Библиографические ссылки

1. Large Deployable Reflector (LDR) / K. Shintate, K. Terada, M. Usui et al. // J. of the National Institute of Information and Communications Technology. 2003. Vol. 50, № 3/4. P. 33–39.
2. Thomson M. W. AstroMesh deployable reflectors for KU- and KA-band commercial satellites // Proc. of 20th AIAA Intern. Communication Satellite Systems Conf. and Exhibit. Montreal, Quebec, 2002.
3. Development of the large and high accuracy deployable antenna for the VSOP-2 mission [Electronic resource] / Y. Murata, H. Hirabayashi, M. C. Natori et al. URL: http://www.ursi.org/Proceedings/ProcGA05/pdf/BP.11(01277).pdf (date of visit: 12.12.2012).
4. Tibert G. Deployable Tensegrity Structures for Space Applications : Ph.D. Thesis [Electronic resource] Stockholm, 2002. URL: http://www2.mech.kth.se/~gunnart/TibertDocThesis.pdf (date of visit: 12.12.2012).
5. Lopatin A. V., Rutkovskaya M. A. Design of large space antenna composite rim // Composite Structures. 2006. № 76. P. 99–105.
6. Zakharov Yu. V., Okhotkin K. G. Nonlinear bending of thin elastic rods // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. 2002. Vol. 43, № 5. P. 739–744.

A. V. Lopatin, Yu. V. Zakharov, K. G. Okhotkin, V. V Vilyanen, A. V. Pashkovskiy

GEOMETRICALY NONLINEAR MODEL OF AN TRANSFORMED RIM OF A BIG SPACE ANTENNA WITH FLEXIBLE COMPOSITE ELEMENTS

A new geometrical and nonlinear model of a transformable rim of a large space antenna constructed with the use of flexible composite strips, as basic elements, is considered. The decision found will allow to define the optimum form of the bent curvilinear strip and to estimate the stored energy.

Keywords:transformable space antenna, flexible bent composite element, geometrical nonlinearity.

УДК 517.972.5

И. А. Лопатин

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ В УГЛАХ*

Обобщенным методом Галеркина решена задача определения основной частоты колебаний прямоугольной ортотропной пластины, в углах которой отсутствует прогиб.

Ключевые слова: ортотропная пластина, обобщенный метод Галеркина, основная частота колебаний.

Прямоугольные ортотропные пластины, испытывающие динамическое воздействие в составе ракетных и космических конструкций, обладают различными способами крепления к соседним частям этих конструкций. Как правило, закрепление прямоугольной пластины осуществляется по ее краям. Края пластины могут быть жестко защемлены, шарнирно закреплены или оперты на упругие ребра.

Динамическое поведение как изотропных, так и ортотропных пластин с такими способами закрепления краев подробно изучено. Вместе с тем крепление ортотропных пластин, помимо реализуемого на краях, может осуществляться в точках. Определенный практический интерес представляет задача вычисления частот колебаний пластины, закрепленной в четырех углах. Если речь идет о нахождении нескольких частот колебаний такой пластины, то для решения этой задачи наиболее прагматичным будет использование численного метода, например метода конечных элементов. Однако определение основной частоты изгибных колебаний пластины, закрепленной в углах, может быть выполнено без привлечения методов, требующих значительных вычислительных ресурсов.

Необходимо отметить, что основная частота колебаний является удобной оценкой весовой эффективности ортотропной пластины при ее проектировании. Это обусловлено тем, что основная частота колебаний учитывает взаимное влияние изгибной жесткости и погонной массы ортотропной пластины.

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.B37.21.0405 «Моделирование композитных элементов крупногабаритных трансформируемых механических систем космических аппаратов связи и телекоммуникаций».

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину, отнесенную к системе декартовых координат xy (рис. 1). Размеры пластины по осям x и y обозначим a и b соответственно. Пластина закреплена в угловых точках таким образом, что в них отсутствует прогиб.

