УДК 62-251-762.89:532.5.013.12

А. А. Кишкин, Е. В. Черненко, А. А. Зуев, В. С. Горошко

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОННЫХ ЛИНИЙ ПОТОКА ПРИ РАЗВОРОТЕ ПОТОКА

Рассмотрен разностно-характеристический способ интегрирования параболичной системы квазилинейных дифференциальных уравнений импульсов пространственного пограничного слоя при течении в круговом секторе. Отмечено удовлетворительное совпадение результатов численной и экспериментальной визуализации донных линий тока.

Ключевые слова: пространственный пограничный слой, уравнения импульсов, дифференциальное соотношение, визуализация донных линий тока.

Значительный круг задач, рассматривающих течение рабочего тела в проточной части лопаточных машин, связан с необходимостью интегрирования уравнений пограничного слоя по сложной криволинейной поверхности с поперечным градиентом давления. Наиболее верные и продуктивные шаги в этом направлении были сделаны Г. Ю. Степановым [1] и С. Н. Шкарбулем [2], построившим свои гипотезы на анализе сил, действующих на элементарный объем жидкости при повороте. Однако отсутствие обоснования коэффициентов Ламе для рассмотренных ими каналов, а также то, что ядро потока принимается потенциальным (безвихревым), не дает возможности адаптировать уравнения для случая произвольного закона распределения скоростей и давлений в ядре потока. Для эффективного выбора метода решения и построения расчетного алгоритма необходимо привести систему уравнений импульсов пространственного пограничного слоя (ППС) к виду, определенному по переменным и позволяющему вести как численное, так и аналитическое интегрирование. Общий вид уравнений пространственного пограничного слоя [3] в естественной системе координат

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial\delta_\phi^{**}}{\partial\phi}+\frac{1}{H_\phi U}\frac{\partial U}{\partial\phi}\left(2\delta_\phi^{**}+\delta_\phi^{*}-\delta\right)+\\
+\frac{1}{H_\psi}\frac{\partial\delta_{\phi\psi}^{**}}{\partial\psi}+\frac{1}{H_\psi U}\frac{\partial U}{\partial\psi}\times\\
\times\left(2\delta_{\phi\psi}^{**}-\delta_\psi\right)+\frac{1}{H_\phi H_\psi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\psi}\left(2\delta_{\phi\psi}^{**}-\delta_\psi^{*}\right)=\\
=\frac{1}{\rho H_\phi U^2}\frac{\partial p}{\partial\phi}\delta+\frac{\tau_{o\phi}}{\rho U^2},\\
\frac{1}{H_\psi}\frac{\partial\delta_\psi^{**}}{\partial\psi}+\frac{1}{H_\phi}\frac{\partial\delta_{\psi\phi}^{**}}{\partial\phi}+\frac{2\delta_{\psi\phi}^{**}}{H_\phi U}\frac{\partial U}{\partial\phi}+\\
+\frac{2\delta_\psi^{**}}{H_\psi U}\frac{\partial U}{\partial\psi}+\frac{2\delta_{\psi\phi}^{**}}{H_\phi H_\psi}\frac{\partial H_\psi}{\partial\phi}+\\
+\frac{1}{H_\phi H_\psi}\frac{\partial H_\phi}{\partial\psi}\left(\delta_\psi^{**}+\delta_\phi^{**}+\delta_\phi^{*}-\delta\right)=\\
=\frac{-1}{\rho H_\psi U^2}\frac{\partial p}{\partial\psi}\delta-\frac{\tau_{o\psi}}{\rho U^2}
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

не позволяет провести интегрирование, поскольку число неизвестных функций здесь превышает число уравнений.

