

И. И. Вайнштейн, П. С. Литвинов

МОДЕЛЬ М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА О СКЛЕЙКЕ ВИХРЕВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Доказана теорема о существовании нетривиального решения (с вихревой зоной течения) в модели отрывных течений идеальной жидкости М. А. Лаврентьева с произвольной завихренностью.

Ключевые слова: вихревое течение, потенциальное течение, модель отрывных течений М. А. Лаврентьева, интегральные уравнения.

В модели отрывных течений идеальной жидкости М. А. Лаврентьева предполагается, что в области течения образуются две зоны: зона потенциального течения и зона вихревого течения [1].

В случае течения в ограниченной области, когда завихренность ω постоянна, эта модель приводится к следующей задаче: в ограниченной области D с границей Γ требуется найти непрерывно-дифференцируемое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < 0, \\ 0, & \text{если } \psi > 0 \end{cases} \quad (1)$$

при краевом условии

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi(s) \geq 0, \quad (2)$$

где завихренность $\omega > 0$; $\psi(x, y)$ – функция тока;

$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ – компоненты скорости [2].

Гармоническая функция $\psi_0(x, y)$, удовлетворяющая условию (2), в силу принципа максимума положительна в области D и, тем самым, является решением уравнения (1). Это решение назовем тривиальным.

В работе М. А. Гольдштика [2] доказано существование нетривиального (с областью отрицательности) решения задачи (1), (2) при достаточно большом значении величины ω . В [3] И. И. Вайнштейном получено условие

$$\omega > \frac{4Ce}{R^2}, \quad (3)$$

при котором существует нетривиальное решение задачи. Здесь R – радиус наибольшего по площади круга, который можно вписать в область D , $C = \max \varphi(s)$.

В общем случае вихревое течение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = F(\psi),$$

где завихренность $\omega = F(\psi)$; $F(\psi)$ – произвольная функция от ψ [4]. Если $F(\psi) \equiv 0$, то имеем потенциальное течение. В случае $\omega = \text{const}$ течение идеальной жидкости рассматривается как предельное течение вязкой жидкости в области, ограниченной замкнутой линией тока, когда вязкость стремится к нулю.

Представляет интерес рассмотрение модели М. А. Лаврентьева для течения в ограниченной области для произвольной завихренности $F(\psi)$.

Пусть $B \subset D$ – область отрыва (область вихревого течения). Для общего случая завихренности задачу о склей-

ке вихревых и потенциальных течений можно сформулировать следующим образом: в области D требуется найти непрерывно-дифференцируемое решение уравнения

$$\Delta \psi = \begin{cases} F(\psi), & \text{если } (x, y) \in B, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin B \end{cases} \quad (4)$$

при краевом условии

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi(s) \geq 0. \quad (5)$$

Пусть на границе зоны отрыва $\psi = 0$ и $\omega > 0$ [5]. Тогда в вихревой зоне $\Delta \psi = \omega = F(\psi) > 0$ и функция ψ принимает наибольшее значение на границе области B [6]. Принимая во внимание, что на границе области B $\psi = 0$, заключаем, что в области B функция $\psi < 0$.

Это свойство позволяет сформулировать задачу (4), (5) в виде уравнения

$$\Delta \psi = \begin{cases} F(\psi), & \text{если } \psi < 0, \\ 0, & \text{если } \psi > 0 \end{cases} \quad (6)$$

при краевом условии

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi(s) \geq 0. \quad (7)$$

Ее решение ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых в области D .

Гармоническая в области D функция $\psi_0(x, y)$, удовлетворяющая краевому условию (7), положительна в области D и так же, как в задаче (1), (2), является тривиальным решением задачи (6), (7).

Докажем теорему о существовании нетривиального решения задачи (6), (7).

Теорема. Пусть $F(\psi)$ – невозрастающая, непрерывно дифференцируемая функция от ψ $0 < \omega_0 \leq F(\psi) \leq K$, C_R – круг максимального радиуса, который можно вписать в область D (без ограничения общности можно считать, что его центр находится в начале координат), $\max \varphi(s) = C$. Тогда при условии

$$\omega \geq \frac{4Ce}{R^2} \quad (8)$$

задача (6), (7) имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Введем функцию

$$\psi^* = \psi_0 - \frac{\omega_0}{2\pi} \iint_{C_a} G(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

где C_a – круг с центром в начале координат радиуса a , $C_a \subset C_R$; $G(x, y, x_1, y_1)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге C_R .

