A. N. Rogalyov, A. A. Rogalyov

NUMERICAL COMPUTATIONS FOR ARTIFICIAL EARTH SATELLITE POSITION UNDER RESTRICTIONS ON MEASUREMENTS ERRORS

The application of the least squares and minimax methods for near-earth space object position identification under known restrictions on the measurement errors is considered in this article.

The computational schemes being used for a space object trajectories parameters evaluating under different measurement errors are studied.

The given algorithms accuracy characteristics under different measurement errors distributions are determined. The results of the computations are presented.

Keywords: method of the least squares, minimax method, motion trajectory identification, data filtering.

УДК 517.95

С. И. Сенашов

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Показано, что система m (m > 2) квазилинейных дифференциальных уравнений от двух переменных, имеющая две характеристики, сводится к системе двух квазилинейных уравнений и системе m – 2 линейных уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, гиперболические системы, две характеристики.

Рассмотрим систему дифференциальных квазилинейных уравнений первого порядка

$$a_{ij}(\bar{u})\partial_x u^j + b_{ij}(\bar{u})\partial_y u^j = 0, \quad i, j = 1,...,m, \qquad (1)$$

где $\bar{u} = (u^1, ..., u^m)$.

Пусть система (1) имеет только две характеристики

$$\frac{dy}{dx} = A(\bar{u}), \qquad \frac{dy}{dx} = B(\bar{u}),$$

а также m инвариантов Римана $\xi^1, ..., \xi^m$.

В этом случае система (1) может быть записана в виде

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x} + A(\xi^1,...,\xi^m)\,\frac{\partial\xi^1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\xi^2}{\partial x} + B(\xi^1,...,\xi^m)\,\frac{\partial\xi^2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial x} + C(\xi^1,...,\xi^m)\,\frac{\partial\xi^i}{\partial y} = 0, \quad i = 3, ..., m,$$

где C равно либо A, либо B.

Для простоты рассмотрим случай $m = 4$, который часто встречается, например, в теории пластичности.

Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi^1}{\partial x} + A(\xi^1, ..., \xi^4)\,\frac{\partial\xi^1}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial\xi^2}{\partial x} + B(\xi^1, ..., \xi^4)\,\frac{\partial\xi^2}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial\xi^3}{\partial x} + A(\xi^1, ..., \xi^4)\,\frac{\partial\xi^3}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial\xi^4}{\partial x} + B(\xi^1, ..., \xi^4)\,\frac{\partial\xi^4}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Умножим первое уравнение системы на $\dfrac{\partial\xi^3}{\partial y}$, а третье на $-\dfrac{\partial\xi^1}{\partial y}$ и сложим их. В результате получим

$$\frac{\partial\xi^3}{\partial y}\,\frac{\partial\xi^1}{\partial x} - \frac{\partial\xi^1}{\partial y}\,\frac{\partial\xi^3}{\partial x} = 0.$$

Это означает, что якобиан преобразования $J = \dfrac{\partial(\xi^1, \xi^3)}{\partial(x, y)} = 0.$

Следовательно, ξ^3 есть некоторая функция от ξ^1.

Аналогично из второго и третьего уравнений получаем, что ξ^4 есть некоторая функция от ξ^2.

Поэтому

$$A(\xi^1,...,\xi^4) = \bar{A}(\xi^1, \xi^2), \qquad B(\xi^1,...,\xi^4) = \bar{B}(\xi^1, \xi^2).$$

Отсюда получаем, что система уравнений

$$2\frac{\partial \xi^1}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x}+\overline{B}(\xi^1,\xi^2)\ \frac{\partial \xi^2}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \xi^3}{\partial x}+\overline{A}(\xi^1,\xi^2)\ \frac{\partial \xi^3}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \xi^4}{\partial x}+\overline{B}(\xi^1,\xi^2)\ \frac{\partial \xi^4}{\partial y}=0.$$

В результате получаем следующее утверждение: система m уравнений с двумя характеристиками сводится к двум квазилинейным уравнениям и к $m-2$ линейным уравнениям.

Первые два уравнения можно решить, используя законы сохранения, как это описано, например, в [1]. Остальные уравнения решаются традиционными методами.

В качестве примера рассмотрим уравнения идеальной пластичности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}-2k_s(\frac{\partial \theta}{\partial x}\cos 2\theta+\frac{\partial \theta}{\partial y}\sin 2\theta)=0,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}-2k_s(\frac{\partial \theta}{\partial x}\sin 2\theta-\frac{\partial \theta}{\partial y}\cos 2\theta)=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}}=\operatorname{tg}2\theta,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

где σ – гидростатическое давление; $\theta=(1,x)-\frac{\pi}{4}$, где $(1,x)$ – угол между главным направлением тензора напряжений и осью ox; u, v – компоненты вектора скорости.

Система уравнений (3) имеет две характеристики и четыре соотношения на них:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\theta,\quad \frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}\theta,\quad d\sigma\mp 2kd\theta=0,$$

$$\frac{du}{dv}=-\operatorname{tg}\theta,\qquad \frac{du}{dv}=\operatorname{ctg}\theta.$$

В результате преобразований система приводится к известному виду. Здесь мы использовали тот факт, что инварианты Римана ξ^3,ξ^4 зависят от ξ,η, а, следовательно, от них зависят и компоненты вектора скорости. Так получены два последних уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\operatorname{tg}\theta=0,\quad \frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial y}\operatorname{ctg}\theta=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\operatorname{tg}\theta=0,\quad \frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\operatorname{ctg}\theta=0,$$

где

$$\xi=\sigma+2k_s\theta,\quad \eta=\sigma-2k_s\theta.$$

Рассмотренный пример показывает, что можно выписать линейную систему уравнений, даже если не удается проинтегрировать два последних соотношений на характеристиках.

Библиографическая ссылка

1. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, 2001.

S. I. Senashov

ABOUT SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO CHARACTERISTICS

The author shows that the system m (m> 2) of quasi-linear differential equations, derived from two variables and having two characteristics, is reduced to a system of two quasilinear equations and m-2 linear equation system.

Keywords: partial differential equations of the first order, hyperbolic systems, two characteristics.