Воспользуемся известным приемом и введем относительные существенно положительные величины (характерные толщины ППС) [1], которые для практических расчетов в безотрывной зоне считаются постоянными величинами:

$$
H=\frac{\delta_\phi^{*}}{\delta_\phi^{**}},\quad I=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\delta_{\phi\psi}^{**}}{\delta_\phi^{**}},\quad K=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\delta_\psi^{*}}{\delta_\phi^{**}},
$$

$$
L=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\delta_\psi^{**}}{\delta_\phi^{**}},\quad M=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\delta_{\psi\phi}^{**}}{\delta_\phi^{**}},\quad N=\frac{\delta}{\delta_\phi^{**}},
$$

где δ_ϕ^{**} – толщина потери импульса в направлении φ (вдоль линии тока); $\varepsilon=\mathrm{tg}\theta_0=\frac{\tau_{0\psi}}{\tau_{0\phi}}$ – тангенс угла скоса донной линии тока; $\delta_{\phi\psi}^{**}, \delta_\psi^{**}, \delta_{\psi\phi}^{**}$ – характерные толщины потерь импульсов; $\delta_\phi^{*}, \delta_\psi^{*}$ – толщины вытеснения в проекциях на оси естественной системы координат (продольной φ и поперечной ψ); δ_ϕ, δ_ψ – толщины ППС в проекциях на оси естественной системы координат [3].

В естественной системе координат координатная линия φ совпадает с проекцией предельной линии тока на стенке, а координатная линия ψ ортогональна φ. Дифференциал дуги координатной линии равен дифференциалу по аргументу $dS_i = H_i dq_i$, следовательно в естественных координатах, привязанных к известным линиям тока, коэффициенты Ламе $H_\varphi = H_\psi = 1$. В результате преобразований получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\delta_\phi^{**}}{\partial\phi}+I\varepsilon\frac{\partial\delta_\phi^{**}}{\partial\psi}+I\delta_\phi^{**}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi}=\\
=\left[\begin{array}{l}
\frac{N}{\rho U^2}\frac{\partial p}{\partial\phi}\delta_\phi^{**}-\left(2+H-N\right)\frac{\delta_\phi^{**}}{U}\frac{\partial U}{\partial\phi}-\\
-\left(2I-K\right)\frac{\varepsilon\delta_\phi^{**}}{U}\frac{\partial U}{\partial\psi}+T\left(U;\delta_\phi^{**};\nu\right)
\end{array}\right],\\
M\varepsilon\frac{\partial\delta_\phi^{**}}{\partial\phi}+L\varepsilon^2\frac{\partial\delta_\phi^{**}}{\partial\psi}+\\
+M\delta_\phi^{**}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi}+2L\delta_\phi^{**}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi}=\\
=-\left[\begin{array}{l}
\frac{N}{\rho U^2}\frac{\partial p}{\partial\psi}\delta_\phi^{**}+\frac{2L\varepsilon^2\delta_\phi^{**}}{U}\frac{\partial U}{\partial\psi}+\\
+\frac{2M\varepsilon\delta_\phi^{**}}{U}\frac{\partial U}{\partial\phi}+\varepsilon T\left(U;\delta_\phi^{**};\nu\right)
\end{array}\right],
\end{gathered}
\qquad (2)
$$

где принятый закон трения $T\left(U;\delta_\phi^{**};\nu\right)=\frac{\tau_{0\phi}}{\rho U^2}$. Для турбулентного распределения скорости

$$\frac{u}{U}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

закон трения записывается в виде [5]

$$T\left(U;\delta_{\phi}^{**};\nu\right)=\frac{\tau_{o\phi}}{\rho U^{2}}=0,01256\left(\frac{U\delta_{\phi}^{**}}{\nu}\right)^{-0,25}. \qquad (3)$$

Система (2) принадлежит к виду квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных [4]. Дискриминант характеристического уравнения (2) имеет вид

$$D=4L\varepsilon^{2}(\delta_{\phi}^{**})^{2}\left(L-MI\right),$$

следовательно эта система относится к эллиптическому, параболическому или гиперболическому типам, если величина $L/(MI)$ меньше, равна или больше единицы соответственно. Для различных профилей скорости эта величина близка к единице [1].

В случае параболичности у системы уравнений импульсов (2) существует одно семейство характеристик

$$\lambda=\frac{d\psi}{d\phi}=I\varepsilon, \qquad (4)$$

а дифференциальное соотношение на характеристике имеет вид

$$M\frac{d\varepsilon}{d\phi}=-MN\frac{\varepsilon}{\rho U^{2}}\frac{\partial p}{\partial\phi}-\frac{N}{\rho U^{2}}\frac{\partial p}{\partial\psi}-\left(N-H\right)\frac{M\varepsilon}{U}\frac{\partial U}{\partial\phi}-\frac{KM\varepsilon^{2}}{U}\frac{\partial U}{\partial\psi}-\left(M+1\right)\frac{\varepsilon}{\delta_{\phi}^{**}}T\left(U;\delta_{\phi}^{**};\nu\right). \qquad (5)$$

Во многих случаях потенциального течения в ядре потока удобнее использовать несколько упрощенную запись уравнений импульсов (2) и дифференциального соотношения (5).