В области C_a функция ψ^* удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta \psi^* = \omega_0$, а вне C_a она гармонична и на границе области D равняется $\varphi(s)$. Из свойств интеграла с

логарифмической особенностью (плоского потенциала) следует, что ψ^* непрерывна в области D вместе с производными первого порядка, которые удовлетворяют условию Гельдера с любым показателем $\alpha < 1$ [7].

Функция

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C_a} (G - G_R) dx_1 dy_1$$

в круге C_R удовлетворяет уравнению $\Delta W = 0$. На границе круга C_R $W \geq 0$. Из принципа экстремума для гармонических функций следует, что

$$W > 0 \quad \text{при } (x, y) \in C_R. \quad (9)$$

Используя неравенство (9), получим

$$\psi^* = \psi_0 - \frac{\omega_0}{2\pi} \iint_{C_a} (G - G_R) dx_1 dy_1 - \frac{\omega_0}{2\pi} \times$$

$$\times \iint_{C_a} G_R dx_1 dy_1 < \psi_1^* = C - \frac{\omega_0}{2\pi} \iint_{C_a} G_R dx_1 dy_1, \quad (x, y) \in C_R.$$

Подберем радиус a таким, чтобы ψ_1^* равнялось нулю при $r = a$. Тогда ψ_1^* будет меньше нуля в C_a , тем самым в C_a будет меньше нуля и ψ^* .

Функция ψ_1^* является непрерывно-дифференцируемым решением уравнения

$$\Delta \psi_1^* = \begin{cases} \omega_0, & \text{если } (x, y) \in C_a, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in C_R \setminus C_a \end{cases} \quad (11)$$

при краевом условии

$$\psi_1^*|_{r=R} = C. \quad (12)$$

Требуя, чтобы ψ_1^* равнялось нулю при $r = a$, приходим к задаче о склейке вихревых (с постоянной завихренностью ω_0) и потенциальных течений в круге C_R :

$$\Delta \psi_1^* = \begin{cases} \omega_0 & \text{если } \psi_1^* < 0, \\ 0, & \text{если } \psi_1^* > 0 \end{cases} \quad (13)$$

при краевом условии (12).

В [5] получено, что при $\omega > \frac{4Ce}{R^2}$ эта задача имеет два

таких решения, что существуют два круга C_{a_1} и C_{a_2} с радиусами a_1 и a_2 соответственно, в которых $\psi_1^* < 0$, и на их границах $\psi_1^* = 0$.

Возьмем за C_a , например, круг C_{a_1} , $a_1 < a_2$. Так как в нем $\psi_1^* < 0$, то и $\psi^* < 0$, как это следует из неравенства (10).

Если $\omega_0 = \frac{4Ce}{R^2}$, то имеется только один круг, на границе которого $\psi_1^* = 0$ [5], и в этом случае за C_a возьмем этот круг.

Функция ψ^* – гармоническая в $D \setminus \overline{C_a}$, и $\psi^*|_{\Gamma} \geq 0$, $\psi^*|_{r=a_1} < 0$. Отсюда следует, что существует аналитическая кривая γ_1 (линия уровня гармонической функции ψ^*), на которой $\psi^* = 0$. Линия γ_1 лежит вне области C_{a_1} . Кривая γ_1 не может самопересекаться, так как в этом случае образуется область $B^* \subset D \setminus C_a$, на границе которой гармоническая функция $\psi^* = 0$. Тогда она тождественно равна нулю в B^* , а отсюда в силу аналитичности она тождественно равна нулю всюду вне C_a , что невозможно в силу граничных условий.

