УДК 519.6

А. А. Кузнецов, А. К. Шлепкин, А. Н. Антамошкин

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕРНСАЙДОВОЙ ГРУППЫ $B(2,5)$[1]

На основе компьютерного моделирования в терминах минимальных слов сделан сравнительный анализ бернсайдовых групп B(2,5) и $B_0(2,5)$.

Ключевые слова: проблема Бернсайда, бернсайдова группа B(2,5).

Пусть $B(2,5)$ – двупорожденная бернсайдова группа периода 5, а $B_0(2,5)$ – максимальная универсальная конечная двупорожденная группа того же периода (порядок последней равен 5^{34} [1]). Вопрос о совпадении указанных групп в настоящее время является открытым [2].

В работе [3] был предложен алгоритм для моделирования произвольных конечнопорожденных периодических групп (в частности, бернсайдовых групп), заданных порождающими элементами и определяющими соотношениями. При помощи этого алгоритма конечнопорожденная периодическая группа G была представлена в виде динамической системы объектов $K_s(G) = (P_s, A_s, C_s, T_s)$, где P_s – множество всех минимальных слов группы G, не превосходящих по длине s, с заданной на этом множестве таблицей умножения T_s, обрабатывая которую при помощи алгоритма A_s, мы получаем список соотношений C_s в группе G.

В работе [4] на основе компьютерного моделирования по алгоритму [3] было показано, что в терминах минимальных слов группы $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ совпадают на словах длины ≤ 27.

В данной статье вычисления продолжены, и на длине 30 и последующих длинах найдены первые несовпадения элементов и соотношений в данных группах, представленных в виде минимальных слов.

Основные понятия. Пусть $G = \langle x_1, x_2, ..., x_m \mid v_1 = w_1, v_2 = w_2, \ldots, v_k = w_k \rangle$ – периодическая группа, т. е. группа, у которой все элементы имеют конечный порядок, со множеством свободных порождающих $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и определяющими соотношениями в G $\{v_i = w_i\}$. На множестве порождающих введем отношение порядка $\prec$ (меньше): $\{x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_m\}$.

Пусть g – элемент группы G. Тогда его можно представить в виде конечного произведения из свободных порождающих, т. е. $g = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s$, где $\alpha_i \in \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Правую часть данного равенства мы будем называть *словом* и записывать в виде $v = \alpha_1\alpha_2...\alpha_s$. В некоторых случаях, если необходимо подчеркнуть связь между элементом группы g и представляющим его словом v, т. е. записью элемента g через образующие, мы будем писать $g_v = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s$. Натуральное число s будем называть *длиной слова v*. Функция $L(v)$ определена на множестве всех слов и равна длине слова v, т. е. $L(v) = s$ для слова v. Единицу группы G, обозначаемую e, мы будем отождествлять с пустым словом, которое также будем обозначать e. По определению $L(e) = 0$. Говорят, что слово x входит в слово w, если можно указать такие слова p и q, что $w = pxq$. Если при этом слово p (q) пусто, то говорят, что x есть начало (конец) слова w.

Будем говорить, что слово w *меньше* слова v и запишем это как $w \prec v$, если имеет место одно из следующих утверждений:

1) $L(w) < L(v)$;

2) если $L(w) = L(v)$, то тогда пусть $w = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_s$ и $v = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_s$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, …, $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, $\alpha_k \prec \beta_k$ для некоторого $1 \leq k \leq s$.

Пусть $v = \alpha_1\alpha_2...\alpha_s$ и $w = \beta_1\beta_2...\beta_r$ – два слова, представляющие один элемент $g \in G$, т. е. $g_v = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s$ и $g_w = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_r$. Тогда равенство $\alpha_1\alpha_2...\alpha_s = \beta_1\beta_2...\beta_r$ мы будет называть *соотношением* в G.

