УДК 662.987

А. А. Зуев, А. А. Кишкин, М. И. Толстопятов, Д. А. Жуйков

ТЕПЛООТДАЧА ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТУРБОМАШИНАХ НА ОСНОВЕ ДВУХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ*

Рассмотрен частный случай течения газового потока, индуцированного вращением диска. Записаны интегральные соотношения уравнения энергии пространственного пограничного слоя для вращательного течения при степенном законе распределения скорости. Получены зависимости для оценки локальных коэффициентов теплоотдачи вращательных течений с различным распределением скорости.

Ключевые слова: теплоотдача, турбулентное течение, уравнение энергии, закон теплообмена.

Течение газового потока для турбонасосных агрегатов (ТНА) носит весьма сложный характер. Поперечный градиент давления оказывает существенное влияние на поверхностное трение и теплообмен. Влияние неучтенных в расчете тепловых нагрузок на узлы и конструкцию может привести к упругим деформациям, а также к нерасчетным параметрам вязкости и плотности рабочего тела, что влечет за собой отклонение от расчетного режима работы агрегата и падение КПД.

Широкое распространение в практике получили методы расчетов по учету теплоотдачи основанные на обобщении экспериментальных данных. Подобные методы показывают удовлетворительные результаты при рассмотрении относительно простых течений. В более сложных условиях, а именно при реализации вращательных течений, зависимости, основанные на обобщении экспериментальных исследований, не применимы, это объясняется достаточно скудными экспериментальными данными в этой области, а также отсутствием точных аналитических решений.

Большие возможности для поиска более точных зависимостей дает теория пограничного слоя. Многочисленными исследованиями установлено, что в большинстве важных для практики тепло- и массообмена между поверхностью тела и жидкостью процессов основная часть изменения температуры и концентрации также происходит в области, прилегающей к поверхности тела [1].

Рассмотрим частный случай турбулентного течения ($\mathrm{Re}_\omega \geq 3\cdot 10^5$) газового потока около вращающегося диска: распределение скорости (u) по толщине пограничного слоя (δ) к скорости в основном потоке (U), апроксимируется степенной функцией

$$\frac{u}{U}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}. \tag{1}$$

Учтем, что можно выделить несколько зон турбулентного пограничного слоя. В работе [2] опытные данные по замеру профиля скорости соответствуют линейной зависимости

$$u=\frac{\left(U^*\right)^2 y}{\nu}, \tag{2}$$

которая получена в предположении, что касательные напряжения полностью определяются как вязкостные, а динамическая скорость в выражении (2), характеризующая собой напряжение трения,

$$U^*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \tag{3}$$

может быть сопоставлена с потерей напора Δh прямолинейного равномерного потока в цилиндрической трубе по формуле

$$\tau_0=\Delta h\rho\frac{d}{4l}, \tag{4}$$

где Δh – потеря напора по длине l; d – диаметр трубы.

Очевидно, что подход определения характеристик через значения напряжения трения весьма трудоемок с точки зрения аналитических выкладок. Выразим динамическую скорость через параметры пограничного слоя. Потребуем, чтобы на границе вязкого подслоя ($\delta_л$) степенной закон (1) сопрягался с линейным законом (2), т. е. при $y=\delta_л$ будем иметь

$$\frac{\left(U^*\right)^2 y}{\nu}=U\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}. \tag{5}$$

Учитывая, что на внешней границе вязкого подслоя

$$\frac{U^*\delta_л}{\nu}=\alpha_л,$$

где $\alpha_л$ – постоянная. Можно записать

$$\delta_л=\frac{\alpha_л\nu}{U^*}. \tag{6}$$

Тогда с учетом (5), (6)

$$\frac{U^*\alpha_л}{U}=\left(\frac{\alpha_л\nu}{U^*\delta}\right)^{\frac{1}{7}}.$$

После несложных преобразований выражение для квадрата динамической скорости будет иметь вид

$$\left(U^*\right)^2=\frac{U^2}{\alpha_л^2}\left(\frac{\alpha_л^2\nu}{\delta U}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{7}$$

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.1835.