Построим последовательность функций ψ_n , сходящихся к решению рассматриваемой задачи. Пусть B_1 – полученная область отрицательности функции ψ^* . Ясно, что C_a содержится в B_1 . Положим

$$\psi_1 = \psi^*,$$

$$\psi_2 = \psi_0 - \frac{1}{2\pi} \iint_{B_1} F(\psi_1) G(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (14)$$

Представим $F(\psi)$ в виде

$$F(\psi) = \omega_0 + (F(\psi) - \omega_0) = \omega_0 + \Phi(\psi), \quad \Phi(\psi) \geq 0.$$

Учитывая, что $B_1 \supset C_a$, запишем $B_1 = C_a + \Delta_1$. Тогда

$$\psi_2 - \psi_1 = \frac{\omega_0}{2\pi} \iint_{C_a} G dx_1 dy_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint_{B_1} F(\psi^*) G dx_1 dy_1 =$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi} \iint_{C_a} G dx_1 dy_1 - \frac{1}{2\pi} \iint_{C_a} F(\psi^*) dx_1 dy_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta_1} F(\psi^*) G dx_1 dy_1 =$$

$$= - \frac{1}{2\pi} \iint_{C_a} \Phi(\psi^*) G dx_1 dy_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta_1} F(\psi^*) G dx_1 dy_1 < 0.$$

Отсюда $\psi_2 < \psi_1$ и $\psi_2 < 0$ в области B_1 .

Аналогично предыдущему, имеем линию γ_2 , лежащую вне области B_1 , на которой $\psi_2 = 0$. Пусть B_2 – область отрицательности функции ψ_2 , $B_2 \supset B_1$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность областей B_n и функций

$$\psi_n = \psi_0 - \frac{1}{2\pi} \iint_{C_a} F(\psi_{n-1}) G dx_1 dy_1, \quad n = 2, 3, \dots$$

Докажем, что $\psi_{n+1} \leq \psi_n$. Положим $\psi_n \leq \psi_{n-1}$. Тогда $B_n \supset B_{n-1}$ и $B_n = B_{n-1} \cup \Delta_n$ (мера $\Delta_n > 0$). Учитывая, что $F(\psi)$ – невозрастающая функция, получим

$$\psi_{n+1} - \psi_n = \frac{1}{2\pi} \iint_{B_{n-1}} F(\psi_{n-1}) G dx_1 dy_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint_{B_n} F(\psi_n) G dx_1 dy_1 =$$

$$= - \frac{1}{2\pi} \iint_{B_{n-1}} [F(\psi_{n-1}) - F(\psi_n)] G dx_1 dy_1 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta_n} F(\psi_n) G dx_1 dy_1 < 0. \quad (15)$$

Таким образом, $\psi_{n+1} < \psi_n$ и $B_{n+1} \supset B_n$. Мы получили монотонно убывающую последовательность функций ψ_n , ограниченную снизу:

$$\psi_n = \psi_0 - \frac{1}{2\pi} \iint_{B_{n-1}} F(\psi_{n-1}) G dx_1 dy_1 \geq \psi_0 -$$

$$- \frac{K}{2\pi} \iint_{B_{n-1}} G dx_1 dy_1 \geq \psi_0 - \frac{K}{2\pi} \iint_D G dx_1 dy_1,$$

и монотонную последовательность областей $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$, содержащихся в области D . Отсюда вытекает, что последовательность ψ_n сходится вместе с последовательностью вложенных областей B_n [8].

Обозначим $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ и докажем, что предельная функция ψ непрерывно дифференцируема в области D .

Исходя из свойств интеграла типа плоского потенциала с логарифмической особенностью, заключаем, что ψ_n имеет внутри области D непрерывные частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера, причем показатель α и константа Гельдера не зависят от n [7], так что последовательность ψ_n равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в $C^1(D)$. По теореме Арцела последовательность ψ_n компактна в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^1(D)$. Значит, имеется подпоследовательность ψ_{n_k} , сходящаяся к функции, непрерывно дифференцируемой в области D . Отсюда с учетом того, что сама последовательность ψ_n сходится, следует, что ее предельная функция $\psi(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области D .

Пусть γ – граница области B . Возьмем произвольную точку $(x^*, y^*) \in \gamma$. Так как

$$\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n, \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n,$$

то в произвольной δ -окрестности точки (x^*, y^*) , начиная с некоторого номера, находятся и точки из B_n и γ_n . А теперь возьмем последовательность точек $(x_n, y_n) \in \gamma_n$ и (x_n, y_n) , которые принадлежат выбранной окрестности точки (x^*, y^*) . По построению $\psi_n = 0$ на γ_n , так что $\psi_n(x_n, y_n) = 0$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число N , что при $n > N$ вследствие равномерной сходимости последовательности ψ_n

$$|\psi_n(x^*, y^*) - \psi(x^*, y^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и вследствие равностепенной непрерывности

$$|\psi_n(x_n, y_n) - \psi_n(x^*, y^*)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} |\psi(x^*, y^*)| &= |\psi(x^*, y^*) - \psi_n(x^*, y^*) + \\ &+ \psi_n(x^*, y^*) - \psi_n(x_n, y_n)| \leq \\ &\leq |\psi_n(x^*, y^*) - \psi(x^*, y^*)| + |\psi_n(x_n, y_n) - \\ &- \psi_n(x^*, y^*)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

В результате получим $|\psi(x^*, y^*)| < \varepsilon$. В силу произвольности ε заключаем, что $\psi(x^*, y^*) = 0$.