Однако в другую сторону это соответствие однозначно, т. е. каждое слово единственным образом определяет соответствующий ему элемент в группе. Иначе говоря, если g_v и h_v – 2 элемента из G, представленные одним словом $v = \alpha_1\alpha_2...\alpha_s$, то тогда $g = h$.

Слово v будем называть *минимальным* в G относительно введенного порядка, если для любого другого слова w, удовлетворяющего условию $g_v = g_w$, будет выполняться $v \prec w$. Для любого $g \in G$ существует единственное минимальное слово v, представляющее данный элемент.

Сравнительный анализ группы B(2,5) с группой $\mathbf{B_0(2,5)}$. Пусть $B(2,5) = \langle x_1, x_2 \mid g^5 = e \rangle$ – двупорожденная бернсайдова группа периода 5. И пусть $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ – образующие групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$. Дж. Хавас, Г. Уолл и Дж. Уэмсли в работе [1], используя коммутаторное исчисление, при помощи компьютера вычислили соотношения для базисных коммутаторов группы $B_0(2,5)$. В качестве первых двух коммутаторов были взяты образующие группы $B_0(2,5)$, а последующие коммутаторы с 3 по 34 вычислялись рекурсивно через 1 и 2. В этом случае каждый элемент $h \in B_0(2,5)$ однозначно представляется множеством упорядоченных произведением базисных коммутаторов в определенных степенях:

$$h = 1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot 34^{\alpha_{34}}, \qquad (1)$$

где $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ($i = 1, 2, \ldots, 34$). Правую часть равенства (1) мы будем записывать $k(h) = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \ldots 34^{\alpha_{34}}$ и называть *нормальным словом* [1].

Пусть ψ – гомоморфизм группы $B(2,5)$ на $B_0(2,5)$, заданный следующим правилом:

$$\psi(g_v) \to k(h_v),$$

где $g_v \in B(2,5)$ и $h_v \in B_0(2,5)$ – элементы, вычисленные по слову v в группах $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ соответственно.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента Российской Федерации (код проекта МК-2494.2008.1), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1/3023) и РФФИ (код проекта 09-01-07177-а).

Очевидно, что все соотношения группы $B(2,5)$ будут справедливыми в $B_0(2,5)$. Обратное утверждение будет верно, если $B(2,5) \cong B_0(2,5)$. Таким образом, если два слова v и w равны как элементы группы в $B(2,5)$, то под действием ψ они будут соответствовать одному нормальному слову в $B_0(2,5)$.

Если ψ окажется взаимно однозначным, то из этого будет следовать изоморфизм $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$, т. е. группа $B(2,5)$ будет конечна. В противном случае $B(2,5)$ – бесконечная группа.

При помощи компьютерных вычислений, используя ψ, на каждой длине можно получить максимально возможный список соотношений для группы $B_0(2,5)$ в терминах минимальных слов в алфавите образующих $\{1, 2\}$.

Для группы $B(2,5)$ на основе компьютерного моделирования по алгоритму [3] был вычислен объект $K_{33}(2,5)$. В терминах минимальных слов получилось, что $|C_{33}(2,5)| = 45\,392$ и $|P_{33}(2,5)| \approx 5^{14}$. Расчеты были проведены на кластере Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета. В качестве программного инструмента реализации была взята система компьютерной алгебры MATLAB 7.7.0 с подключенными дополнительными модулями MATLAB Distributed Computing Server и MATLAB Parallel Computing Toolbox. При поэлементном сравнении группы $B(2,5)$ с группой $B_0(2,5)$ была выявлена следующая теорема.