Во внешнем безвихревом потоке

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\phi}=\frac{U\partial U}{\partial\phi},\quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\psi}=\frac{U\partial U}{\partial\psi}.$$

Подставим эти выражения в (2) и (5) и получим уравнения импульсов ППС в случае потенциального ядра потока

$$\begin{gathered}\frac{\partial\delta_{\phi}^{**}}{\partial\phi}+I\varepsilon\frac{\partial\delta_{\phi}^{**}}{\partial\psi}+I\delta_{\phi}^{**}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi}=\\ =\left[\begin{array}{l}-\left(2+H\right)\dfrac{\delta_{\phi}^{**}}{U}\dfrac{\partial U}{\partial\phi}-\left(2I-K\right)\times\\ \times\dfrac{\varepsilon\delta_{\phi}^{**}}{U}\dfrac{\partial U}{\partial\psi}+T\left(U;\delta_{\phi}^{**};\nu\right)\end{array}\right],\\ M\varepsilon\frac{\partial\delta_{\phi}^{**}}{\partial\phi}+L\varepsilon^{2}\frac{\partial\delta_{\phi}^{**}}{\partial\psi}+\\ +M\delta_{\phi}^{**}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\phi}+2L\delta_{\phi}^{**}\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\psi}=\\ =-\left[\begin{array}{l}\left(2L\varepsilon^{2}-N\right)\dfrac{\delta_{\phi}^{**}}{U}\dfrac{\partial U}{\partial\psi}+\\ +\dfrac{2M\varepsilon\delta_{\phi}^{**}}{U}\dfrac{\partial U}{\partial\phi}+\varepsilon T\left(U;\delta_{\phi}^{**};\nu\right)\end{array}\right]\end{gathered} \qquad (6)$$

и дифференциальное соотношение

$$M\frac{d\varepsilon}{d\phi}=\frac{MH\varepsilon}{U}\frac{\partial U}{\partial\phi}+\left(N-KM\varepsilon^{2}\right)\times\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial\psi}-\left(M+1\right)\frac{\varepsilon}{\delta_{\phi}^{**}}T\left(U;\delta_{\phi}^{**};\nu\right), \qquad (7)$$

где ε – тангенс угла скоса донной линии тока, $\varepsilon=\operatorname{tg}\theta_0$.

Дифференциальное уравнение (7) выражает зависимость ε от φ и δ_{ϕ}^{**} вдоль характеристик.

Для потенциального течения в круговом секторе сделаем некоторые допущения. Скорость потока вдоль линии тока не изменяется:

$$\frac{\partial U}{\partial\phi}=0.$$

Распределение скорости по радиусу подчиняется закону свободного вихря $UR=C$, тогда

$$\frac{\partial U}{\partial\psi}=-\frac{\partial U}{\partial R}=-\frac{d}{dR}\left(\frac{C}{R}\right)=\frac{2C}{R^{2}}.$$

Для решения используем комбинированный метод, совмещающий метод конечных разностей и метод характеристик. Система уравнений записывается в конечных разностях с учетом принятых выше допущений и включает уравнение характеристик

$$\Delta\psi=I\varepsilon\Delta\varphi=I\varepsilon R\Delta\alpha, \qquad (8)$$

дифференциальное соотношение на характеристике

$$\Delta\varepsilon=\left[H\frac{\varepsilon}{U}\frac{\Delta U}{\Delta\phi}+\left(N-KM\varepsilon^{2}\right)\frac{1}{MU}\frac{\Delta U}{\Delta\psi}-\frac{M+1}{M}\frac{\varepsilon}{\delta_{\phi}^{**}}T\left(U;\delta_{\phi}^{**};\nu\right)\right]\Delta\phi \qquad (9)$$