Рассмотрим случай, при котором толщины температурного и динамического пограничных слоев будут одинаковы, т. е. при Pr = 1

$$\frac{T-T_0}{T_\delta - T_0} = \frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \tag{8}$$

С учетом (8) выражение для определения толщины потери энергии в пограничном слое запишется в виде

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{T-T_0}{T_\delta - T_0}\right) dy =$$
$$= \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right) dy = 0,097 \cdot \delta. \tag{9}$$

Учитывая закон теплообмена

$$\mathrm{St} = \frac{q_0}{\rho C_p U (T_\delta - T_0)} = \frac{\lambda \left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{\rho C_p U \left(T_\delta - T_0\right)} =$$
$$= \frac{\lambda}{\rho C_p U} \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T-T_0}{T_\delta - T_0}\right)\right]_{y=0},$$

определим производную температурного пограничного слоя на стенке:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T-T_0}{T_\delta - T_0}\right)\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{U}\right)\Big|_{y=0} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\Big|_{y=0} = \frac{1}{7 \cdot \delta^{1/7} \cdot y^{6/7}}\Big|_{y=0}. \tag{10}$$

Рассмотрим двухслойную модель пограничного слоя, с учетом (1) и (2) в ламинарном подслое имеем

$$\frac{u}{U} = \frac{\left(U^*\right)^2 y}{\nu U},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{U}\right)\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\left(U^*\right)^2 y}{\nu U}\right)\Big|_{y=0} =$$
$$= \frac{\left(U^*\right)^2}{\nu U}\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T-T_0}{T_\delta - T_0}\right) = \mathrm{const}. \tag{11}$$

Примем во внимание выражение для динамической скорости (7) и толщины потери энергии температурного пограничного слоя (9), окончательно запишем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T-T_0}{T_\delta - T_0}\right) = \frac{0,558 \cdot U \cdot \left(\dfrac{\alpha_л{}^2 \cdot \nu}{U \cdot \delta_{t\varphi}^{**}}\right)^{1/4}}{\alpha_л{}^2 \cdot \nu}. \tag{12}$$

Закон теплообмена в виде критерия Стантона для степенного профиля распределения скорости имеет вид

$$\mathrm{St} = \frac{\lambda}{\rho C_p U} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T-T_0}{T_\delta - T_0}\right) =$$
$$= \frac{0,558 \cdot \lambda \cdot \left(\dfrac{1}{\alpha_л{}^6 \cdot \nu^3 \cdot \delta_{t\varphi}^{**}}\right)^{\frac{1}{4}}}{Cp \cdot U^{1/4} \cdot \rho}. \tag{13}$$

После упрощения закон теплообмена для турбулентного течения газа имеет вид

$$\mathrm{St} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{0,25}} \frac{0,558}{\alpha_л^{1,5} \nu^{0,75}} \frac{1}{\delta_{t\varphi}^{**0,25}}. \tag{14}$$

Следует отметить, что для практического применения закона теплообмена (14) необходимо определить значение $\alpha_л$. Воспользуемся выражением (3):

$$\rho\left(U^*\right)^2 = \tau_0$$

и выражением для закона трения на плоской пластине при турбулентном обтекании для степенного профиля распределения скорости:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = 0,012\,56\left(\frac{U\delta_\varphi^{**}}{\nu}\right)^{-0,25},$$

тогда выражение (3) примет вид

$$\left(U^*\right)^2 = \frac{\tau_0}{\rho} = 0,012\,56 U^2 \left(\frac{U\delta_\varphi^{**}}{\nu}\right)^{-0,25}. \tag{15}$$

Из условия подобия динамического и температурного пограничных слоев получаем значение производной

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T-T_0}{T_\delta - T_0}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{U}\right) = \frac{\left(U^*\right)^2}{\nu U},$$

окончательно имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T-T_0}{T_\delta - T_0}\right) = \frac{0,012\,56 \cdot U^{0,75}}{\nu^{0,75} \delta_{t\varphi}^{**0,25}}. \tag{16}$$

Видно, что выражение (12), полученное из условия смыкания ламинарного подслоя с турбулентным профилем при $y = \delta_л$, и (16), полученное из закона трения степенного турбулентного профиля, имеют сходную форму и отличаются лишь численным коэффициентом. Потребовав равенства производных, определим коэффициент $\alpha_л$:

$$\frac{0,012\,56 \cdot U^{0,75}}{\nu^{0,75} \cdot \delta_{t\varphi}^{**0,25}} = \frac{0,558 \cdot U \cdot \left(\dfrac{\alpha_л{}^2 \cdot \nu}{U \cdot \delta_{t\varphi}^{**}}\right)^{1/4}}{\alpha_л{}^2 \cdot \nu}. \tag{17}$$

Лучшее совпадение с полученным значением $\alpha_л = 12,559$ дает значение, полученное в работе [3], расхождение составляет 10 %; при $\alpha_л = 5$, полученном в [4], расхождение в 3 раза.