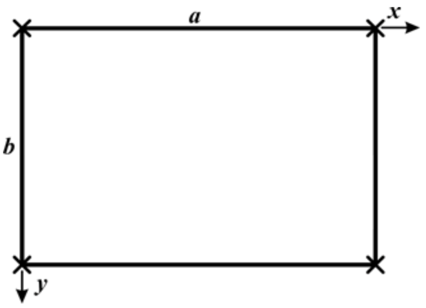

Рис. 1

Получим вариационное уравнение изгибных колебаний пластины. Воспользуемся для этого принципом Гамильтона. Рассмотрим интеграл действия Гамильтона [1]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt, \tag{1}$$

где t – время; $t_2 - t_1$ интервал времени, в течение которого происходит движение пластины; T – кинетическая энергия движения пластины; U – потенциальная энергия изгиба пластины.

Кинетическая энергия и потенциальная энергия изгиба ортотропной пластины определяются следующим образом [2]:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdy,$$

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b & \left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{33}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] dxdy, \end{aligned} \tag{2}$$

где $w = w(x,\ y,\ t)$ – прогиб пластины; D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33} – изгибные жесткости ортотропной пластины.

Рассматривая свободные колебания пластины, представим ее прогиб в следующем виде:

$$w(x, y, t) = w(x, y)\sin\omega t, \tag{3}$$

где ω – круговая частота колебаний; $w(x,y)$ – функция формы пластины при поперечных колебаниях.

Подставляя (3) в (2), получим

$$\begin{aligned} T &= T_{\max}\cos^2\omega t, \\ U &= U_{\max}\sin^2\omega t, \end{aligned} \tag{4}$$

где $T_{\max}$ – максимальная кинетическая энергия движения пластины; $U_{\max}$ – максимальная потенциальная энергия изгиба пластины. Величины $T_{\max}$ и $U_{\max}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{1}{2}\omega^2 B_p \int_0^a\int_0^b w^2 dxdy, \\ U_{\max} &= \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \left[D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{33}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] dxdy, \end{aligned} \tag{5}$$

где B_p – инерциальный параметр.

Пусть интервал времени, в течение которого рассматривается движение пластины, равен периоду колебаний. В этом случае имеет место следующее равенство:

$$t_1 - t_2 = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{6}$$

Подставляя (4) в (1) и учитывая соотношение (6), будем иметь

$$\begin{aligned} S &= T_{\max}\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2\omega t dt - U_{\max}\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t dt = \\ &= \frac{\pi}{\omega}\left(T_{\max} - U_{\max}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Интегрируя по времени, найдем

$$S = \frac{\pi}{\omega}\left(T_{\max} - U_{\max}\right). \tag{8}$$

В соответствии с принципом Гамильтона в промежутке времени $2\pi/\omega$, интеграл действия S для действительного движения ортотропной пластины имеет стационарное значение, т. е.

$$\delta S = 0, \tag{9}$$

где δ – знак вариации.

С учетом равенства (8) из условия (9) будем иметь

$$\delta\left(T_{\max} - U_{\max}\right) = 0. \tag{10}$$

Подставляя (5) в (10) и выполняя варьирование, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^a\int_0^b L(x,y)\delta w dxdy + \int_0^b\left[M_x(x,y)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]_0^a dy - \\ & - \int_0^b\left[V_x(x,y)\delta w\right]_0^a dy + \int_0^a\left[M_y(x,y)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]_0^b dx - \\ & - \int_0^a\left[V_y(x,y)\delta w\right]_0^b dx + 2\left[\left[M_{xy}(x,y)\delta w\right]_0^b\right]_0^a = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$L(x,y)=D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{33}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$

$$+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-B_\rho\omega^2 w,$$

$$M_x(x,y)=D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{12}$$

$$V_x(x,y)=D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(D_{12}+4D_{33}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2},$$

$$M_y(x,y)=D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$V_y(x,y)=D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(D_{12}+4D_{33}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y},$$

$$M_{xy}(x,y)=2D_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

В равенствах (12) функции M_x, M_y соответствуют изгибающим моментам, V_x, V_y соответствуют обобщенным перерезывающим силам, M_{xy} соответствует крутящему моменту.

Уравнение (11) представляет собой основное вариационное уравнение, которому должны удовлетворять собственные формы колебаний $w(x,y)$ ортотропной пластины.

Представим прогиб пластины (рис. 2).

