–	–
32	0,263	0,340	0,418	0,500	0,587	0,686	0,821	–	–
48	0,176	0,227	0,278	0,331	0,384	0,439	0,497	0,558	0,623

Таблица 2

Значения безразмерного параметра прогиба $z(n, r)$

n	r								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	0,946	0,923	0,890	–	–	–	–	–	–
24	0,970	0,958	0,945	0,927	0,892	–	–	–	–
32	0,983	0,977	0,970	0,963	0,954	0,942	0,920	–	–
48	0,993	0,990	0,987	0,984	0,981	0,978	0,974	0,970	0,965

Таблица 3

Значения параметра запасенной энергии $f(n, r)$

n	r								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	0,412	0,889	1,822	–	–	–	–	–	–
24	0,226	0,462	0,830	1,432	2,861	–	–	–	–
32	0,125	0,250	0,431	0,682	1,039	1,588	2,768	–	–
48	0,055	0,108	0,182	0,278	0,400	0,553	0,745	0,991	1,316

Библиографические ссылки

1. Large Deployable Reflector (LDR) / K. Shintate, K. Terada, M. Usui et al. // J. of the National Institute of Information and Communications Technology. 2003. Vol. 50, № 3/4. P. 33–39.
2. Thomson M. W. AstroMesh deployable reflectors for KU- and KA-band commercial satellites // Proc. of 20th AIAA Intern. Communication Satellite Systems Conf. and Exhibit. Montreal, Quebec, 2002.
3. Development of the large and high accuracy deployable antenna for the VSOP-2 mission [Electronic resource] / Y. Murata, H. Hirabayashi, M. C. Natori et al. URL:

[http://www.ursi.org/Proceedings/ProcGA05/pdf/BP.11\(01277\).pdf](http://www.ursi.org/Proceedings/ProcGA05/pdf/BP.11(01277).pdf) (date of visit: 12.12.2012).

4. Tibert G. Deployable Tensegrity Structures for Space Applications : Ph.D. Thesis [Electronic resource] Stockholm, 2002. URL: <http://www2.mech.kth.se/~gunnart/TibertDocThesis.pdf> (date of visit: 12.12.2012).
5. Lopatin A. V., Rutkovskaya M. A. Design of large space antenna composite rim // Composite Structures. 2006. № 76. P. 99–105.
6. Zakharov Yu. V., Okhotkin K. G. Nonlinear bending of thin elastic rods // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2002. Vol. 43, № 5. P. 739–744.

A. V. Lopatin, Yu. V. Zakharov, K. G. Okhotkin, V. V. Vilyanen, A. V. Pashkovskiy

GEOMETRICALLY NONLINEAR MODEL OF AN TRANSFORMED RIM OF A BIG SPACE ANTENNA WITH FLEXIBLE COMPOSITE ELEMENTS

A new geometrical and nonlinear model of a transformable rim of a large space antenna constructed with the use of flexible composite strips, as basic elements, is considered. The decision found will allow to define the optimum form of the bent curvilinear strip and to estimate the stored energy.

Keywords: transformable space antenna, flexible bent composite element, geometrical nonlinearity.

© Лопатин А. В., Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Вильянен В. В., Пашковский А. В., 2012

УДК 517.972.5

И. А. Лопатин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ В УГЛАХ*

Обобщенным методом Галеркина решена задача определения основной частоты колебаний прямоугольной ортотропной пластины, в углах которой отсутствует прогиб.

Ключевые слова: ортотропная пластина, обобщенный метод Галеркина, основная частота колебаний.

Прямоугольные ортотропные пластины, испытывающие динамическое воздействие в составе ракетных и космических конструкций, обладают различными способами крепления к соседним частям этих конструкций. Как правило, крепление прямоугольной пластины осуществляется по ее краям. Края пластины могут быть жестко защемлены, шарнирно закреплены или оперты на упругие ребра.

Динамическое поведение как изотропных, так и ортотропных пластин с такими способами крепления краев подробно изучено. Вместе с тем крепление ортотропных пластин, помимо реализуемого на краях, может осуществляться в точках. Определенный практический интерес представляет задача вычисления частот колебаний пластины, закрепленной в четырех

углах. Если речь идет о нахождении нескольких частот колебаний такой пластины, то для решения этой задачи наиболее прагматичным будет использование численного метода, например метода конечных элементов. Однако определение основной частоты изгибных колебаний пластины, закрепленной в углах, может быть выполнено без привлечения методов, требующих значительных вычислительных ресурсов.

Необходимо отметить, что основная частота колебаний является удобной оценкой весовой эффективности ортотропной пластины при ее проектировании. Это обусловлено тем, что основная частота колебаний учитывает взаимное влияние изгибной жесткости и погонной массы ортотропной пластины.

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.В37.21.0405 «Моделирование композитных элементов крупногабаритных трансформируемых механических систем космических аппаратов связи и телекоммуникаций».