и уравнение импульсов

$$\Delta\delta_{\phi}^{**}=\left[\left(K-2I\right)\frac{\varepsilon\delta_{\phi}^{**}}{U}\frac{\Delta U}{\Delta\psi}-\left(2+H\right)\frac{\delta_{\phi}^{**}}{U}\frac{\Delta U}{\Delta\phi}+T\left(U;\delta_{\phi}^{**};\nu\right)-I\varepsilon\frac{\Delta\delta_{\phi}^{**}}{\Delta\psi}-I\delta_{\phi}^{**}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\psi}\right]\Delta\phi. \qquad (10)$$

Численное интегрирование выполняется следующим образом (рис. 1).

В области решения $ABCD$ определяются поля скоростей, линии тока и строятся естественные координаты φ и ψ. На входе в область (кривая AB) задаются значения ε_0 и $(\delta_{\phi}^{**})_0$. По выражению (8) находятся точки пересечения характеристик, выходящих из узлов в плоскости $\varphi(0)$ с плоскостью $\varphi(1)$: $\Delta\psi_{00},\Delta\psi_{01},\Delta\psi_{02},\ldots$. Отметим, что эти точки не совпадают с узлами на линии тока в плоскости φ (1) (см. рис. 1).

По выражению (9) определяются приращения вдоль каждой характеристики:

$$\Delta\varepsilon_{00},\ \Delta\varepsilon_{01},\ \Delta\varepsilon_{02},\ldots.$$

Значения ε в плоскости $\varphi(1)$ находятся по выражениям

$$\left(\varepsilon_{10}\right)'=\varepsilon_{00}+\Delta\varepsilon_{00},\ \left(\varepsilon_{11}\right)'=\varepsilon_{01}+\Delta\varepsilon_{01},$$

$$\left(\varepsilon_{12}\right)'=\varepsilon_{02}+\Delta\varepsilon_{02},\ldots.$$

где обозначения для ε взяты со штрихом, поскольку точки пересечения характеристик с плоскостью $\varphi(1)$ не совпадают с узлами.

Затем делается допущение о гладкости функции $\varepsilon(R)$ (или $\varepsilon(\psi)$), после чего выполняется коррекция значений, т. е. определяются значения ε непосредственно в узлах:

$$\varepsilon_{10}=\frac{(\varepsilon_{10})'-(\varepsilon_{11})'}{\Delta R-(\Delta\psi_{00})'+(\Delta\psi_{01})'}(\Delta\psi_{00})'+(\varepsilon_{10})',$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{(\varepsilon_{11})'-(\varepsilon_{12})'}{\Delta R-(\Delta\psi_{01})'+(\Delta\psi_{02})'}(\Delta\psi_{01})'+(\varepsilon_{11})',\ \ldots .$$

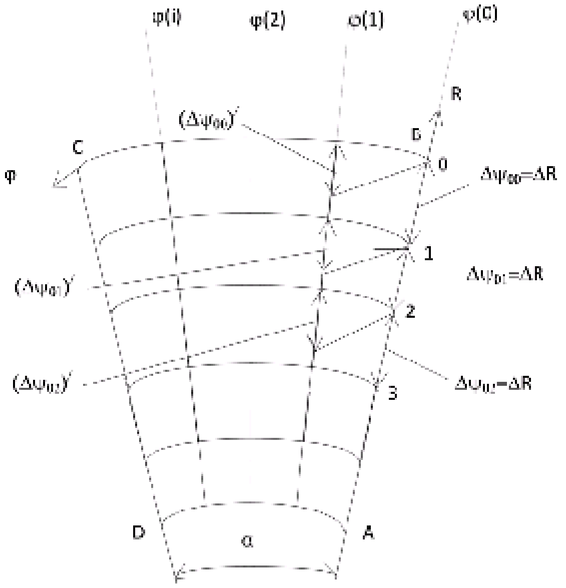

Рис. 1. Схема численного интегрирования

Приращение толщин потери импульса вдоль координатной линии φ (ψ = const) рассчитывается по выражению (10). Поскольку

$$\frac{\partial\delta_{\phi}^{**}}{\partial\psi}=-\frac{\partial\delta_{\phi}^{**}}{\partial R},$$

то разностные аналоги производной имеют вид

$$\left(\frac{\Delta\delta_{\phi}^{**}}{\Delta R}\right)_{00}=\frac{\delta_{\phi_{00}}^{**}-\delta_{\phi_{01}}^{**}}{\Delta R},$$

$$\left(\frac{\Delta\delta_{\phi}^{**}}{\Delta R}\right)_{01}=\frac{\delta_{\phi_{01}}^{**}-\delta_{\phi_{02}}^{**}}{\Delta R},\ \ldots .$$

Таким же образом определяется и $\Delta\varepsilon/\Delta R$.

