

УДК 512.54

К. А. Филиппов

О ДИАМЕТРЕ КЭЛИ ОДНОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $B_0(2,5)$

Пусть $\{x, y\}$ – порождающие элементы максимальной конечной группы периода 5 и $h_1 = xy$, $h_2 = yx$. Вычислена функция роста и диаметр Кэли подгруппы $H = \langle h_1, h_2 \rangle$.

Ключевые слова: проблема Бернсайда.

Свободной бернсайдовой группой периода n с m образующим называется группа $B(m, n) = F_m / F_m^n$, где F_m – свободная группа ранга m и F_m^n – ее подгруппа, порожденная всеми n -ми степенями элементов из F_m . Проблема Бернсайда для пары (m, n) звучит так: является ли группа $B(m, n)$ конечной? Как показали П. С. Новиков и С. И. Адян [1], ответ отрицательный, если $m \geq 2$ и $663 < n$ – достаточно большое нечетное число. Также С. В. Иванов [2] и И. Г. Лысёнок [3] показали, что $B(m, n)$ бесконечна, если $n \geq 2^{48}$ и n делится на 2^9 и $n = 16k \geq 8\,000$. Однако для небольших нечетных n ($5 \leq n \leq 663$) и четных n , не удовлетворяющих условиям С. В. Иванова и И. Г. Лысёнка, проблема Бернсайда остается нерешенной.

Пусть $B_0(m, n) = F_m / U(m, n)$, где $U(m, n)$ – пересечение всех нормальных подгрупп $N \leq F_m$, для которых F_m / N – конечная группа периода n . Как показал А. И. Кострикин, $B_0(m, n)$ конечна, если n – простое число [4]. Эту теорему А. И. Кострикина Е. И. Зельманов обобщил для случая, когда n – степень простого числа [5]. Отсюда и из результатов Ф. Холла и Г. Хигмэна с использованием классификации конечных простых групп вытекает существование $B_0(m, n)$ для произвольных m и n [6]. Поскольку $B(2, 5)$ является наименьшей из бернсайдовых групп, для которых решен вопрос об их конечности, любые сведения о ней и, в частности, о $B_0(2, 5)$, интересны. Так, А. И. Кострикин установил границы

для порядка группы $B_0(2, 5)$: $5^{31} \leq |B_0(2, 5)| \leq 5^{34}$ [4].

В 1974 г. Хавас, Уолл и Уэмсли [7] при помощи компьютерных вычислений нашли определяющие соотношения, определили точный порядок группы $B_0(2, 5)$ который равен 5^{34} , и ступень нильпотентности данной группы, равную 12.

Рассмотрим в $B_0(2, 5) = \langle x, y \rangle$ подгруппу $H_0 = \langle h_1, h_2 \rangle$, где $h_1 = xy$, $h_2 = yx$. Как отмечалось выше, сравнение групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$ затруднено из-за большого порядка группы $B_0(2, 5)$. Приводимая ниже теорема позволяет проводить сравнение группы H_0 , имеющей порядок существенно меньше, чем 5^{34} , с ее аналогом H в группе $B_0(2, 5)$.

Теорема. Диаметр Кэли группы H_0 относительно порождающих $\{h_1, h_2\}$ равен 45.

Доказательство. Непосредственные вычисления проводились на кластере института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета. Для работы было выделено 125 однородных вычислительных узлов в режиме непрерывного доступа. Каждый узел снабжен процессором с тактовой частотой 3 ГГц и ОЗУ 4 ГБ. В качестве программного инструмента была взята система компьютерной алгебры MATLAB 7.7.0.

Ниже приведена вычисленная функция роста элементов группы H_0 (см. таблицу), а также ее график (рис. 1). Часть элементов максимальной длины 45 группы H_0 в формате минимальных слов приведена на рис. 2.