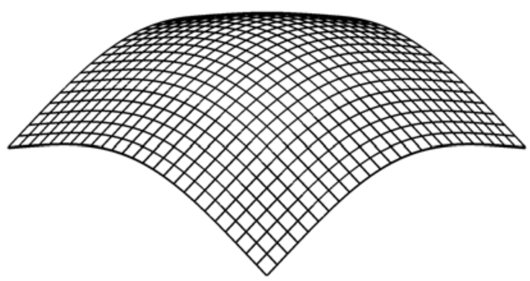

Рис. 2

Выбранная аппроксимация

$$w=A\sin\frac{\pi x}{a}+B\sin\frac{\pi y}{b}+C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{13}$$

где A, B и C – неизвестные числа, не удовлетворяет статическим граничным условиям на свободных краях пластины. Вместе с тем представление прогиба в виде (13) позволяет вполне успешно определить основную частоту колебаний закрепленной в углах ортотропной пластины, если для решения этой задачи использовать обобщенный метод Галеркина. Исходным уравнением для обобщенного метода Галеркина является вариационное уравнение (11). Это уравнение автоматически обеспечивает приближенное выполнение статических граничных условий на свободных краях пластины.

Вариации функции прогиба (13) и ее первых производных определяются следующим образом:

$$\delta w=\sin\frac{\pi x}{a}\delta A+\sin\frac{\pi y}{b}\delta B+\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\delta C,$$

$$\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\delta A+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\delta C, \tag{14}$$

$$\delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{\pi}{b}\cos\frac{\pi y}{a}\delta B+\frac{\pi}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\delta C.$$

Подставляя (14), (13) в (11), (12) и выполняя интегрирование, получим, учитывая произвольность вариаций δA, δB, δC однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
2D_{11}\frac{\pi^4}{a^4}A+16D_{12}\frac{\pi^2}{a^2b^2}B+\frac{4\pi^3}{a^2b^2}\left(D_{11}\frac{b^2}{a^2}+D_{12}\right)C-\\
-B_p\omega^2\left(2A+\frac{16}{\pi^2}B+\frac{4}{\pi}C\right)=0,\\[2ex]
16D_{12}\frac{\pi^2}{a^2b^2}A+2D_{22}\frac{\pi^4}{b^4}B+\frac{4\pi^3}{a^2b^2}\left(D_{22}\frac{a^2}{b^2}+D_{12}\right)C-\\
-B_p\omega^2\left(\frac{16}{\pi^2}A+2B+\frac{4}{\pi}C\right)=0,\\[2ex]
\frac{4\pi^3}{a^2b^2}\left(D_{11}\frac{b^2}{a^2}+D_{12}\right)A+\frac{4\pi^3}{a^2b^2}\left(D_{22}\frac{a^2}{b^2}+D_{12}\right)B+\\
+\frac{\pi^4}{a^2b^2}\left[D_{11}\frac{b^2}{a^2}+2\left(D_{12}+2D_{33}\right)+D_{22}\frac{a^2}{b^2}\right]C-\\
-B_p\omega^2\left(\frac{4}{\pi}A+\frac{4}{\pi}B+C\right)=0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Преобразуем уравнения (15) таким образом, чтобы коэффициенты при неизвестных A, B, C стали безразмерными. Для этого разделим каждое из уравнений (15) на $\sqrt{D_{11}D_{22}}$. В результате преобразований получим

$$\begin{gathered}
2\pi^4\alpha A+16\pi^2\beta_{12}B+4\pi^3\left(\alpha+\beta_{12}\right)C-\\
-\eta\left(2A+\frac{16}{\pi^2}B+\frac{4}{\pi}C\right)=0,\\
16\pi^2\beta_{12}A+2\pi^4\frac{1}{\alpha}B+4\pi^3\left(\frac{1}{\alpha}+\beta_{12}\right)C-\\
-\eta\left(\frac{16}{\pi^2}A+2B+\frac{4}{\pi}C\right)=0,\\
4\pi^3\left(\alpha+\beta_{12}\right)A+4\pi^3\left(\frac{1}{\alpha}+\beta_{12}\right)B+\\
+\pi^4\left[\alpha+2\left(\beta_{12}+2\beta_{33}\right)+\frac{1}{\alpha}\right]C-\eta\left(\frac{4}{\pi}A+\frac{4}{\pi}B+C\right)=0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь

$$\alpha=\sqrt{\frac{D_{11}}{D_{12}}}\frac{b^2}{a^2},\quad \beta_{12}=\frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}},\quad \beta_{33}=\frac{D_{33}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}.$$

Величины α, β_{12}, β_{33} – безразмерные геометрические и жесткостные параметры ортотропной пластины.