При нулевых начальных условиях: $(\delta_{\phi}^{**})_{0i}=0$ – для старта решения при переходе $\alpha_0\to\alpha_1$ необходимо использовать выражения для толщины потери импульса на плоской пластине [5]:

$$(\delta_{\phi}^{**})_{10}=0,036\Delta\phi_{00}\left(\frac{\Delta\phi_{00}U_{00}}{\nu}\right)^{-0,2},$$

$$(\delta_{\phi}^{**})_{11}=0,036\Delta\phi_{01}\left(\frac{\Delta\phi_{01}U_{01}}{\nu}\right)^{-0,2},\ \ldots .$$

Это допущение вполне справедливо, поскольку $\varepsilon_{00}=0$, а шаг интегрирования $\Delta\alpha\to 0$. Далее на переходе $\alpha_1\to\alpha_2$ используется выражение (10).

Результаты расчета представлены ниже (рис. 2...4).

Анализ полученных результатов показывает, что толщина потери импульса расслаивается в зависимости от радиуса линии тока. Тангенс угла скоса донной линии тока не зависит от радиуса и достигает величины насыщения $\varepsilon=1{,}511$.

Справедливость принятых допущений подтверждается совпадением теоретических расчетов (рис. 4) с данными эксперимента по визуализации донных линий тока (рис. 5).

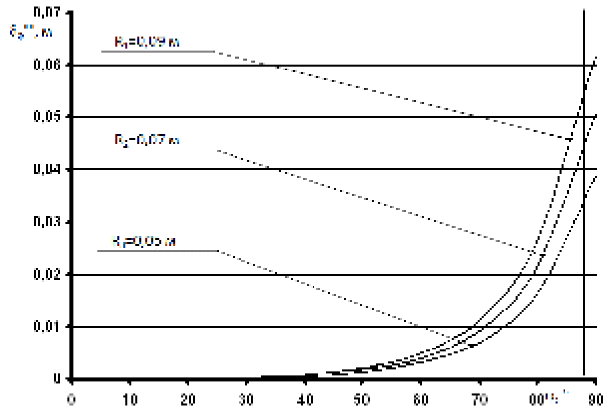

Рис. 2. Зависимость толщины потери импульса от угла поворота потока на круговом секторе с углом поворота потока 90° при скорости потока 25 м/с

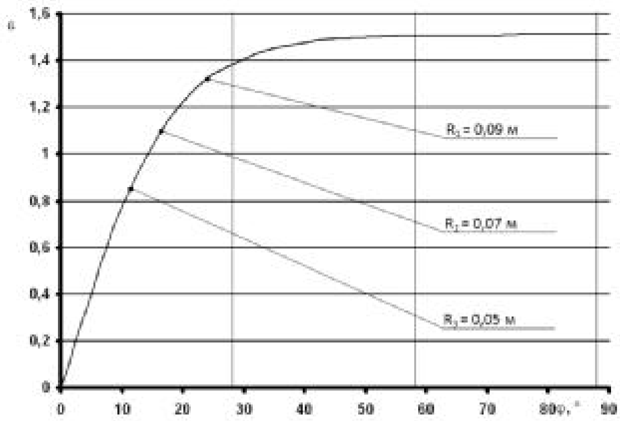

Рис. 3. Зависимость угла скоса донной линии тока от угла поворота потока (условия те же, что и на рис. 2)