Покажем, что в точках, где $\psi < 0$, $\Delta\psi = F(\psi)$. Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ $\psi < 0$. Точка M_0 , начиная с некоторого N , будет принадлежать всем областям B_n , $n \geq N$. В силу непрерывности ψ можно взять круг C_ε с центром в точке M_0 радиуса ε , который также будет принадлежать всем областям B_n , $n \geq N$, границей C_ε будет γ_ε .

Рассмотрим последовательность задач

$$\Delta v_n = F(n_{n-1}), \quad v_n|_{\gamma_\varepsilon} = \psi_n|_{\gamma_\varepsilon}.$$

За решение возьмем $v_n = \psi_n$.

Полагая $\psi_n = \psi_n^* + \psi_0$, где ψ_0 – гармоническая в круге C_ε функция, принимающая на γ_ε значения ψ_n , получаем

$$\Delta\psi_n^* = F(\psi_{n-1}^* + \psi_0) = F_1(x, y, \psi_{n-1}^*), \quad (16)$$

$$\psi_n^*|_{\gamma_\varepsilon} = 0 \quad (17)$$

Задача (16), (17) в условиях теоремы рассмотрена в монографии Р. Куранта [7], где доказано, что предельная функция $\psi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^*$ является в C_ε решением уравнения

$$\Delta\psi^* = F_1(x, y, \psi^*),$$

а значит

$$\Delta\psi = F(\psi).$$

Теперь возьмем точку $M_0 \in D$, не принадлежащую $\bar{B}$ и ψ в точке (x_0, y_0) больше нуля (здесь $\bar{B}$ не совпадает с D). Возьмем такое ε , что в C_ε нет точек $\bar{B}_n$. Вне $\bar{B}_n$ функции ψ_n гармонические и неотрицательны. Таким образом, в круге C_ε имеем сходящуюся последовательность убывающих гармонических функций ψ_n . Из второй теоремы Гарнака для гармонических функций следует гармоничность предельной функции в C_ε [7]. Так как M_0 из $D \setminus \bar{B}$ – произвольная точка, то ψ^* – гармоническая функция во всех точках, в которых она больше нуля. Следовательно, предельная функция ψ является решением исходной задачи (6), (7).

Таким образом, нами была обоснована модель отрывных течений идеальной несжимаемой жидкости М. А. Лаврентьева с произвольной, положительной, не возрастающей, ограниченной завихренностью.

Библиографический список

1. Лаврентьев, М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
2. Гольдштик, М. А. / М. А. Гольдштик // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313.
3. Вайнштейн, И. И. Движение идеальной жидкости с завихренными зонами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / И. И. Вайнштейн. Новосибирск, 1972.
4. Ламб, Г. Гидродинамика / Г. Ламб. М.: Гостехиздат, 1947.
5. Гольдштик, М. А. Вихревые потоки / М. А. Гольдштик. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.
6. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. В 4 т. Т. 4 / В. И. Смирнов. М.: Гостехиздат, 1951.
7. Курант, Р. Методы математической физики. В 2 т. Т. 2 / Р. Курант, Д. Гильберт. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
8. Хаусдорф, О. Теория множеств / О. Хаусдорф. М.: ОНТИ, 1937.

I. I. Weinstein, P. S. Litvinov

M. A. LAVRENTEV MODEL ABOUT PASTING VORTICAL AND POTENTIAL CURRENTS OF THE IDEAL LIQUID

In work the theorem of the non trivial solutions existence (with a vortical zone of a current) in M. A. Lavrentev model separated currents of the ideal liquid with any vorticity is proved.

Keywords: vortical current, potential current, M. A. Lavrentev model of separated currents, integrated equations.

© Вайнштейн И. И., Литвинов П. С., 2009