Величина η в уравнениях (16) определяется равенством

$$\eta = \frac{B_p \omega^2 a^2 b^2}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}. \quad (17)$$

Это безразмерный частотный параметр. Таким образом, задача определения основной частоты изгибных колебаний ортотропной пластины, закрепленной в углах, сведена к нахождению параметра η, при котором однородная система (16) будет иметь решение, отличное от нуля.

Вычисление частотного параметра η может быть выполнено несколькими способами. Представим уравнения (16) в следующем матричном виде:

$$\mathbf{HX} - \eta\mathbf{GX} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Здесь

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2\pi^4\alpha & 16\pi^2\beta_{12} & 4\pi^3(\alpha+\beta_{12}) \\ 16\pi^2\beta_{12} & 2\pi^4\frac{1}{\alpha} & 4\pi^3\left(\frac{1}{\alpha}+\beta_{12}\right) \\ 4\pi^3(\alpha+\beta_{12}) & 4\pi^3\left(\frac{1}{\alpha}+\beta_{12}\right) & \pi^4\left[\alpha+2(\beta_{12}+2\beta_{33})+\frac{1}{\alpha}\right] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{16}{\pi^2} & \frac{4}{\pi} \\ \frac{16}{\pi^2} & 2 & \frac{4}{\pi} \\ \frac{4}{\pi} & \frac{4}{\pi} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

При традиционном способе величина η определяется как наименьший корень кубического уравнения, которое получено из условия $\det(\mathbf{H} - \eta\mathbf{G}) = 0$. В данной работе параметр η находится как наименьшее собственное число обобщенной задачи на собственные значения (18).

Из анализа коэффициентов (16) следует, что величина частотного параметра η зависит от безразмерных параметров α, β_{12}, β_{33}. Значения этих параметров определяются жесткостными и геометрическими характеристиками ортотропной пластины.

Когда частотный параметр η найден, основная частота колебаний может быть получена из формулы (17), т. е.

$$w = \frac{\xi}{ab}\sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}}{B_p}},$$

где $\xi = \sqrt{\eta}$.

В качестве примера определим частотный параметр для изотропной пластины, толщина которой равна h. Упругими характеристиками изотропного материала являются модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν. Плотность материала обозначим как ρ. Изгибные жесткости и инерциальный параметр для изотропной пластины определяются следующим образом:

$$D_{11} = D_{22} = \bar{E}\frac{h^3}{12}, \quad D_{12} = \bar{E}\nu\frac{h^3}{12},$$

$$D_{12} = \bar{E}\frac{1-\nu}{2}\frac{h^3}{12}, \quad B_p = \rho h, \quad (19)$$

где $\bar{E} = \dfrac{E}{1-\nu^2}$.

С учетом равенств (19) безразмерные параметры α, β_{12}, $\beta 33$ примут значения

$$\alpha = \frac{1}{c^2}, \quad \beta_{12} = \nu, \quad \beta_{33} = \frac{1-\nu}{2}, \quad (20)$$

где $c = a/b$ – отношение сторон пластины.

Частота колебаний изотропной пластины определяется по формуле

$$f = \frac{c\xi}{2\pi a^2}\sqrt{\frac{D}{B_p}}.$$

Из равенств (20) следует, что частотный параметр ξ для изотропной пластины, при заданном коэффициенте Пуассона ν, зависит только от отношения c. Полагая ν = 0,3, исследуем влияние отношения сторон c, изменяющегося от 1 до 2,5, на величину частотного параметра ξ.

Приведем результаты вычисления частотного параметра $c\xi$ для некоторых значений c (см. таблицу). В справочнике [3] можно найти аналогичные результаты, полученные с помощью метода конечных разностей. Из сравнения данных следует, что величины $c\xi$, найденные двумя способами, отличаются не более чем на 1,5 %. Это дает основание заключить, что предложенный в статье подход дает вполне приемлемые значения частотного параметра.