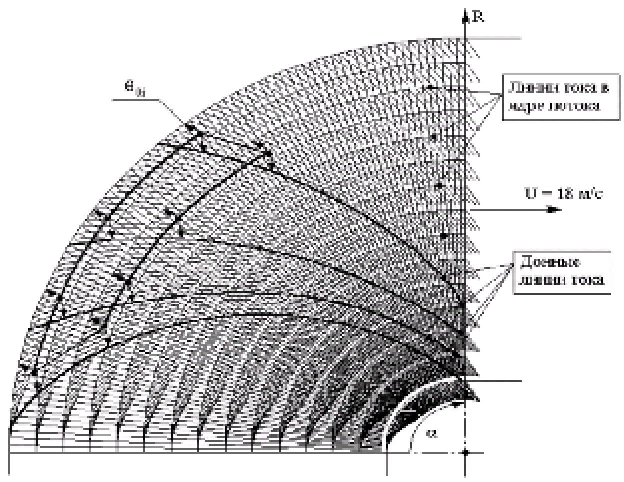

Рис. 4. Результаты теоретических исследований данных линий тока

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

– получена форма записи уравнения импульсов и дифференциального соотношения на характеристике, позволяющая вести интегрирование совмещенным разностно-характеристическим методом в естественной системе координат с произвольных начальных координат при течении в круговом секторе;

– расчетная и экспериментальная визуализация донных линий тока показывает, что угол скоса этой линии изменяется от нуля в прямолинейном потоке до предельного значения насыщения при повороте потока на криволинейном участке.

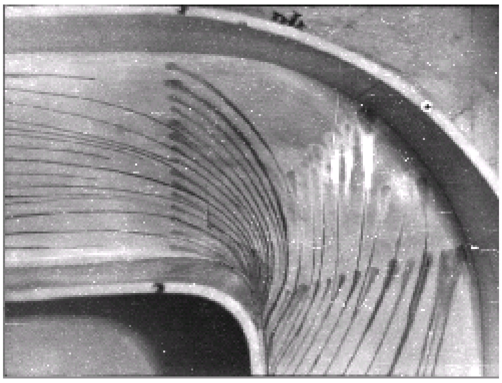

Рис. 5. Экспериментальная визуализация донных линий тока при течении в прямоугольном колене (скорость потока 18 м/с)

Библиографический список

1. Степанов, Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин / Г. Ю. Степанов. М. : Физматгиз, 1962.

2. Шкарбуль, С. Н. Анализ пространственного пограничного слоя в центробежном колесе турбомашины / С. Н. Шкарбуль, В. С. Вольчук // Энергомашиностроение. 1977. № 1.

3. Кишкин, А. А. Уравнения импульсов трехмерного пограничного слоя / А. А. Кишкин, Д. В. Черненко, Е. В. Черненко // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Серия «Технические науки». Новочеркасск, 2007. № 4.

4. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. М. : Наука, 1966.

5. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. М. : Наука, 1969.

A. A. Kishkin, E. V. Chernenko, A. A. Zuev, V. S. Goroshko

BOTTOM FLOW LINES RESEARCH AT FLOW TURNING

A difference-characteristic integration method of parabolic quasi-linear differential equation system of impulses of three-dimensional boundary layer at flow on the circular sector is analyzed. A satisfactory fit of results of the computational and the experimental visualization of bottom flow lines is registered.

Keywords: three-dimensional boundary layer, equations of impulses, differential relation, visualization of bottom flow lines.

УДК 681.332.53/519.676

Е. И. Алгазин, А. П. Ковалевский, В. Б. Малинкин

ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ ИНВАРИАНТНЫМ МЕТОДОМ С ПОСЛЕДУЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАБОТКОЙ

Синтезирована инвариантная система обработки информации на основе квадратичной нелинейной обработки. При расчете параметров такой системы принято допущение, что отсчеты поднесущей зашумлены аддитивной помехой и некоррелированы между собой. Проведено сравнение количественных оценок работы данной системы с количественными показателями классической системы с амплитудной модуляцией и характеристиками инвариантной системы на основе расширенного синхронного детектирования.

Ключевые слова: помехоустойчивость, инвариант, вероятность попарного перехода, отношение сигнал/шум.

В работах [1–5] исследовались инвариантные системы передачи информации, которые имеют различные вероятности попарного перехода. Такие системы имеют существенно лучшие характеристики по сравнению с классическими системами амплитудной модуляции при комплексном воздействии помех. Выиг-