Функция роста элементов группы H_0

Длина	Элементы	Длина	Элементы	Длина	Элементы
0	1	16	37254	32	561801464
1	2	17	70751	33	779044350
2	4	18	134224	34	936055279
3	8	19	254321	35	954336955
4	16	20	481252	36	831332170
5	30	21	909349	37	618248452
6	58	22	1714866	38	367604796
7	112	23	3226931	39	151894200
8	214	24	6055431	40	34898104
9	410	25	11319139	41	3181218

Продолжение таблицы

Длина	Элементы	Длина	Элементы	Длина	Элементы
10	784	26	21039700	42	69158
11	1495	27	38795471	43	800
12	2847	28	70686385	44	316
13	5417	29	126432849	45	158
14	10303	30	219647100	Всего	6103515625
15	19602	31	364201879		

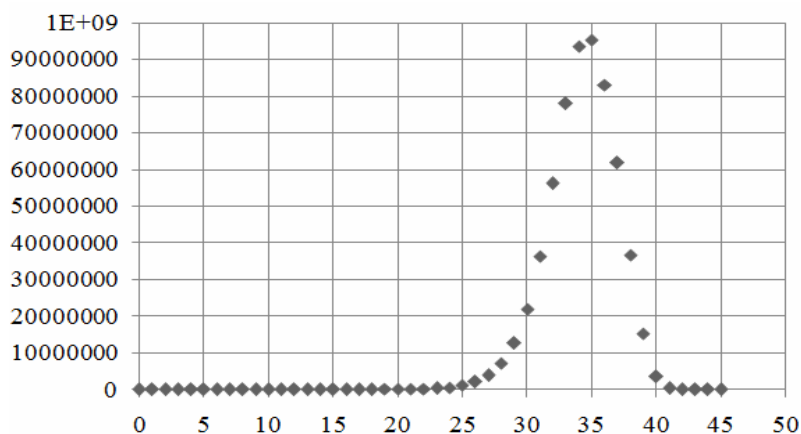


Рис. 1

1	000010001001110001010000111100111001101010011
2	000010001001011100001101111000100110100011011
3	000010000100110011000101011100110001001110111
4	000010000101010110100110010101110001011000111
5	00001000010111000101110011010001101100010011
6	000010000101110011010010001111010100011001011
7	000010000101010011100111011001100001010010111
8	000010000101001011000100110101100111001100111
9	000010000100011011100101110011000110011010011
0	000010000101110000100101101111011000110000111
11	000010000100100101100100111100110100011011011
12	00001000010010010101110111011000110100100011
13	000010000101000011101001000110111011110010011
14	000010000101000100001110101110110101011000111
15	000010001001101000101110110100111100100010011
16	000010001001100101100111001001110001000110111
17	000010001001110001101010010011010001110111001
18	000010000110100011101011011110010010001011001
19	000010000110000111010110100011010111001100101
20	000010000111101011100100010100101100001011011

Рис. 2

Библиографические ссылки

1. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
2. Ivanov S. V. The free Burnside group of sufficiently large exponent // Intern. J. of Algebra and Computation. 1994. Vol. 4. P. 2.
3. Лысёнок И. Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60. С. 3–224.
4. Кострикин А. И. Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1995. Т. 19. № 3. С. 233–244.

5. Зельманов Е. И. Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп // Мат. сб. 1991. Т. 182. № 4. С. 568–592.
6. Hall P., Higman G. On the p-length of p-soluble groups and reduction theorem of Burnside problem // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 6. № 3. P. 1–42.
7. Havas G., Wall G., Wamsley J. The two generator restricted Burnside group of exponent five // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. Vol. 10. P. 459–470.

K. A. Philippov

ABOUT CAYLEY DIAMETER OF ONE SUBGROUPE OF THE GROUPE $B_0(2,5)$

Let $\{x, y\}$ be generators of the largest finite group of exponent 5 and $h_1 = xy$, $h_2 = yx$. The growth function and Cayley diameter are calculated for the subgroup $H = \langle h_1, h_2 \rangle$.

Keywords: Burnside problem.

© Филиппов К. А., 2012