Вычисление частотного параметра

c	$c\xi$
1	7,22
1,5	9,05
1,0	9,10
2,5	9,49

Таким образом, с помощью обобщенного метода Галеркина решена задача определения основной частоты колебаний прямоугольной ортотропной пластины, которая закреплена от прогиба в угловых точках. Для аппроксимации прогиба пластины была использована комбинация тригонометрических функций. Показано, что рассматриваемая задача сводится к определению безразмерного частотного параметра, величина которого равна наименьшему собственному числу соответствующей однородной системы уравнений третьего порядка.

В качестве примера определен частотный коэффициент для изотропной пластины. Выполнено сравнение с результатами, полученными численным методом. Это сравнение позволило сделать вывод о том, что представленные в статье формулы позволяют с высокой точностью и минимальными вычислительными затратами определять основные частоты колебаний пластин, закрепленных углах.

Библиографические ссылки

1. Leissa A.W. Vibration of plates / Acoustical Society of America. Washington, D. C., 1993.
2. Vasiliev V. V. Mechanics of composite structures. Washington, D. C. : Taylor & Francis, 1993.
3. Blevins R. D. Formulas for natural frequency and mode shape. Malabar : Krieger Publishing Company, 1979.

I. A. Lopatin

DETERMINATION OF VIBRATIONS DOMINANT MODE OF AN ORTHOTROPIC PLATE FASTENED TO THE BEDDING ANGLES

The problem of determination of the fundamental frequency of vibration of a rectangular orthotropic plate, fastened to bedding angles, is solved by the generalized Galerkin method.

Keywords: orthotropic plate, generalized Galerkin method, fundamental oscillation frequency.

УДК 62.501

А. В. Медведев

Н-МОДЕЛИ ДЛЯ БЕЗЫНЕРЦИОННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается проблема моделирования нового класса процессов, имеющих «трубчатую» структуру в пространстве «входных-выходных» переменных. Модели процессов этого класса существенно отличаются от общепринятых параметрических моделей, представляющих собой поверхности в том же пространстве. Специально анализируется вопрос о моделировании многомерных систем при наличии малых объемов обучающих выборок. Для построения обучающихся параметрических моделей «трубчатых» процессов вводится соответствующий непараметрический индикатор. Приводится новый класс обучающихся параметрических моделей и некоторые результаты их численного исследования.

Ключевые слова: идентификация, непараметрические алгоритмы, непараметрическая модель, априорная информация, стохастические процессы, Н-модели.

Идентификация многих стохастических объектов часто сводится к идентификации статических систем с запаздыванием. Обусловлено это тем, что некоторые выходные переменные объекта контролируются через значительно большие интервалы времени, чем входные, и существенно превышают постоянную времени объекта.

Например, ряд переменных измеряется электрическим способом (в этом случае дискретность контроля Δt может быть достаточно мала), а другие переменные контролируются в ходе химического анализа или физико-механических испытаний (в этом случае дискретность контроля ΔT велика, т. е. $\Delta T >> \Delta t$). Тогда исследуемый объект может быть представлен статическим с запаздыванием. Такой процесс целесообразно по соответствующему каналу представить в виде

$$x(t) = f(u(t-\tau), \xi(t)) \qquad (1)$$

где $x(t)$ – выходная переменная объекта; $u(t-\tau)$ – входная переменная; τ – запаздывание; $\xi(t)$ – случайное возмущение, действующее на объект; t – непрерывное время.

Покажем каналы измерения с помехами h^u, h^x и дискретностью измерения $\Delta T >> \Delta t$ (рис. 1).

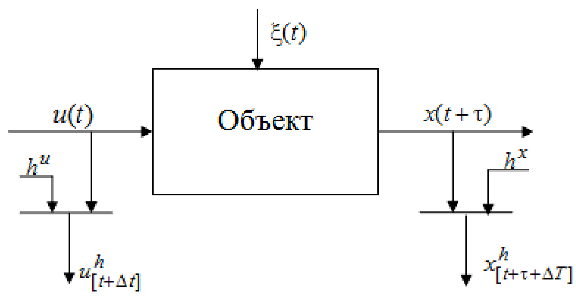

Рис. 1.