При подстановке (14) в интегральное соотношение уравнения энергии, полученное в [5], учтем что, для вращательного движения (линия тока – кольцевая линия) удобнее выполнить запись в цилиндрических координатах: $\varphi = \alpha;$; $\psi = R$; $H_\varphi = R$; $\frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial R}{\partial R} = 1$; $H_\psi = 1$; $\frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0,$ тогда будем иметь

$$J\varepsilon \frac{\partial}{\partial R}\delta_{t\varphi}^{**} + \frac{J\varepsilon}{R}\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{0,25}} \frac{0,558}{\alpha_л^{1,5} \nu^{0,75}} \frac{1}{\delta_{t\varphi}^{**0,25}} - \frac{\tau_{\varphi 0}\left(1+\varepsilon^2\right)}{\rho C_p \left(T_\delta - T_0\right)}. \quad (18)$$

Выражение для определения коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$\alpha = \rho \cdot Cp \cdot U \cdot \mathrm{St}. \quad (19)$$

После преобразования (18) с учетом (19) можно записать выражения для определения коэффициента локальной теплоотдачи для вращательных течений газового потока с различным распределением скоростей. Для вращательного течения по закону свободного вихря, с распределением скорости $UR = C = \mathrm{const}$ имеем:

$$\alpha = \frac{2,18 \cdot \rho \cdot Cp \cdot U}{\mathrm{Pr}^{\frac{4}{5}}} \left(\frac{2J\varepsilon}{\alpha_л^6 \cdot \mathrm{Re}_\omega} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (20)$$

Для вращательного течения, индуцированного вращением диска (закон твердого тела), с распределением скорости $\frac{U}{R} = \omega = \mathrm{const}$

$$\alpha = \frac{0,528 \cdot \rho \cdot Cp \cdot U}{\mathrm{Pr}^{\frac{4}{5}}} \left(\frac{2J\varepsilon}{\alpha_л^6 \cdot \mathrm{Re}_\omega} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (21)$$

В (23) и (24) J – относительная характерная толщина, полученная в работе [6], ε – тангенс угла скоса донной линии тока.

Таким образом, получены зависимости для оценки локального коэффициента теплоотдачи вращательных течений газового потока при различном распределении скоростей; выражения позволяют учитывать локальную температуру движущегося потока, распределение температуры в теплопроводящей стенке, элементарное количество тепла, переданного через единицу поверхности; вывод выражений осуществлялся с учетом подобия температурного и динамического пограничных слоев, что характерно для частного случая Pr = 1.

Библиографические ссылки

1. Кейс В. М. Конвективный тепло- и массообмен : пер. с англ. М. : Энергия, 1972. 448 с.

2. Войткунский Я. И., Фаддеев Ю. И., Федяевский К. К. Гидромеханика : учебник. 2-е изд., перераб. и доп. Л. : Судостроение, 1982. 456 с.

3. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика : учебник для вузов. 2-е изд. перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1987. 440 с.

4. Романенко П. Н. Тепломассообмен и трение при градиентном течении жидкостей. М. : Энергия, 1971.

5. Интегральное соотношение уравнения энергии температурного пространственного пограничного слоя / А. А. Зуев [и др.] // Вестник Рыбинской гос. авиац. технол. акад. имени П. А. Соловьева. 2010. № 2 (17). С. 37–42.

6. Относительные характерные толщины динамического пограничного слоя при различных законах распределения скорости / А. А. Кишкин [и др.] // Вестник СибГАУ. 2009. № 3 (24). С. 129–133.

A. A. Zuev, A. A. Kishkin, M. I. Tolstopyatov, D. A. Zhuykov

ROTATIONAL FLOWS HEAT TRANSFER IN TURBOMACHINES BASED ON TWO-LAYER MODEL OF TURBULENT BOUNDARY LAYER

Individual case of flow of gas flow induced by rotation of disk is considered in the article. Integral relations of energy equation of dimensional boundary layer for flow with rotary power law velocity distribution is presented. Dependencies for estimation of local heat transfer coefficients of rotational flows with different velocity distribution are obtained.

Keywords: convective heat transfer, turbulent flow, energy equation, heat transfer law.