Теорема 1. Пусть v, w – два слова в алфавите образующих $\{1, 2\}$, $L(v) \leq 29$ и $L(w) \leq 29$. Тогда $v = w$ – соотношение в группе $B_0(2,5)$ тогда и только тогда, когда $v = w$ – соотношение в группе $B_0(2,5)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из непосредственного вычисления. Например, в группе $B_0(2,5)$ имеет место соотношение 11112222 = 21212121. Действительно, $11112222 \xrightarrow{\psi} 1^4 2^4$ и $21212121 \xrightarrow{\psi} 1^4 2^4$. В группе $B(2,5)$ справедливость указанного соотношения доказывается по алгоритму [3] так: $21 \cdot 21212121 = (21)^5 = e$ и $21 \cdot 11112222 = e$ и т. д.

Однако длина 30 явилась своеобразной точкой расхождения групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$. Так на длине 30 в $B_0(2,5)$ имеются 2 соотношения, на длине 31 – 10, на длине 32 – 47 и на длине 33 – 69 соотношений, доказать справедливость которых в $B(2,5)$ по алгоритму [3] при применении соотношений, длины левой и правой частей которых не превышают 33, не удается. Соотношения такого вида приведены в таблице.

Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если в группе $B(2,5)$ не выполняется хотя бы одно соотношение из приведенной таблицы, то тогда группа $B(2,5)$ бесконечна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанные в таблице соотношения справедливы в $B_0(2,5)$. Например,

$$\psi(122121121221121212211212212112) =$$
$$= \psi(212121122112212121122112212121) =$$
$$= 3^1 4^2 5^2 6^1 7^4 8^1 9^1 11^3 12^3 13^4 14^3 15^2 16^2 17^2 18^2 \times$$
$$\times 20^4 21^2 22^1 23^4 24^4 25^4 26^3 27^1 28^1 29^1 31^4 32^2 34^4$$

и т. д. Поэтому если хотя бы одно из этих соотношений не будет выполняться в $B(2, 5)$, то $B(2,5) \neq B_0(2,5)$, а это означает бесконечность $B(2, 5)$.

Полученные результаты позволяют вполне обоснованно высказать гипотезу о том, что группа $B(2,5)$ бесконечна. Приведем аргументы в пользу этой гипотезы:

– при моделировании по алгоритму [3] известных конечных бернсайдовых групп $B(2,3)$, $B(2,4)$ и $B(3,3)$ не было зафиксировано ни одного случая, чтобы какое-нибудь соотношение, в котором длины слов в левой и правой части не превышают s, было найдено в объекте K_r, где $r > s$;

– при моделировании группы $B(2,5)$ для поиска соотношений были использованы все групповые аксиомы, однако, как было сказано выше, ни одно из указанных в таблице соотношений доказать не удалось.

В то же время строго доказать бесконечность группы $B(2,5)$ пока также не удается.

Библиографический список

1. Hawas, G. The two generated Burnside group of exponent five / G. Hawas, G. Wall, J. Wamsley // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. № 10. P. 459–470.

2. Кострикин, А. И. Вокруг Бернсайда / А. И. Кострикин. М. : Наука, 1986.

3. Кузнецов, А. А. Моделирование периодических групп / А. А. Кузнецов, А. Н. Антамошкин, А. К. Шлепкин // Системы упр. и информ. технологии. 2008. № 2. С. 4–8.

4. Кузнецов, А. А. Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ / А. А. Кузнецов, А. К. Шлепкин // Тр. Ин-та математики и механики Урал. отд-ния Рос. акад. наук. 2009. № 2. С. 125–132.

Некоторые соотношения группы $B_0(2,5)$

122121121221121212211212212112 = 212121122112212121122112212121
1221122121211221122121212222111 = 2121122121121221121212211212212
12211222121111211222212222121112 = 21211112121221122112112121112111
121211211121121211211122121221112 = 211122121221112112121121112112121

A. A. Kuznetsov, A. K. Shlepkin, A. N. Antamoshkin

COMPUTER MODELING OF BURNSIDE GROUP *B*(2,5)

A comparative analysis of the groups B(2,5) and $B_0(2,5)$ based on computer modeling in the terms of minimal words is carried out.

Keywords: Burnside problem, Burnside group B(2,5).